BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Revue des publications périodiques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 11 (1876), p. 27-48
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1876__11__27_1>

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK, herausgegeben von C.-W. BORCHARDT (¹).

T. LXXX; 1875.

KOWALEVSKY (Sophie von). — *Sur la théorie des équations aux différences partielles.* (32 p.)

M^me de Kowalevsky, native de Russie, ayant fini ses études de Mathématiques auprès de M. Weierstrass, a publié ce Mémoire comme dissertation inaugurale pour obtenir par là le grade de

(¹) Voir *Bulletin*, t. IX, p. 176.

docteur auprès de la Faculté de Philosophie de l'Université de Göttingue (¹).

Au commencement de ce savant Mémoire, on trouve les théorèmes fondamentaux sur l'existence de *séries de puissances* (Potenzreihen), qui satisfont comme intégrales aux équations différentielles ordinaires, théorèmes empruntés, dans la forme où ils sont énoncés, aux cours de M. Weierstrass. Les recherches de Mme de Kowalevsky ont pour objet de répondre à la question, si les théorèmes qui servent de base à la théorie des équations différentielles ordinaires admettent une généralisation pour les équations algébriques aux différences partielles.

Le premier paragraphe traite de n équations différentielles linéaires homogènes contenant n fonctions indéterminées et $r+1$ variables indépendantes. Le deuxième s'occupe d'une équation différentielle d'ordre n contenant une fonction indéterminée φ et $r+1$ variables indépendantes. La recherche se restreint d'abord au cas dit *normal*, où une quelconque des dérivées d'ordre n, soit $\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}$, est réellement contenue dans l'équation différentielle. Le troisième paragraphe montre la réduction du cas général au cas normal, et enfin le quatrième roule sur le problème général de déterminer m fonctions analytiques $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ des $r+1$ variables $x, x_1, \ldots, x_r$, quand on se donne un système de m équations algébriques aux différences partielles, qui est de l'ordre $n_\varkappa$ par rapport à $\varphi_\varkappa$.

Mme de Kowalevsky prouve qu'en général il est possible de trouver des développements en séries de puissances; cependant il y a des exceptions et des précautions dont il faut user, mais que nous ne pourrions pas détailler sans dépasser de beaucoup les limites d'un simple compte rendu.

Combescure (Éd.). — *Sur quelques systèmes particuliers d'équations différentielles.* (20 p.; fr.)

Ce Mémoire comprend six paragraphes : § 1. Remarques géné-

(¹) Du temps de la publication (1874), il n'était pas encore nécessaire d'y passer un examen oral; il suffisait d'avoir fait des études régulières et de présenter un Mémoire scientifique. Depuis, les règlements de cette Université ayant été changés, la promotion *in absentia* n'y est plus permise.

rales. (Sur un système d'équations différentielles du premier ordre.) § 2. Cas des équations linéaires. Étant donnée une intégrale d'un système d'équations linéaires homogènes et une solution particulière de ce système, on peut en déduire le tout ou partie des intégrales de ce système. § 3. Problème de Géométrie : « Étant donnée une courbe (x_1, x_2, x_3), située sur une surface du second ordre, aussi donnée,

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}=1,$$

trouver une autre courbe (X_1, X_2, X_3), située sur la même surface, telle que ses tangentes soient respectivement parallèles aux tangentes successives de la première. » § 4. Problème de Mécanique : « Détermination des cosinus des angles que font trois axes rectangulaires mobiles avec trois axes rectangulaires fixes, quand on connaît en fonction du temps les composantes de rotation du système autour de chacun des axes mobiles. » § 5. Problème d'Analyse : « Le système d'équations différentielles proposé est le suivant :

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 = h,$$
$$\frac{dX_1}{a_1}=\frac{dX_2}{a_2}=\frac{dX_3}{a_3}=\frac{dX_4}{a_4},$$

a_1, a_2, a_3, a_4, h étant des fonctions données quelconques d'une variable indépendante t. » § 6. Digression relative à un système particulier d'équations algébriques.

