BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 1, nº 1 (1877), p. 125-137

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1877_2_1_1_125_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

LEJEUNE-DIRICHLET (P.-G.). — VORLESUNGEN ÜBER DIE IM UMGEKEHRTEN VERHÄLTNISS DES QUADRATS DER ENTFERNUNG WIRKENDEN KRÄFTE. Herausgegeben von Dr F. GRUBE, ord. Lehrer an der Königl. Domschule zu Schleswig. — Leipzig, Teubner, 1876, in-8°, VIII-183 p. Pr. : 4 M.

M. Heine, dans son *Traité des fonctions sphériques* (1861), dit que les leçons de Dirichlet sur les forces qui agissent en raison inverse du carré de la distance *formeraient le meilleur traité sur ce sujet*. M. le Dr Grube, à qui il a été donné de suivre complétement le cours de Dirichlet pendant l'hiver de 1856-57, en publie aujourd'hui une reproduction aussi exacte que possible.

M. Grube a respecté même les erreurs de son illustre maître relativement à certaines questions de priorité, se bornant à les signaler dans d'excellentes Notes placées à la fin du Volume. Ces leçons, remarquables surtout par la clarté et l'extrême rigueur de l'exposition, intéressent aussi bien ceux qui veulent acquérir les notions principales sur le potentiel et les fonctions sphériques, et ceux qui, déjà familiers avec ces notions analytiques, ont souvent occasion de les appliquer. Il ne sera pas inutile d'indiquer ici les principales questions traitées dans les sept Chapitres dont se compose cet Ouvrage.

Chapitre I. — Les composantes de l'action exercée par une masse continue ou par un système de masses continues sur un point matériel (x, y, z) sont les dérivées partielles d'une même fonction v, qui est le potentiel du corps sur le point. Ce potentiel et ses dérivées premières par rapport à x, y, z sont des fonctions continues dans tout l'espace. Dirichlet détermine le potentiel d'une sphère homogène sur un point. Il montre incidemment que, pour un corps quelconque, de masse M, le produit $v\rho$ tend vers M quand le rayon vecteur ρ du point croît indéfiniment. Il prouve que, si la densité k du corps attirant autour du point où se trouve le point attiré est continue, on a

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=-4\pi k.$$

Il termine le Chapitre en établissant que, pour une masse déterminée, il n'existe qu'une fonction v satisfaisant à cette dernière relation, continue dans tout l'espace ainsi que ses dérivées premières, et telle que les six quantités xv, yv, zv, $x^2\frac{\partial v}{\partial x}$, $y^2\frac{\partial v}{\partial y}$, $z^2\frac{\partial v}{\partial z}$ restent finies quand le point attiré s'éloigne indéfiniment.

Chapitre II. — Au moyen des propriétés caractéristiques du potentiel, Dirichlet démontre l'exactitude des formules très-simples qui représentent le potentiel d'un ellipsoïde homogène sur un point. Ce potentiel est de la forme

$$G - Lx^2 - My^2 - Nz^2,$$

G, L, M, N étant des intégrales définies prises de zéro à ∞ quand le point est intérieur, de σ à ∞ quand il est extérieur, σ étant le paramètre de l'ellipsoïde homofocal au premier et passant par le point donné. Il en conclut que l'attraction sur un point intérieur est la même pour tous les ellipsoïdes concentriques et homothétiques, et que, par suite, l'action d'une couche homogène limitée par deux tels ellipsoïdes est nulle. Dirichlet dit que personne n'a cherché l'action d'une telle couche sur un point extérieur, et il en donne l'expression. Le Dr Grube relève cette assertion, et rappelle que la question avait été antérieurement traitée par Poisson et par M. Chasles, qui avaient donné au résultat des énoncés géométriques très-simples.

