Bulletin des sciences

mathématiques et astronomiques

Revue bibliographique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 11 (1876), p. 97-114

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1876__11__97_0>

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

HATTENDORFF (KARL). — SCHWERE, ELECTRICITÄT UND MAGNETISMUS, NACH DEN VORLESUNGEN VON BERNHARD RIEMANN (¹). — 1 vol. in-8°. Hannover, 1876.

Les physiciens désiraient depuis longtemps la publication d'un livre vraiment classique, où l'on pût étudier la théorie de l'électricité. Les leçons de Riemann donneront pleine satisfaction à leur vœu. Il y trouveront réunies, sous un faible volume, toutes les notions essentielles qu'ils étaient obligés de chercher dans des ouvrages de longue haleine, comme celui de Clerk Maxwell, et cela sous une forme plus claire, plus méthodique que dans aucun des Traités qui sont entre leurs mains. L'auteur, mathématicien avant tout, écarte de la rédaction de son livre toute préoccupation relative à la théorie des instruments ou des méthodes de mesure. Ces questions, d'un intérêt essentiellement pratique, se trouvent suffisamment traitées ailleurs pour qu'on n'ait pas à regretter leur suppression. La rédaction y gagne même d'être beaucoup plus vivante et le lecteur peut plus aisément embrasser d'un coup d'œil l'ensemble de ces questions difficiles.

M. Hattendorff nous offre les Leçons professées par Riemann à l'Université de Göttingue, pendant le semestre d'été de 1861. En dehors de quelques notes assez courtes, l'auteur n'a pas laissé de manuscrit sur ce sujet. L'éditeur se déclare seul responsable pour la disposition et la rédaction de l'Ouvrage. Malgré quelques redites que l'on aurait peut-être pu éviter sans nuire à la clarté, M. Hattendorff a droit à toutes nos félicitations pour la manière dont il a accompli sa tâche.

« L'accueil favorable fait par les savants compétents à ma publication des leçons de Riemann sur les équations aux différences partielles », nous dit-il dans une courte préface, « me fait espérer que le nouveau livre trouvera grâce auprès des amis de Riemann, et des personnes qui se livrent à l'étude des Mathématiques.

» Comme pour les équations aux différentielles partielles, nous

---

(¹) Gravitation, électricité et magnétisme, d'après les leçons de Bernard Riemann, publié par Karl Hattendorff.

devons aussi beaucoup à Lejeune-Dirichlet dans le sujet actuel. Au nombre des services qu'il a rendus à la Science, il ne faut pas oublier que c'est à lui que l'on doit d'avoir introduit dans les Universités allemandes l'étude des équations différentielles et du potentiel. Les matières qu'il a traitées dans ses Leçons constituent encore aujourd'hui une part essentielle de nos programmes d'enseignement.

» Venu après Dirichlet, Riemann a dû nécessairement lui emprunter beaucoup. Cependant il ne s'est pas borné à recueillir l'héritage de son illustre devancier. Le lecteur compétent trouvera qu'il y a ajouté beaucoup du sien. »

Ce serait rendre un vrai service aux personnes qui s'intéressent à la Physique mathématique de leur faire connaître, par le détail, les matières traitées dans ce Volume. Obligé de nous borner au plus essentiel, nous tâcherons d'insister plus particulièrement sur les parties originales de l'œuvre de Riemann, ou sur les points qui sont les moins connus en France.

Les Leçons de Riemann sont divisées en deux Parties. Dans la première, l'auteur étudie les lois générales relatives à la *fonction potentielle* et au *potentiel*. Dans la seconde, il expose les données physiques de la science de l'électricité et du magnétisme, et il apprend à former les équations générales qui résolvent les problèmes fondamentaux, relatifs à chaque subdivision de ces sciences.

Nous insisterons peu sur la première Partie. Les matières que l'on y traite ont été récemment vulgarisées par la publication d'un certain nombre d'Ouvrages élémentaires et sont assez connues des physiciens français [1]. Nous y relèverons cependant plusieurs points dignes de fixer l'attention.

La fonction potentielle $V = \Sigma \frac{m}{r}$ [2], et ses dérivées du premier et du second ordre font l'objet du premier Chapitre de la première Partie. On y remarque l'étude approfondie du cas où la masse attractive est répandue sur une surface, ou distribuée le long d'une courbe. Dans le premier cas, et quand le point attiré est situé sur

(1) Signalons le Livre de Clausius : *Die Potentialfunction und das Potential*, traduit par Folie (in-8°; 1870. — Paris, Gauthier-Villars), et l'excellent *Traité d'électricité statique* de M. Mascart.