Rosanes. — *Sur la transformation d'une forme quadratique en elle-même.* (21 p.)

La généralisation du problème de la substitution orthogonale conduit au problème traité par M. Hermite, tome LXVII de ce Journal, et qui consiste à déterminer les coefficients d'une substitution linéaire, de sorte qu'une forme générale quadratique $f(x)$ soit transformée en elle-même, soit en $f(X)$. Dans le Mémoire que M. Hermite a consacré à cet objet, il a réussi à établir pour une forme ternaire $f(x)$ les neuf coefficients de substitution, formés des six coefficients de $f(x)$ et de trois constantes arbitraires. C'est pourquoi M. Rosanes désigne une telle substitution sous le nom de *substitution d'Hermite* (*Hermite'sche Substitution*). Mais, tandis que le problème de la substitution orthogonale mène à des équations où entrent les seuls coefficients c_k^i de la substitution, on ne rencontre dans la substitution d'Hermite, au premier abord, que des relations entre les coefficients c_k^i et ceux de la forme proposée. Cependant, après avoir remarqué que l'équation, dite *fondamentale*, de la substitution devient réciproque, on entrevoit la possibilité d'établir une détermination de la notion de substitution d'Hermite indépendamment de la forme quadratique individuelle.

Ayant trouvé ce point de vue, M. Rosanes représente la substitution qui transforme une forme quadratique en elle-même, sous une forme qui la caractérise distinctement et qui en fait reconnaître aisément la propriété essentielle. De plus, il montre que le système des coefficients c_k^i, qui ne sont pas indépendants les uns des autres, admet une représentation simple, non pas au moyen du nombre nécessaire des grandeurs indépendantes, mais par un nombre supérieur à celui-là. Enfin, dans la dernière Partie du Mémoire, on trouve une méthode développée pour résoudre le problème : « Étant donnée une substitution d'Hermite, déduire d'une forme adjointe $f(x)$ successivement d'autres formes qui puissent être transformées aussi en elles-mêmes par cette substitution ».

GUNDELFINGER (S.). — *Sur le système simultané de trois formes quadratiques ternaires.* (13 p.)

Ce Mémoire développe d'abord les résultats obtenus par M. Hermite (t. LVII du même Journal), sur la représentation typique de trois formes quadratiques ternaires, résultats qui n'avaient pas encore été démontrés jusqu'à présent. Pour cela, les coefficients de la forme cubique ternaire dont les dérivées partielles représentent les formes données quand on y introduit certaines nouvelles variables sont exprimés d'une manière simple par onze invariants fondamentaux. Alors M. Gundelfinger étudie, à l'aide de la représentation typique, les relations entre les formes du système, et il fait voir que presque tous les théorèmes relatifs à des formes cubiques ternaires se transforment immédiatement en d'autres sur trois formes quadratiques; par exemple, il s'ensuit que « tous les invariants du système, qui jouissent de la propriété des combinants, sont des fonctions entières de deux d'entre eux ». A la fin on rencontre quelques applications aux réseaux de surfaces du second ordre.

SCHENDEL (L.). — *Sur la théorie des fonctions sphériques.* (9 p.)

Définition des fonctions de Laplace au moyen de dérivées, et développement rapide des formules principales.

SCHENDEL (L.). — *Sur un développement en fraction continue.* (2 p.)

MATHIEU (Ém.) — *Mémoire sur les inégalités séculaires des grands axes des orbites des planètes.* (31 p.; fr.)

« Laplace démontra d'abord que les grands axes ne sont soumis à aucune variation séculaire, si l'on néglige les termes du troisième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons supposées très-petites. Lagrange prouva ensuite que cette proposition a lieu, quelque loin que l'on pousse l'approximation, et par conquent aussi pour des excentricités et des inclinaisons arbitraires.

» Toutefois, les démonstrations de Laplace et Lagrange supposent encore que l'on néglige les termes de la fonction perturbatrice multipliés par les carrés et les produits des masses. Poisson, dans le *Journal de l'École Polytechnique* (XV^e Cahier), a ensuite démontré que le théorème est également vrai, quand on a égard aux termes de la fonction perturbatrice du second ordre par rapport aux masses....