Chapitre III. — La considération d'une couche solide infiniment mince conduit au potentiel d'une surface dont chaque élément aurait une certaine masse. Ce potentiel a les propriétés caractéristiques suivantes : 1° il est partout continu ; 2° hors de la surface, toutes ses dérivées sont partout continues ; 3° si le point (x, y, z) est situé hors de la surface, on a

$$(a) \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0\,;$$

4° si le point se meut sur une normale à la surface, le potentiel dépend de la distance p de ce point à un point fixe de cette normale ; $\frac{\partial v}{\partial p}$ est discontinu quand on traverse la surface, et, si α indique le pied de la normale, on a

$$\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_{\alpha+\epsilon} - \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_{\alpha-\epsilon} = -4\pi k,$$

relation due à Laplace; 5° $xv, yv, zv, x^2\frac{\partial v}{\partial x}, y^2\frac{\partial v}{\partial y}, z^2\frac{\partial v}{\partial z}$ restent finies quand le point (x, y, z) s'éloigne indéfiniment.

Chapitre IV. — Pour étudier le potentiel d'une surface sphérique de rayon R, il faut développer suivant les puissances ascendantes de α la fonction $(1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$. Si P_n est le coefficient de α^n, P_n est un polynôme entier en $\cos\gamma$, du degré n, et dont la valeur est toujours comprise entre -1 et $+1$. Au moyen de ces fonctions P_n, on développe v suivant les puissances ascendantes de $\frac{\rho}{R}$, si le point est intérieur, de $\frac{R}{\rho}$ dans le cas contraire. Le coefficient U_n du terme général de l'un ou l'autre de ces développements est

$$\int\int k' P_n(\cos\gamma)\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi'$$

ρ', θ' et φ' étant les coordonnées polaires d'un point de la sphère, γ l'angle que le rayon vecteur ρ' fait avec ρ. L'application du théorème de Laplace conduit à la relation

$$(b)\qquad k = \frac{1}{4\pi}\sum_0^\infty (2n+1)U_n.$$

Le potentiel v d'un solide ou d'une surface sur un point extérieur satisfait à la relation (a). A l'aide d'un théorème de Green qui relie deux intégrales étendues au volume d'un corps solide à une autre relative à sa surface, Dirichlet exprime cette relation au moyen des coordonnées polaires ρ, θ, ψ. Remplaçant dans la relation nouvelle le potentiel d'une surface sphérique par son développement suivant les puissances de ρ, il en conclut une équation aux dérivées partielles du second ordre, à laquelle satisfait la fonction U_n. Les solutions de cette équation, entières par rapport à $\cos\theta$, $\sin\theta\cos\varphi$, $\sin\theta\sin\varphi$, sont les fonctions sphériques d'ordre n. Elles jouissent des propriétés suivantes :

$$1^\circ\qquad \int\int U_m U_n \sin\theta\,d\theta\,d\varphi = 0,$$

l'intégrale étant étendue à toute la sphère.

2° Toute combinaison linéaire de deux fonctions sphériques du même ordre est une fonction sphérique du même ordre; il en est de même des dérivées d'une fonction sphérique par rapport à des paramètres.

3° $$U_m = \frac{2m+1}{4\pi}\int d\sigma' U'_m P_m(\cos\gamma),$$

l'intégrale s'étendant à toute la sphère.

4° Une fonction sphérique d'ordre m est susceptible d'une infinité de formes, à cause de la relation

$$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta\cos\varphi)^2 + (\sin\theta\sin\varphi)^2 = 1;$$

en particulier on peut la ramener au degré m, tous les termes étant de même parité; on peut aussi la rendre homogène, du degré m.

La formule (b) exprime le célèbre théorème relatif au développement en série d'une fonction de deux variables θ et φ, déterminée pour toutes les valeurs de θ et φ et continue. Dirichlet n'avait pas donné dans son cours sa démonstration relative à la convergence de la série. M. Grube l'a reproduite en note. Enfin le Chapitre se termine par l'expression générale de U_m.