(2) Appelée le plus souvent en France *le potentiel* ou *premier potentiel*.

la surface attirante, les dérivées premières de la fonction potentielle présentent d'intéressantes particularités. La dérivée $\frac{\partial V}{\partial s}$, prise par rapport à un déplacement situé dans le plan tangent, possède une valeur finie et déterminée, infiniment peu différente de celle qui convient à un déplacement parallèle pour un point extérieur, très-voisin de la surface; cependant la composante tangentielle de l'attraction est absolument indéterminée. Au contraire, pour un déplacement normal à la surface, la dérivée $\frac{\partial V}{\partial p}$ est indéterminée, et l'on a, en désignant par ρ la densité de la matière attractive au point considéré de la surface,

$$(1) \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{-0} = -4\pi\rho;$$

cependant la composante normale de l'attraction garde une valeur déterminée. Cet exemple est bien choisi pour montrer qu'il n'est pas permis dans tous les cas de confondre les dérivées de la fonction potentielle et les composantes de l'attraction.

Le deuxième Chapitre, intitulé : *Loi de Green,* contient l'exposé de la méthode générale donnée par Green pour former l'expression du potentiel en un point quelconque intérieur à une surface fermée T, quand on donne sa valeur en tous les points de cette surface, et que l'on connaît dans l'intérieur de T la valeur que prend en chaque point la somme $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$. Après avoir exposé les cas particuliers de l'ellipsoïde et du cylindre elliptique homogènes, enfin d'une sphère hétérogène, l'auteur étudie les propriétés générales de la fonction auxiliaire U introduite par Green. Dans son *Essai sur l'application de l'Analyse mathématique aux théories de l'électricité et du magnétisme,* l'illustre analyste n'établit pas que, pour chaque forme particulière de l'espace S compris dans la surface T, il existe une fonction U et une seule satisfaisant aux conditions imposées. Il s'en rapporte simplement à la signification physique de la fonction U : « Pour nous convaincre », dit-il, « qu'il existe une fonction V telle que nous l'avons admise, concevons que la surface S soit un conducteur parfait en relation avec la terre, et qu'une unité d'électricité positive se trouve concentrée au point p'; alors la fonction potentielle totale produite par p' et par l'électricité induite sur la surface sera la valeur cherchée de U. » Gauss a comblé cette lacune de la théorie de Green, mais la preuve qu'il fournit n'est pas purement analytique : sa forme est empruntée à la théorie même de la fonction potentielle. Enfin Dirichlet a donné une démonstration purement analytique; Riemann la reproduit et l'applique plus tard au potentiel électrodynamique.

Il termine en démontrant que la fonction V qui obéit à l'équation de Laplace n'a ni maximum ni minimum.

Le potentiel [1] forme l'objet du troisième et dernier Chapitre. L'auteur établit que, quand les composantes X, Y, Z de la force agissant au point dont les coordonnées sont x, y, z sont les dérivées partielles d'une même fonction mV qui ne dépend directement que des coordonnées (et par suite ne contient pas la variable t d'une manière explicite), la variation de la force vive correspondant à un déplacement quelconque est égale à la variation de la fonction mV. C'est le principe de la conservation de la force vive pour un point matériel. Le même principe s'applique sous les mêmes conditions à un système quelconque de points, libre ou non. La fonction P, dont la variation représente le travail élémentaire, est le potentiel. Elle jouit de cette propriété, que sa valeur est égale au travail produit par le transport de tous les points du système depuis l'infini jusqu'à leurs positions actuelles, indépendamment du chemin suivant lequel s'est opéré le transport. Cette propriété peut, si l'on veut, servir de définition au potentiel. On verra, par la suite, comment la notion de potentiel est susceptible d'être étendue, quand les composantes des forces agissantes sont fonctions des vitesses de tous les points du système.

Les généralités précédentes suffisent pour permettre d'aborder les problèmes soulevés par l'étude de la gravitation. Nous allons voir, dans la seconde Partie de l'Ouvrage, comment on les adapte aux besoins spéciaux d'autres branches de la Science. Comme premier exemple, nous analyserons succinctement le Chapitre *Électrostatique*.

Après avoir défini les corps conducteurs et non conducteurs et énoncé la loi de Coulomb, l'auteur pose ainsi le problème général

---

[1] Appelé quelquefois *second potentiel*.

à résoudre : *Étant donnés un certain nombre de corps isolants dans lesquels la distribution électrique est connue, et en outre k conducteurs dont les charges respectives sont m_1, m_2, ..., m_k, on demande de déterminer la distribution électrique sur ces conducteurs quand le système est en equilibre.*

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_k$ les valeurs constantes de la fonction potentielle V à l'intérieur des k conducteurs à l'état d'équilibre. Soit de plus u_1 une fonction de x, y, z qui dans tout l'espace obéit à la loi de Laplace

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} = 0, \tag{2}$$

et dont la valeur à la surface et dans l'intérieur du premier conducteur soit égale à 1 ; soient $u_2, u_3, \ldots, u_k$ les fonctions analogues pour les autres conducteurs. Alors la différence

$$\mathrm{V} - (a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_k u_k) = w \tag{3}$$

est une fonction nulle à l'intérieur et à la surface de tous les conducteurs, qui en tous les points extérieurs aux corps isolants obéit à l'équation de Laplace, et qui, dans l'intérieur des isolants, donne la densité électrique par la même relation que la fonction potentielle V. On a