» Maintenant que l'on sait que les grands axes des orbites des planètes ne sont soumis à aucune variation séculaire, quand on néglige les termes du troisième ordre par rapport aux masses perturbatrices, il reste à se demander si le théorème est encore vrai, lorsqu'on tient compte de tous les ordres suivants, et si par conséquent les valeurs des grands axes oscilleront éternellement autour d'une valeur moyenne, en admettant que le système planétaire ne soit dérangé par aucune cause extérieure.

» Dans le Mémoire qui suit, je ne suis pas parvenu à traiter entièrement cette question; mais, après avoir retrouvé le résultat obtenu par Poisson, je vais plus loin et je démontre que l'inverse du grand axe d'une planète n'est sujet à aucune inégalité séculaire, en ayant égard à tous les termes jusqu'au troisième ordre inclusivement.... »

STURM (R.). — *Suite des recherches sur les courbes gauches cubiques.* (22 p.)

Nous avons déjà signalé ce Mémoire (*Bulletin,* t. IX, p. 180), à l'occasion du premier travail de M. Sturm. En comptant d'une manière habile le nombre des courbes gauches cubiques déterminées par des éléments donnés, M. Sturm a obtenu les caractéristiques dans différents cas remarquables : c'est pourquoi nous ajoutons ici le tableau où il a réuni les nombres trouvés par lui dans ses deux Mémoires.

Soient xP la condition signifiant que la courbe passe par x points ; xs, qu'elle a x droites pour cordes ; xl, qu'elle est rencontrée une fois par chacune des x droites ; $x\pi$, qu'elle touche x plans ; π^2, qu'il y a osculation entre elle et un plan ; πl, qu'elle touche un plan sur une droite : alors le tableau suivant donne le nombre des courbes gauches cubiques qui satisfont aux conditions écrites dans les parenthèses :

$$(6\mathrm{P}) = 1,$$

$$\begin{array}{lll}
(5\mathrm{P}, 1s) = 1, & (5\mathrm{P}, 2l) = 5, & (5\mathrm{P}, 1l, 1\pi) = 10, \\
(4\mathrm{P}, 2s) = 0, & (4\mathrm{P}, 1s, 2l) = 4, & (4\mathrm{P}, 1s, 1l, 1\pi) = 8, \\
(3\mathrm{P}, 3s) = 1, & (3\mathrm{P}, 2s, 2l) = 4, & (3\mathrm{P}, 2s, 1l, 1\pi) = 8, \\
(2\mathrm{P}, 4s) = 1, & (2\mathrm{P}, 3s, 2l) = 6, & (2\mathrm{P}, 3s, 1l, 1\pi) = 12, \\
(1\mathrm{P}, 5s) = 1, & (1\mathrm{P}, 4s, 2l) = 9, & (1\mathrm{P}, 4s, 1l, 1\pi) = 18, \\
(6s) = 6. & (5s, 2l) = 20. & (5s, 1l, 1\pi) = 40.
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
(5\mathrm{P}, 2\pi) = 20, & (5\mathrm{P}, \pi^2) = 6, & (5\mathrm{P}, \pi l) = 3, \\
(4\mathrm{P}, 1s, 2\pi) = 16, & (4\mathrm{P}, 1s, \pi^2) = 3, & (4\mathrm{P}, 1s, \pi l) = 3, \\
(3\mathrm{P}, 2s, 2\pi) = 16, & (3\mathrm{P}, 2s, \pi^2) = 3, & (3\mathrm{P}, 2s, \pi l) = 2, \\
(2\mathrm{P}, 3s, 2\pi) = 24, & (2\mathrm{P}, 3s, \pi^2) = 6, & (2\mathrm{P}, 3s, \pi l) = 3, \\
(1\mathrm{P}, 4s, 2\pi) = 36, & (1\mathrm{P}, 4s, \pi^2) = 6, & (1\mathrm{P}, 4s, \pi l) = 6, \\
(5s, 2\pi) = 80. & (5s, \pi^2) = 21. & (5s, \pi l) = 7.
\end{array}$$

Jürgens (E.). — *La forme des intégrales des équations différentielles linéaires.* (19 p.)