Chapitre V. — Ce Chapitre est consacré à l'étude de la distribution de l'électricité : 1° sur une sphère soumise à l'influence d'un corps non conducteur; les calculs sont terminés dans le cas où le corps non conducteur se réduit à un point; 2° sur les surfaces limites d'un solide limité par deux sphères concentriques, soumis à l'action d'un corps non conducteur placé dans l'intérieur; 3° sur deux sphères. A cette occasion, Dirichlet présente des considérations très-intéressantes sur les équations fonctionnelles.

Chapitre VI. — Dans ce Chapitre, se trouve la démonstration du théorème suivant, connu sous le nom de *principe de Dirichlet :* « Pour un corps fini déterminé, il existe toujours une fonction v de x, y, z, continue, ainsi que ses dérivées, dans tout l'espace, ayant pour chaque point du corps une valeur déterminée, et satisfaisant dans tout l'espace, excepté dans l'intérieur du corps, à la relation (a) ».

Chapitre VII. — Enfin l'Ouvrage se termine par l'application des principes précédents au magnétisme, et en particulier au magnétisme terrestre.

B. B.

Dr KÖNIG GYULA, müegyetemi ny. r. tanár. — BEVEZETÉS A FELSŐBB ALGEBRÁBA. *Első kötet :* AZ ALGEBRAI ANALYSIS ELEMEI. — Budapest, 1877. Az Eggenberger-féle könyvkerseskedés kiadása. (Hoffmann és Molnár) (¹).

Ce Livre est le résumé des leçons faites chaque année par l'auteur à l'Institut Polytechnique de Budapest sur l'objet indiqué par le titre; cela explique le point de vue où l'auteur s'est placé et le but qu'il a poursuivi. Tandis que les théories de la Géométrie analytique et du Calcul différentiel ont été si souvent exposées dans des Traités systématiques, les livres élémentaires considèrent à peine l'Analyse algébrique comme une branche des Sciences mathématiques ayant une existence propre, et ils se contentent de donner les calculs d'opérations les plus simples; d'autre part, les grands Traités, tels que celui de Serret, ne sont pas propres à être déjà mis entre les mains d'un élève de l'enseignement moyen. Ces considérations ont engagé l'auteur à tenter ce qui, dans le domaine de la Géométrie, a été non-seulement tenté, mais encore exécuté avec un brillant succès, savoir d'introduire dans les doctrines enseignées depuis longtemps les considérations modernes et leurs résultats.

L'Ouvrage entier se composera de deux volumes, dont le premier vient de paraître. Son titre spécial, *Analyse algébrique,* ne répond pas, il est vrai, complétement au contenu des Ouvrages publiés jusqu'ici sous ce titre. Ce que l'auteur s'est proposé en l'écrivant peut être exprimé sommairement en disant qu'il a voulu traiter d'une manière approfondie les parties de l'Algèbre qui, partant de commencements imperceptibles, se sont développées en doctrines d'une haute portée, ayant leur domaine distinct. Il s'est partout

---

(¹) Dr JULIUS KÖNIG, professeur à l'Institut Royal Polytechnique de Hongrie. — *Introduction à l'Algèbre supérieure.* 1re PARTIE : Éléments d'Analyse algébrique. — Budapest, 1877, librairie Eggenberger (Hoffmann et Molnár). 1 vol. in-8°, 266 p. (Analyse redigée d'après des Notes fournies par l'auteur.)

attaché à faire ressortir le but et les méthodes de chaque théorie, et à rehausser par là l'intérêt du sujet.

Ainsi le Chapitre I commence par les propriétés des nombres entiers, en établissant d'une manière rigoureuse les lois de la divisibilité; il traite des fonctions arithmologiques qui expriment le nombre et la somme des diviseurs, ainsi que de la fonction $\varphi(m)$, et termine par les propriétés simples des nombres congrus, jusqu'au théorème de Fermat inclusivement.