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial p} = a_1 \frac{\partial u_1}{\partial p} + a_2 \frac{\partial u_2}{\partial p} + \ldots + a_k \frac{\partial u_k}{\partial p} + \frac{\partial w}{\partial p}. \tag{4}$$

Prenons maintenant l'intégrale ([1])

$$\frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial p}\right)_{+0} d\sigma_q = \int \rho \, d\sigma_q,$$

étendue à la surface entière du neuvième conducteur, et posons, pour abréger,

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{\partial u_i}{\partial p}\right)_{+0} d\sigma_q &= \mu_{qi}, \\ \frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_{+0} d\sigma_q &= \nu_q. \end{aligned} \right. \tag{5}$$

([1]) On a $\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_{-0} = 0$, puisque dans l'intérieur du conducteur la force agissante est nulle. Par suite, d'après (1), $\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_{+0} = 4\pi\rho$, puisqu'il s'agit de forces répulsives.

Les équations (1) deviennent

$$(6)\quad \begin{cases} m_1 = \mu_{1,1}a_1 + \mu_{1,2}a_2 + \ldots + \mu_{1,k}a_k + \nu_1, \\ m_2 = \mu_{2,1}a_1 + \mu_{2,2}a_2 + \ldots + \mu_{2,k}a_k + \nu_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ m_k = \mu_{k,1}a_1 + \mu_{k,2}a_2 + \ldots + \mu_{k,k}a_k + \nu_k; \end{cases}$$

ce sont les équations générales du problème. On démontre que l'on a, en général,

$$\mu_{i,q} = \mu_{q,i},$$

et l'on trouve sans peine la signification physique des diverses constantes contenues dans les équations (6). Il ne reste plus qu'à les résoudre par rapport aux inconnues a_1, a_2, ...

Riemann choisit ensuite comme exemple le cas de deux sphères, traité d'abord mathématiquement par Poisson et plus tard par Plana, et géométriquement par W. Thomson. La méthode qu'il emploie est toute personnelle. Elle est, en quelque sorte, la traduction analytique de la méthode des images électriques de Thomson. On sait que l'image électrique d'un point P extérieur à une sphère du rayon a et situé à une distance r du centre, est un point P situé sur le rayon qui aboutit en ce point, et tel que sa distance r' au centre est donnée par la relation

$$rr' = a^2.$$

La propriété physique qui les caractérise est la suivante. Soit une unité d'électricité en P, et la sphère en communication avec le sol; la distribution électrique produite par induction sur la sphère peut être remplacée, au point de vue de son action à l'extérieur, par une charge $\frac{a}{r}$ supposée concentrée au point P'. On démontre aisément que l'image électrique d'une sphère A dans une sphère B extérieure à A est une sphère C intérieure à B; de même l'image de C dans A est une sphère intérieure à A, et ainsi de suite.

Le principe de la méthode de Riemann consiste à chercher quelles sont les charges qu'il faudrait supposer appliquées aux centres des deux sphères et à leurs images électriques en nombre infini, pour produire, à l'extérieur des deux sphères, la fonction potentielle résultant de leurs charges réelles. Le problème ainsi posé est, *a* *priori*, susceptible d'une solution unique et parfaitement déterminée, puisque toutes les images considérées sont intérieures à l'une ou à l'autre sphère, et que si la fonction V est variable et contenue à l'extérieur des deux conducteurs sphériques, et prend réellement, à partir de leur surface interne, deux valeurs constantes g et h, rien ne s'oppose à ce que l'on prolonge la fonction potentielle à l'intérieur de ces conducteurs en la laissant variable et continue, sauf en des points déterminés, et d'après telle loi que l'on voudra. Convenons que, si la fonction potentielle a pour valeur V' en un point quelconque extérieur P, elle aura pour valeur V'_1 au point P qui est son image dans la sphère A,

$$(7) \quad (V'_1 - g) = -\frac{r}{a}(V' - g), \quad \text{et} \quad (V'_1 - h) = -\frac{r}{b}(V' - h),$$

au point qui est son image dans la sphère B. A chaque point intérieur correspond une valeur définie de V'_1, sauf aux points contenus dans l'image de la sphère (2) dans la sphère (1), et de même dans l'image de la sphère (1) dans la sphère (2); V'_1 est d'ailleurs infini au centre de chaque sphère [1], où l'on devra, par conséquent, supposer placée une première masse électrique. A l'aide de V'_1 on continuera la formation de la fonction potentielle dans les images de premier ordre, à l'exception des points contenus dans les images de deuxième ordre et ainsi de suite; et à chaque centre la fonction potentielle se trouvera infinie et l'on devra supposer placée une nouvelle masse électrique.