Par une nouvelle voie, M. Jürgens déduit les résultats obtenus par M. Hamburger dans un Mémoire dont nous avons rendu compte (*Bulletin*, t. V, p. 288). De plus, il examine la nature des équations différentielles d'ordre inférieur qui ont toutes leurs intégrales communes avec l'équation différentielle proposée. En même temps cette recherche fait voir la connexion intime qui existe, vu la présence de puissances du logarithme dans les intégrales, entre une équation différentielle et l'équation correspondante du multiplicateur.

Pasch. — *Sur la théorie du déterminant hessien.* (8 p.)

Si, au moyen d'une substitution linéaire, une forme homogène peut être transformée en une autre qui ne dépend pas de toutes les nouvelles variables, il faut que le déterminant de la forme s'évanouisse identiquement; mais les recherches de Hesse (t. XLII et LVI du même Journal) n'ont pas montré l'inverse, c'est-à-dire jusqu'où la possibilité d'une telle transformation dépend de la propriété du déterminant de s'évanouir. Après avoir développé quelques relations qui se rapportent au déterminant hessien, M. Pasch décide la question pour les formes cubiques à trois ou quatre variables, en examinant tout à la fois les cas spéciaux qui s'y présentent.

Pasch. — *Note sur les déterminants formés de fonctions et des dérivées de ces fonctions.* (6 p.)

Démonstration purement algébrique du théorème connu :

« Si le déterminant des fonctions $f_1, \ldots, f_\lambda$,

$$D(f_1, \ldots, f_\lambda) = \Sigma \pm f_1 \frac{df_2}{dx} \frac{d^2 f_3}{dx^2} \cdots \frac{d^{\lambda-1} f_\lambda}{dx^{\lambda-1}}$$

s'évanouit pour toute valeur de x, tous les déterminants de l'ordre λ du système

$$\begin{vmatrix} f_1 & \frac{df_1}{dx} & \frac{d^2 f_1}{dx^2} & \frac{d^3 f_1}{dx^3} & \cdots \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_\lambda & \frac{df_\lambda}{dx} & \frac{d^2 f_\lambda}{dx^2} & \frac{d^3 f_\lambda}{dx^3} & \cdots \end{vmatrix}$$

s'annulent pour toute valeur de x. Généralisation du résultat. »

Frobenius (G.). — *Sur des équations différentielles linéaires qui admettent des intégrales algébriques.* (11 p.)

Au commencement, M. Frobenius établit ce théorème : « Si toutes les intégrales d'une équation différentielle linéaire et homogène, à coefficients uniformes, sont des fonctions algébriques, elle possède une intégrale au moyen de laquelle toutes les autres peuvent être exprimées rationnellement. » Ce théorème donne lieu à la question inverse ou à ce problème : « Trouver toutes les fonctions y qui satisfassent à une équation différentielle de la forme proposée, lorsque les intégrales, n'étant pas toutes des fonctions algébriques, peuvent pourtant être exprimées rationnellement en y ». La recherche montre qu'une équation différentielle de la forme proposée est algébriquement intégrable quand elle possède une intégrale au moyen de laquelle toutes les autres peuvent être exprimées rationnellement, à moins que cette intégrale n'ait une des deux formes caractérisées dans le Mémoire. Le résultat se prête à un énoncé élégant dans un cas important, savoir : « Si une équation différentielle linéaire *irréductible*, de la forme proposée et d'ordre supérieur au second, possède une intégrale à l'aide de laquelle toutes les autres peuvent être exprimées rationnellement, toutes les intégrales en sont des fonctions algébriques ».

Schellbach. — *Construction de la trajectoire d'un point attiré vers un point fixe d'après la loi de Newton.* (10 p.)