Dans le Chapitre II se trouve la théorie des fractions continues. Elle commence par une exposition détaillée des théorèmes relatifs aux fractions continues finies, à la suite de laquelle l'auteur traite de la théorie des congruences du premier degré à plusieurs inconnues; puis il fait connaître les recherches les plus simples sur la convergence des fractions continues infinies dont les numérateurs sont égaux à l'unité, en ne les étudiant toutefois que comme fondement de la théorie des fractions continues périodiques. La démonstration du théorème que toute irrationnelle du second degré peut être exprimée par une fraction continue périodique a été donnée sous une forme plus courte que la forme habituelle, et qui mérite une attention particulière.

Ensuite vient la résolution de l'équation de Pell, comme application de cette théorie et en même temps comme base de la résolution des équations indéterminées du second degré. Quelques formes d'équations indéterminées de degré supérieur, résolubles aussi d'une manière élémentaire, terminent ce Chapitre.

Le Chapitre III traite des combinaisons; il commence par la théorie des permutations, puis développe les lois des inversions qui s'y produisent. En s'appuyant sur ces théorèmes, l'auteur a cherché à incorporer dans cette exposition élémentaire la théorie des substitutions, devenue si importante pour la théorie des équations. Il donne ensuite la décomposition d'une substitution quelconque en substitutions cycliques, la multiplication de deux substitutions quelconques, et leur décomposition finale en transpositions; puis la définition de l'ordre d'une substitution, sa détermination, et la décomposition en facteurs premiers. La question de la commutativité des facteurs conduit à la théorie des substitutions semblables. L'exposé se termine par les propriétés les plus simples des groupes de substitutions, parmi lesquels l'auteur traite spécialement celui qui contient la moitié du nombre total des substitutions. A la théorie des substitutions se rattachent une exposition détaillée des propriétés des coefficients binomiaux; la théorie des suites arithmétiques d'ordre supérieur, considérée en même temps comme une théorie des différences finies; la théorie des nombres figurés, et finalement une courte déduction des formules des combinaisons avec répétitions.

Ces trois Chapitres se relient entre eux comme comprenant la théorie des nombres discrets, et maintenant, par la théorie des nombres complexes, le Chapitre IV va préparer le passage à une autre doctrine. Ce Chapitre commence par les éléments du calcul des opérations; il donne ensuite la représentation géométrique des nombres complexes, et les théorèmes connus qui en dépendent. Vient ensuite la théorie des équations binômes, d'où l'on a naturellement exclu, pour la donner plus tard, la question de leur résolution algébrique; puis la théorie des racines de l'unité, et enfin les formules trigonométriques de sommation, qui se déduisent si facilement de ce qui précède.

Le Chapitre V expose les opérations algébriques que l'on peut exécuter sur les équations, en tant que ces opérations ne supposent pas connue la théorie proprement dite des équations; la méthode de division de Horner; la décomposition en facteurs quand les racines sont supposées déjà connues; la détermination des racines en nombres entiers; la multiplication, la division, l'accroissement et la diminution des racines, la formation de l'équation réciproque; les cas les plus simples des problèmes d'élimination, et enfin les formes homogènes.

Comme suite à ce Chapitre, le Chapitre VI donne la résolution des équations jusqu'au quatrième degré inclusivement, où, en outre de l'exposition détaillée des anciennes méthodes, nous remarquons encore les méthodes de Cayley, conçues dans l'esprit de la nouvelle Algèbre, et présentées sous une forme élémentaire.

Les Chapitres suivants développent une théorie des suites infinies d'opérations.

Dans le Chapitre VII, après une étude de la notion de limite, et les critériums de la convergence conditionnelle ou absolue des séries infinies, vient la théorie des séries de puissances, et finalement la multiplication des séries.