Toute l'analyse qui suit consiste à déterminer les coordonnées et les charges des images successives. Quand on les a obtenues, et par suite qu'on a l'expression de la fonction potentielle V', on n'a pas de peine à exprimer la densité électrique en chaque point de la surface des deux sphères.

Le Chapitre II de la seconde Partie est l'exposition de la théorie des courants de Kirchhoff [2], qui conduit pour les courants linéaires constants aux lois de Ohm et de Joule.

Le Chapitre III est plus intéressant. Après avoir énoncé la loi

---

[1] Le centre d'une sphère est l'image des points situés à l'infini.

[2] *Voir* Verdet, *Théorie mécanique de la chaleur*, tome II.

élémentaire des actions magnétiques, l'auteur admet comme principe démontré par l'expérience que les actions magnétiques exercées par un courant obéissent, extérieurement au courant lui-même, aux mêmes lois que si elles provenaient de masses magnétiques, sur la situation desquelles, d'ailleurs, on ne préjuge rien. Il donne ensuite à la fonction potentielle des actions électromagnétiques une forme particulière sous laquelle elle est susceptible de deux interprétations remarquables, l'une mécanique, l'autre géométrique.

1° Limitons une surface courbe quelconque au contour du conducteur linéaire du courant, et fermons-la en lui adjoignant une deuxième surface parallèle à la première et infiniment voisine. On peut remplacer le courant d'intensité I, au point de vue de son action électromagnétique, par deux distributions magnétiques de signe contraire et de densité $\frac{I}{\delta}$, recouvrant les deux faces de la surface S; δ est la distance constante de ces deux faces.

2° La valeur de la fonction V en un point P, extérieur au courant, est égale à l'angle solide sous-tendu en ce point par le courant, multiplié par l'intensité I. Ce produit doit être affecté du signe + si, pour l'observateur placé en P, le sens du courant est le sens de la marche des aiguilles d'une montre, et du signe — si c'est le sens contraire.

Cette dernière interprétation de l'expression de la fonction V permet de la transformer en une intégrale dont l'élément différentiel contient en facteur la longueur $d\rho$ de l'élément de courant. Les dérivées par rapport à x, y, z de cet élément d'intégrale doivent représenter les composantes de l'action électromagnétique de l'élément de courant. On obtient ainsi la loi élémentaire connue des actions électromagnétiques.

On peut maintenant, à l'aide de l'interprétation mécanique de V développée ci-dessus, remplacer un courant par un aimant, et inversement, et l'on formera sans peine l'expression du potentiel électrodynamique. Il suffit alors de lui donner la forme d'une intégrale dont l'élément contient en facteur les longueurs ds et $d\rho'$ de deux éléments appartenant respectivement aux deux courants que l'on considère, et leurs intensités I et I', pour que cet élément d'intégrale représente le travail élémentaire correspondant à l'action réciproque des deux éléments de courant. On obtient ainsi la loi d'Ampère. Toute cette analyse est extrêmement intéressante.

Le Chapitre IV, relatif à l'induction, est d'une concision et d'une netteté remarquables. L'auteur démontre en peu de mots la nécessité des phénomènes d'induction. S'attachant ensuite au cas de l'induction voltaïque, il en établit la loi par les considérations suivantes :

Le potentiel P, relatif à deux courants constants d'intensité I et I', peut être mis sous la forme

$$P = -II'Q, \tag{8}$$

Q étant un facteur qui ne dépend que des positions relatives des deux courants. Le travail élémentaire électrodynamique correspondant à un déplacement infiniment petit des conducteurs est

$$-II'\frac{dQ}{dt}dt.$$

Admettons que cette expression représente toujours ce travail élémentaire, même quand I et I' sont variables. Cela exige d'abord que I et I' varient d'une manière continue.

Jusqu'ici nous avons appelé *potentiel* une fonction dépendant des coordonnées, et dont l'expression ne contient pas la variable t d'une manière explicite, telle que sa variation représente le travail accompli par une déformation quelconque du système. L'existence de cette fonction P est l'expression même de la loi de la conservation de la force vive.

Nous allons étendre la notion de potentiel à une fonction des coordonnées de tous les points d'un système *qui dépend aussi des vitesses de tous les points,* mais qui ne contient pas le temps d'une manière explicite. Dans ces conditions, le principe de la conservation de la force vive est encore applicable.

Il est aisé de voir que le travail électrodynamique

$$-\int_0^t II'\frac{dQ}{dt}dt$$

est une fonction explicite du temps, puisque I et I' sont des fonctions quelconques de cette variable. Le travail électrodynamique correspondant à des courants d'intensité variable n'admet donc pas de potentiel, même dans l'acception étendue que nous venons de donner à cette expression. Si ce travail était le seul produit, le principe de la conservation de la force vive ne serait pas applicable aux phénomènes électriques.

Mais nous avons reconnu la nécessité d'admettre la production d'un travail électromoteur, pour expliquer les phénomènes d'induction. Nous allons déterminer ce travail par la condition que le travail total admette un potentiel, c'est-à-dire que le principe de la conservation de la force vive soit applicable aux phénomènes qui nous occupent. Il faut, pour cela, que l'élément d'intégrale représentant la somme du travail élémentaire électrodynamique et électromoteur soit une différentielle complète. Au terme $II'\frac{dQ}{dt}\,dt$, il faut ajouter les deux termes $I\frac{d(I'Q)}{dt}\,dt + I'\frac{d(IQ)}{dt}\,dt$. Cette somme est la différentielle de $II'Q$, et le potentiel est $-II'Q$. Le premier des deux nouveaux termes représente le travail électromoteur dans le conducteur du courant d'intensité I'; le second, le travail dans le conducteur du courant d'intensité I. Cette expression du travail électromoteur fournit l'énoncé de la loi de l'induction donnée par Neumann.

J'insisterai encore sur le Chapitre suivant, dont le titre est : *Loi fondamentale des actions électriques*. L'auteur, après avoir développé sous la forme complète le potentiel de l'action réciproque de deux courants, en tenant compte de l'induction, démontre que dans ce cas l'expression du travail élémentaire ne détermine pas complétement les forces motrices. On peut donc admettre plusieurs lois élémentaires différentes conduisant à la même expression du travail total. L'auteur en donne deux : l'une due à Weber, l'autre qui lui est propre.

Weber [1] admet pour le potentiel élémentaire l'expression

$$-\frac{\varepsilon\varepsilon'}{r}\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right],$$

où r représente la distance des deux particules électriques de masses ε et ε', et $\frac{c}{\sqrt{2}}$ la quantité par laquelle il faut multiplier l'unité

---

(1) WEBER, *Elektrodynamische Maassbestimmungen*, Theil 1.

électrostatique d'électricité pour obtenir l'unité électromagnétique. La loi élémentaire correspondante est représentée par

$$(9) \qquad \frac{\varepsilon\varepsilon'}{r^2}\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{2r}{c}\frac{d^2r}{dt^2}\right].$$

Riemann admet, pour la forme du potentiel élémentaire l'expression

$$-\frac{\varepsilon\varepsilon'}{r}\left\{1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz_1}{dt}\right)^2\right]\right\},$$

dans laquelle (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) sont les coordonnées des deux particules électriques au temps t. Les composantes de la force élémentaire sont alors

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{X} = {} & \frac{\varepsilon\varepsilon'}{r^2}\frac{dr}{dx} + \frac{\varepsilon\varepsilon'}{c^2}\,\frac{d\left[\frac{2}{r}\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right)\right]}{dt} \\ & + \frac{\varepsilon\varepsilon'}{c^2}\frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz_1}{dt}\right)^2\right], \end{aligned} \right.$$

et pour Y et Z les expressions analogues.

En l'absence d'expériences directes sur l'électricité en mouvement, on ne peut se décider pour une forme ou une autre que par des considérations d'ordre purement analytique. La loi élémentaire de Riemann conduit, soit pour l'action de toutes les particules ε' sur une particule ε, soit pour le mouvement de la particule ε, à des équations différentielles plus simples. Les deux lois élémentaires se réduisent d'ailleurs à la loi de Coulomb quand on suppose les particules électriques immobiles, et conduisent également à la loi d'Ampère quand on néglige la portion du potentiel fournie par les phénomènes d'induction.

Le dernier Chapitre relatif au magnétisme terrestre contient l'exposé de la méthode de Gauss (¹) pour le développement de la fonction potentielle de l'aimant terrestre en série de fonctions sphériques, et pour l'évaluation approchée de cette fonction d'après une série d'observations de la déclinaison, de l'inclinaison et de l'intensité magnétiques en un certain nombre de lieux.

(¹) *Voir* VERDET, *Conférences de Physique* faites à l'École Normale.

GÜNTHER (Dr Siegmund). — VERMISCHTE UNTERSUCHUNGEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN, mit in den Text gedruckten Holzschnitten und 4 lith. Tafeln. — Leipzig, Teubner, 1876, VIII-352 p. in-8°. Prix : 9 Mark.

M. S. Günther, privat-docent à l'École Polytechnique de Munich, s'est déjà fait connaître au public, par un excellent Manuel de la théorie des déterminants [1] et par plusieurs articles, relatifs à l'histoire des Mathématiques, qui ont paru dans divers recueils. Le nouvel Ouvrage qu'il vient de publier contient sept nouvelles monographies qui, comme les précédentes, sont des matériaux tout prêts, pour le savant qui voudra enfin écrire une histoire des Mathématiques digne de ce nom. Voici un aperçu sommaire des matières contenues dans le Livre de M. Günther, qu'il dédie, avec juste raison, au prince B. Boncompagni.