Le Chapitre VIII passe en revue les séries de puissances les plus importantes. On y prend pour base l'équation fonctionnelle connue de la quantité exponentielle ; puis on traite avec détail la série binomiale, d'où l'on passe à la série exponentielle, moyennant l'expression-limite connue. Il est peut-être superflu de faire remarquer que l'auteur a attaché une importance toute particulière à la rigueur de ces démonstrations. Ensuite on traite la théorie de la fonction exponentielle, et le nombre e, la définition algébrique des fonctions trigonométriques et hyperboliques, la dépendance entre ces deux espèces de fonctions, et l'on établit après cela les séries finies pour $\sin^a x$, $\cos^b x$, selon la méthode d'Hermite. On parle alors de la série logarithmique, du passage à la détermination de π, et l'on termine par un court exposé de la série hypergéométrique introduite par Gauss.

Le Chapitre IX, contenant la théorie des produits infinis et des fractions continues infinies, ne doit être considéré que comme un appendice. Une étude vraiment systématique et rigoureuse de ces formes appartient au domaine de la théorie des fonctions, tandis qu'ici l'on n'a admis que les propositions qui se rapportent à l'ordre d'idées du Livre et qui peuvent se déduire de ce qui précède ; nous trouvons ainsi l'étude de la convergence des produits infinis, les produits infinis de sinus et de cosinus, la transformation des séries en fractions continues et les applications les plus importantes qui peuvent se déduire de ces propositions.

Nous ne devons pas oublier de dire que ce Chapitre, comme tous les précédents, est terminé par une notice historique, contenant une revue détaillée du développement historique des questions qui y sont traitées.

Tel est le contenu du premier Volume qui vient de paraître. D'après l'annonce faite dans la Préface, le second Volume, de même étendue et rédigé dans le même esprit, aura pour objet la synthèse des diverses méthodes de la théorie des équations proprement dite, et emploiera pour cela une exposition élémentaire de la théorie de Galois.

En félicitant l'auteur de son remarquable travail, nous ne pouvons nous empêcher de regretter qu'il l'ait écrit pour l'usage exclusif de ses compatriotes, et nous espérons que la seconde édition paraîtra en langue allemande, ce qui, sans diminuer le nombre de ses lecteurs en Hongrie, lui en assurera beaucoup d'autres dans le reste de l'Europe.

KUMMER (E.-E.). — Ueber die Wirkung des Luftwiderstandes auf Körper von verschiedener Gestalt, insbesondere auch auf die Geschosse. 1875. (57 p., 2 pl.) In-4°.

— Neue Versuche zur Bestimmung des Angriffspunktes der Resultante des Luftwiderstandes gegen rechteckige schiefe Ebenen. Zusatz zu der Abhandlung : « Ueber die Wirkung, etc. » 1876. In-4° (¹).

Les lois physiques de la résistance de l'air sur les corps qui se meuvent dans son sein sont jusqu'ici encore fort peu connues. Une des actions les plus importantes dues à la résistance de l'air est la déviation des projectiles, animés d'un mouvement de rotation, hors du plan vertical mené par la direction originelle du mouvement. Par comparaison avec les phénomènes bien connus de la toupie de Fessel, on arrive aisément à expliquer la raison de cette déviation. Si, lorsqu'on considère le projectile du canon, le point d'application de la résultante de la résistance de l'air sur ce projectile, animé d'un mouvement de rotation dextrogyre, est *en avant* du centre de gravité, dans la chute du projectile, l'axe principal d'inertie s'écarte du plan vertical primitif de la courbe de tir, son extrémité antérieure se déplaçant à droite, et il décrirait un cône, si la durée du jet était suffisamment longue; en même temps le projectile tout entier s'écarte à droite du plan de tir primitif. Quand, au contraire, le plan d'application de la résultante de la résistance de l'air se trouve *en arrière* du centre de gravité, il se produit une rotation à gauche de l'extrémité antérieure de l'axe principal d'inertie, et en même temps le projectile dévie à gauche du plan vertical dont on vient de parler.