I. *Les polygones et les polyèdres étoilés depuis la Renaissance.* (p. 1-92.) — L'auteur donne d'abord le résumé de son histoire des polygones étoilés avant la Renaissance, qui a été publié dans le tome VI du *Bullettino* de M. Boncompagni ; ensuite il analyse les travaux de Lucas de Borgo, Bouvelles, Barbaro, Peletier, Clavius, Ramus, Paracelse, Alstedius, Kircher, Schwenter, Broscius, Kepler et Jamnitzer. Entre ces divers auteurs, il faut surtout distinguer, Girard, Broscius, Jamnitzer et Kepler. Le premier a fait une classification de toutes les formes polygonales à quatre, cinq, six côtés que M. Günther explique probablement pour la première fois ; le second, en voulant réfuter Ramus, a fait une étude assez approfondie des polygones étoilés ; Jamnitzer a dessiné un polyèdre étoilé, et Kepler en a donné deux autres, en les considérant explicitement comme des polyèdres étoilés, contrairement à une opinion généralement admise en France.

Au XVIIIe siècle, il faut citer parmi ceux qui s'occupent des polygones et des polyèdres, étoilés ou non, Meister, Lhuilier, Lexell, Euler ; au XIXe siècle, Gauss, Möbius, Poinsot, qui trouve deux nouveaux polyèdres réciproques de ceux de Kepler (Poinsot cite Kepler, mais il ne semble pas l'avoir lu), Cauchy, qui prouve qu'il n'y a que quatre polyèdres réguliers étoilés,

(1) Voir *Bulletin*, t. X, p. 131.

Krause, Schröder, Jacobi, Hermes, Bertrand, Cayley, Wiener. M. Günther remarque, avec beaucoup de justesse, que ce n'est qu'au XIX^{e} siècle qu'un travail systématique comme celui de Poinsot était possible, parce qu'il suppose certains progrès de la théorie des nombres qui datent de la fin du XVIII^{e} siècle. [Il ne cite pas le travail de Catalan sur les polyèdres semi-réguliers (*Journal de l'École Polytechnique,* Cahier XLI).

II. *Fractions continues ascendantes* (p. 93-136). *Définition.* — Elles comprennent les fractions décimales et sexagésimales : ainsi $4^{j}\,2^{h}\,4^{m}\,6^{s} = 4\frac{2}{24}^{+\frac{4}{60}^{+\frac{6}{66}}}$ jours. Hébreux, Grecs, Romains, Égyptiens, Indiens, Babyloniens, Ptolémée, Théon, Barlaam, Planudes, Alkasaldi, Léonard de Pise, Jean de Séville, Arzachel, Regiomontanus, Cardan, Buckley, Stevin, Prætorius, Lagrange, Lambert, Druchenmüller, Kunze, Hess, Scklömilch, Günther. Notes. Cette monographie, sur un sujet peu connu, contient maints détails curieux sur l'histoire du calcul décimal.

III. *Le parallélogramme de Newton et la règle de Cramer et Puiseux* (p. 136-187). — Newton a indiqué, le premier, une règle mécanique pour déterminer l'espèce d'un point singulier d'une courbe algébrique. Clebsch, dans sa Notice sur Plücker, a attribué cette règle à Cramer, et a fait remarquer qu'elle est identique avec celle de Puiseux. M. Günther a cru intéressant de faire l'histoire complète de ce procédé célèbre. Newton énonce sa règle sans démonstration et il croit qu'il est à peine nécessaire d'en donner une. Les commentateurs Colson, s'Gravesande, Stirling exposent plus au long la règle du grand géomètre ; mais ce sont Kästner et surtout Cramer qui, les premiers, la démontrent tout au long. Parmi ceux qui ont connu et employé la règle de Newton, on doit citer particulièrement Taylor et Lagrange, le dernier sous une forme purement analytique. (Soit dit en passant, ce point est signalé dans le *Cours d'Analyse* de M. Hermite, p. 31, note.) Les recherches de Puiseux, cent ans après Cramer, ont rappelé l'attention sur le parallélogramme, d'autant que la théorie des fonctions abéliennes touche de très-près à celle des courbes algébriques, ou plutôt se confond avec elle.

IV. *Études historiques sur les carrés magiques* (p. 188-270). — On ignore si les carrés magiques sont d'origine indienne comme le dit La Loubère. Les astrologues arabes connaissaient ces carrés jusqu'à 9^2; ils les inscrivaient sur des talismans consacrés aux planètes d'où le nom de *carrés planétaires*. L'un des deux, Moschopule, auteur byzantin de la fin du moyen âge, écrivit sur les carrés magiques un Traité dont M. Günther publie, pour la première fois, le texte grec (p. 196-208). Dans le grand nombre d'auteurs dont il parle ensuite (Dürer, Agrippa, Paracelse, Théophraste, Riese, Stiefel, Schwenter, Spinola, Henisch, Roth, Lochner, Faulhaber, Remmelin), il faut distinguer Riese, qui trouva un procédé général pour les carrés à racine paire, et Stiefel qui fit connaître le moyen de construire les carrés magiques par enceintes. Au XVII^e et au XVIII^e siècle, nous citerons, parmi un grand nombre d'autres indiqués par M. Günther, Bachet de Meziriac qui trouve la méthode par terrasses; Frenicle, qui montre que le carré de 4^2 éléments peut être formé de 880 manières (Fermat, lettres à Mersenne, est oublié), la Hire et Poignard, Sauveur, D'Ons-en-Bray et Rallier des Ourmes, qui épuisent en quelque sorte la question des carrés magiques, telle qu'elle était posée de leur temps. Au XIX^e siècle, Mollweide, Hohndell, Zuckermandell, Hugel et Pessl, en Allemagne, ont étudié sous une forme nouvelle ou plus systématique la formation de ces curieuses figures arithmétiques. En Angleterre, Horner, Drach, Thomson (Frost, Holditch) ont fait aussi des recherches sur le même sujet. Dans le cours de cette étude historique, M. Günther complète souvent les travaux qu'il analyse en donnant la démonstration des règles trouvées inductivement par divers auteurs.

V. *Sur l'histoire des logarithmes* (p. 271-290). — 1° Montucla et après lui beaucoup d'auteurs modernes confondent les logarithmes hyperboliques et les logarithmes népériens. M. Günther montre que cette erreur a été souvent réfutée, tant au siècle passé que de notre temps; il fait l'historique de cette réfutation et conclut comme suit : Neper n'avait pas l'idée de base d'un système de logarithmes, et la base implicite de son système n'était pas e. 2° Sur une méthode d'interpolation logarithmique de Jean Bernoulli III. 3° A. de Humboldt, dans sa jeunesse, Joseph Muschel de Moschau, Wolf, Hermann et Delambre ont proposé, sous une forme trigonométrique, des méthodes de calcul de $\log(a \pm b)$, au moyen de $\log a$, $\log b$, assez analogues à celles de Leonelli (*voir* encore un écrit très-curieux de Delambre, dans l'édition de Leonelli publiée récemment par M. Hoüel.)

VI. *Sur le calendrier juif* (p. 291-307). — Rectification d'une assertion historique de Littrow.

VII. *Histoire des horloges à pendule avant Huygens* (p. 308-344). Cette Notice est une nouvelle édition complétement remaniée d'une monographie antérieure de M. Günther, publiée dans les *Bulletins de la Société physico-médicale* d'Erlangen (6e cahier, p. 12 et suiv.). Il examine soigneusement le parti que Galilée, Bürgi et Hevelius ont tiré de l'isochronisme du pendule pour la mesure du temps et prouve qu'en réalité le vrai inventeur des horloges à pendule est Huygens (M. Günther écrit toujours Huyghens, à tort, d'après M. Chasles, *Rapport sur les progrès de la Géométrie*, p. 48) (¹).

L'Ouvrage se termine par un *Index nominum* (p. 345-350) très-soigné, et deux pages d'additions et de corrections.

P. MANSION.

ESCHERICH (G. VON). — DIE GEOMETRIE AUF DEN FLÄCHEN CONSTANTER NEGATIVER KRÜMMUNG. (*Sitzungsberichte der K. Akademie der Wissenschaften zu Wien*, LXIX. Bd., 1874.)

L'auteur étudie directement, d'après la méthode de Gauss, la Géométrie des surfaces à courbure constante négative, laquelle coïncide, on le sait, avec la Géométrie du plan établie dans l'hypothèse non-euclidienne de Lobatchefsky et de Bolyai.

Après avoir retrouvé les relations connues entre les éléments d'un triangle, ainsi que l'expression de son aire, l'auteur introduit un système de coordonnées, analogue à celui que Gudermann a employé pour la sphère, et au moyen duquel il arrive assez rapidement à l'équation de la ligne géodésique et à la distance de deux points donnés par leurs coordonnées. La ligne géodésique ayant une équation linéaire, ce système doit coïncider avec celui de M. Beltrami (²), ce qui est, en effet, facile à vérifier directement.

(¹) L'emploi du *gh* correspond à l'ancienne orthographe néerlandaise en usage au XVIIe siècle. Aujourd'hui on écrirait *Huijgens*. On sait d'ailleurs quelle indécision régnait à cette époque sur la manière d'ecrire les noms propres. (J. H.)

(²) *Saggio d'interpretazione della Geometria non euclidea.*

Il est facile aussi de transformer la méthode de M. von Escherich, de manière à la rendre applicable aux trois dimensions, les droites remplaçant naturellement alors les lignes géodésiques, et cette transformation peut offrir une certaine utilité, comme moyen d'arriver le plus simplement possible à comprendre toute la partie *géométrique* des travaux de l'illustre géomètre italien cité plus haut.