Comme, d'après cela, la position du point d'application de la résultante de la résistance de l'air est un élément déterminant pour le sens de la déviation du projectile, il importe de pouvoir la connaître pour les différents projectiles. Dans ce but, M. Kummer a suivi deux marches distinctes : l'une purement mathématique traite la question par le calcul; l'autre, au contraire, est physique et recourt à l'expérience.

(¹) *Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin*. F. Dümmlers Verlagsbuchhandlung (Harrwitz & Gossmann).

Pour ses calculs, il lui fallait partir de certaines hypothèses physiques; il a adopté celles de Newton et d'Euler, suivant lesquelles la pression normale exercée sur une surface plane en mouvement dans l'air est proportionnelle à cette surface et au carré du cosinus de l'angle que la normale à la surface fait avec la direction du mouvement. Quant à la grandeur elle-même de la résistance de l'air, on admet que la pression sur l'unité de surface est constante, quand la surface se meut normalement à elle-même dans l'air supposé de densité constante, et que la vitesse du corps en mouvement est constante. Dans ces hypothèses, la question n'est plus qu'un problème de Statique. M. Kummer développe d'abord les formules générales pour les corps de révolution, et calcule en particulier la position du point d'application de la résultante : 1° pour un plan; 2° pour un cylindre droit à base circulaire; 3° pour un cône circulaire droit; 4° pour le corps formé d'un cylindre circulaire et d'un cône droit; 5° pour un demi-ellipsoïde de révolution; 6° pour l'ensemble d'un cylindre et d'un demi-ellipsoïde de révolution. Mais quelque plaisir que l'on ait à voir la Statique s'enrichir d'exemples choisis, quelque intéressante que soit l'habileté déployée pour effectuer les intégrations, les résultats n'ont pas d'application pratique, tant qu'on n'a pas démontré l'exactitude des hypothèses physiques prises pour point de départ.

Aussi M. Kummer a-t-il entrepris lui-même des expériences pour démontrer l'accord du résultat de ses calculs avec la réalité. Ces expériences se bornent uniquement à déterminer le point d'application de la résultante de la résistance de l'air pour une position donnée du corps par rapport à la direction du mouvement; elles laissent complétement de côté la détermination de l'intensité de la résistance. La marche suivie en général est la suivante. Le corps à étudier est monté sur un axe fixe autour duquel il peut tourner librement; une série de trous équidistants percés dans le corps permettent de changer la position de l'axe. Dans chacune de ses positions, ce dernier coupe un des axes principaux d'inertie; et dans chaque expérience, le corps, qui est creux, est équilibré au moyen de poids convenablement placés dans son intérieur, de telle sorte que, sans changement de surface extérieure, il se trouve en équilibre indifférent. On lui fait décrire un cercle de $2^{m},1$ de rayon sous une vitesse de 8 mètres environ, et l'on mesure l'angle que l'axe longitudinal du corps parvenu à une position d'équilibre stable fait avec la direction horizontale du mouvement, puisqu'il dépend uniquement de la résistance de l'air. En général, on trouve une notable différence entre les valeurs que fournit l'observation et celles qui sont déterminées par le calcul. Pour le plan, les résultats des expériences sont en contradiction complète avec le calcul, et tous les calculs reposent au fond sur l'exactitude des hypothèses faites pour le plan.

En effet, tandis que, dans les hypothèses admises, le point d'application de la résistance de l'air doit toujours être au centre de gravité de la surface plane, on trouve expérimentalement, pour des angles différents du plan avec la direction du mouvement, des positions différentes, variant d'une manière continue, pour le point d'application. M. Kummer voit la cause de ces phénomènes dans la production de courants d'air devant la surface du corps en mouvement; ils sont cause que, pour une inclinaison de l'axe longitudinal du corps, oblique par rapport à la direction du mouvement, la partie antérieure se trouve avoir à supporter une pression plus forte que la partie postérieure. En pratiquant des ouvertures dans les plans soumis aux expériences, il donne à cette explication un grand caractère de vraisemblance.