La Géométrie analytique des surfaces à courbure constante négative, au moyen des coordonnées admises et de l'équation linéaire de la géodésique, est poussée plus loin ici que dans d'autres Ouvrages. Nous citerons, par exemple, le calcul de l'angle de deux géodésiques, celui des éléments linéaire et superficiel; les équations générales des tangentes et des normales, la détermination du rayon de courbure, enfin la discussion générale des courbes représentées, sur les surfaces en question, par des équations du second ordre.

Le Mémoire se termine par l'étude des propriétés projectives des figures, qui se conservent dans la Géométrie abstraite, ou, ce qui revient au même, dans toutes les surfaces à courbure constante. Cette étude est facilitée par le système de coordonnées employé, lequel permet la représentation de tous les points d'une surface à courbure constante au moyen des points d'un plan qui leur correspondent, c'est-à-dire qui ont les mêmes coordonnées, chaque droite du plan correspondant aussi à une ligne géodésique de la surface; ou, plus généralement, chaque ligne du plan correspondant à une ligne de même ordre dans la surface.

Ce mode de *correspondance,* dont l'idée n'est pas entièrement neuve, est simple et naturel, et l'on en conçoit *a priori* tous les avantages. Nous nous bornerons à faire observer :

1° Qu'il conduit à distinguer, lorsqu'il s'agit de l'intersection de deux lignes, les points de rencontre réels des points imaginaires et des points idéaux, ces derniers répondant au cas où les lignes analogues dans le plan se rencontrent, mais en un point qui n'a pas de correspondant sur la surface donnée.

2° Que les raisonnements présentés ici en général pour les surfaces à courbure négative peuvent être facilement transformés de manière à s'appliquer à la sphère; l'étude de la géométrie abstraite aura donc fait progresser non-seulement la Géométrie des pseudosphères, mais aussi celle de la surface sphérique elle-même.

J. D. T.

РОМЕРЪ (П.).— *Основныя начала метода кватерненовъ*. Кіевъ, въ университетской типографіи; 1868. Цѣна 2 руб. сереб. ([1]).

Cet Ouvrage, dont nous devons la connaissance à une obligeante communication de M. Imchenetsky, contient une exposition très-claire et très-complète de la doctrine d'Hamilton, la première qui ait paru sur le continent, en dehors des résumés sommaires donnés par MM. Allégret, Bellavitis et Hankel.

Il se divise en deux Parties, dont la première est intitulée : « Principes du calcul des quaternions ».

L'auteur part de la notion du *vecteur*, défini comme l'opération géométrique qui sert à déterminer la position d'un point B de l'espace au moyen de la distance de ce point à un point donné A et de la direction de la droite qui va de A vers B. Il expose les propriétés de l'addition et de la soustraction des vecteurs, leur décomposition suivant trois directions rectangulaires, etc.

Il définit ensuite le *quotient* $\frac{\beta}{\alpha}$ de deux vecteurs, comme l'opération qui consiste à passer du vecteur α au vecteur β. Cette transformation dépend de quatre quantités, d'où le nom de *quaternion* attribué au symbole de l'opération. L'auteur établit les règles de la multiplication des vecteurs unitaires rectangulaires i, j, k, d'où il déduit celles de la multiplication des vecteurs quelconques, puis des quaternions en général; la propriété associative dans ce cas général est démontrée en s'appuyant sur la propriété associative de la multiplication des vecteurs unitaires i, j, k. Il donne les formules les plus importantes qui résultent de la multiplication des vecteurs et de l'emploi des signes S et V d'Hamilton. Il applique ces formules à la démonstration des formules fondamentales de la Trigonométrie plane et de la Trigonométrie sphérique.

Vient ensuite la théorie de la résolution des équations du premier degré en quaternions, au moyen de la fonction linéaire φ d'Hamilton. M. Romer explique comment cette fonction importante satisfait à une équation cubique, qui est la base de tant d'ap-

([1]) Romer (P.). — *Principes fondamentaux de la méthode des Quaternions*. Kief, typographie universitaire, 1868. Prix : 2 roubles arg. — 1 vol. in-8°, 215 p. 4 pl. lith.

plications, et qui sert à exprimer une *déformation linéaire;* puis il traite de la différentiation et de l'intégration des quaternions.

La seconde Partie, composée de deux Sections, a pour objet les applications géométriques. La première Section est relative au problème concernant la ligne droite, le plan et les surfaces du second ordre, et l'auteur entre dans tous les détails nécessaires pour faire comprendre aux commençants cette théorie qui n'est pas sans présenter quelques difficultés quand on l'étudie pour la première fois dans les Ouvrages un peu trop concis d'Hamilton et de M. Tait.

Dans la seconde Section, l'auteur s'occupe des applications des quaternions à la Géométrie infinitésimale. Il traite successivement des lignes dans l'espace, de la courbure des surfaces, et termine par le calcul de la mesure de la courbure de Gauss et par l'étude des propriétés des lignes géodésiques.

Il est à souhaiter que M. Romer donne une suite à son remarquable travail, et consacre un second Volume aux applications des quaternions à la Mécanique et à la Physique. J. H.