Le complément de 1876 justifie, au moyen d'expériences nouvelles, quelques chiffres du premier travail qui se rapportent aux surfaces planes rectangulaires.

Comme résultat pratique intéressant, on voit qu'une girouette qui présente des deux côtés de l'axe de rotation des surfaces sur lesquelles agissent les courants du vent ne se place pas en général parallèlement à la direction du vent mais fait avec elle un angle qu'il faut déterminer pour chaque girouette en particulier et qui peut se produire de deux côtés différents. Par exemple, un rectangle de 180 millimètres de longueur et de 90 de largeur, qui tourne autour d'un axe situé à 60 millimètres du plus petit côté, fait un angle de 23 degrés avec la direction du vent. E. L.

NÖTHER (M.). — Ueber die singulären Werthsysteme einer algebraischen Function und die singulären Punkte einer algebraischen Curve (¹).

Soit (a, b) un point singulier d'une courbe algébrique

$$(1) \qquad f(x,y)=0,$$

en sorte que l'on puisse faire

$$f(x,y)=f_k(x-a, y-b)+f_{k+1}(x-a, y-b)+\ldots,$$

$f_k(x-a, y-b), f_{k+1}(x-a, y-b), \ldots$ étant des fonctions homogènes en $x-a, y-b$, dont le degré est marqué par l'indice; supposons que $x-a$ n'entre pas en facteur dans $f_k(x-a, y-b)$; en employant la substitution

$$y_1=\frac{y-b}{x-a},$$

l'équation proposée deviendra

$$(2) \qquad f_k(1, y_1)+(x-a)f_{k+1}(1, y_1)+\ldots=0.$$

Si, par exemple, l'équation

$$f_k(1, y_1)=0$$

admet k racines distinctes $b_1, b_2, \ldots, b_k$, les points $(a, b_1), (a, b_2), \ldots$ de la courbe (2), qui répondent au point singulier (a, b) de la courbe (1), seront des points simples. Si, b_1 étant une racine multiple de l'équation $f_k(1, y_1)=0$, le point (a, b_1) est un point singulier de la courbe (2), on pourra employer une substitution de la forme

$$y_2=\frac{y_1-b_1}{x-a}$$

ou de la forme

$$x_1=\frac{x-a}{y_1-b_1}, \text{ etc.}$$

(¹) *Mathematische Annalen*, t. IX, 1875.

Consultez sur ce sujet les travaux des auteurs suivants : Hamburger, *Ueber die Entwicklung algebr. Functionen in Reihen*. (*Zeitschr. für Mathem. u. Phys.*, XVI, 1871). — Königsberger, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen*. — Brill u. Nöther, *Ueber die algebr. Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie*. (*Math. Annalen*, t. VII). — Nöther, *Ueber die eindentigen Ebenentransformationen*. (*Math. Annalen*, t. V). — Stolz, *Ueber die singul. Punkte der algebr. Functionen und Curven*. (*Math. Annalen*, t. VIII). — De la Gournerie, *Comptes rendus*, 1873. — Darboux, *Comptes rendus*, 1874, etc.

De cette façon, on parviendra, après un nombre fini d'opérations, à une substitution finale de la forme

$$x_1 = \frac{\varphi(x,y)}{\chi(x,y)}, \quad y_1 = \frac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)},$$

par laquelle l'équation $f(x,y) = 0$ se transformera en une autre $f^{(1)}(x,y) = 0$, de façon que les points de la seconde courbe qui correspondent au point singulier (a, b) de la première soient des points simples de la seconde.

L'importance du travail de M. Nöther consiste dans l'application qu'il donne de cette méthode à la définition précise des différents points singuliers, définition qui se trouve mise en rapport avec le rôle que jouent ces points analytiquement ou géométriquement.