Après avoir développé d'une manière rapide les formules les plus importantes qui servent à intégrer les équations différentielles du mouvement planétaire, M. Schellbach donne cette construction très-élégante de l'orbite :

Soient F le point fixe attirant, C le point mobile attiré, k l'accélération imprimée par le point F au point C à l'unité de distance, v' la grandeur de la vitesse initiale, q' la longueur de la perpendiculaire abaissée de F sur la direction de la vitesse initiale passant par C. Tirez FC, coupez-en la longueur $\mathrm{FP} = g = \dfrac{k}{v'q'}$, faites $\mathrm{PV} = v'$ et normale à la direction de la vitesse initiale, et joignez FV; FV sera la direction du grand axe de la trajectoire; l'autre foyer F' se construira donc facilement. La courbe sera une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que le point V sera à l'intérieur, à l'extérieur ou sur la périphérie d'un cercle décrit autour de F comme centre, avec FP comme rayon. D'ailleurs, la droite qui joint V à l'intersection R d'un rayon vecteur FR' (R' étant sur la trajectoire), c'est-à-dire VR, est tout à la fois la vitesse du point mobile lorsqu'il passe par le point R'.

Popoff. — *Sur le développement en une série d'exponentielles.* (1 p.; fr.)

Correspondance mathématique *entre Legendre et Jacobi.* (75 p.) Réimprimée dans le *Bulletin*, t. VIII, p. 287; t. IX, p. 38, 51 et 126.

Schwarz (H.-A.). — *Mélanges sur la question des surfaces minima.* (21 p.)

Ces mélanges sont une réimpression d'articles du *Vierteljahr-*

schrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Ils donnent dans dix articles les résultats auxquels est parvenu M. Schwarz par ses études sur différents points de la théorie des surfaces minima. M. Fiedler a ajouté un abrégé de ces recherches à l'édition allemande de la Géométrie à trois dimensions de M. Salmon : I. Démonstration de quelques théorèmes de M. Ossian Bonnet, qui sont intimement liés à la représentation conforme de ces surfaces. II. Formules générales pour les coordonnées d'une surface minimum. III. Surfaces minima qu'on engendre en déformant par la flexion une surface minimum donnée. IV. Aire de la surface d'un certain cône comparée à celle d'une partie de la surface minimum. V. Déterminer analytiquement une surface minimum passant par une ligne analytique donnée, et possédant en chaque point de cette ligne une normale donnée dont la direction varie tout le long de la ligne suivant une loi analytique donnée. Exemples. VI. Remarque historique sur le problème où une ligne fermée L est le contour d'une partie de la surface minimum qui ne présente pas de singularités en dedans de la ligne L. VII. Surfaces minima applicables à des surfaces de rotation. VIII. Surfaces minima qui contiennent un faisceau de lignes données. IX. Tracer sur une surface minimum donnée des contours fermés, tels que la partie renfermée soit elle-même un minimum entre toutes les surfaces qui passent par le contour. X. Sur le nombre de solutions du problème VI.

Schwarz (H.-A.). — *Sur les surfaces minima qui sont enveloppées par un faisceau de cônes du second ordre.* (14 p.)

Le Mémoire s'occupe d'abord de ce problème : « Déterminer toutes les surfaces minima qui sont enveloppées par un faisceau de cônes concycliques (c'est-à-dire dont les sections circulaires sont situées sur les deux mêmes faisceaux de plans parallèles) », et la seconde partie du travail prouve qu'il n'y a pas d'autres surfaces minima jouissant de la propriété d'être enveloppées par un faisceau de cônes du second ordre.

Meyer (O.-E.). — *Addition au Mémoire sur la théorie du frottement intérieur,* t. LXXVIII de ce Journal. (2 p.)

Frobenius (G.). — *Sur les intégrales régulières des équations différentielles linéaires.* (17 p.)

Les intégrales d'une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont des fonctions analytiques uniformes dans le voisinage d'un point zéro sont de la forme

$$x^r[u_0(\log x)^k + u_1(\log x)^{k-1} + \ldots + u_k],$$

où u_0, u_1, ..., u_k peuvent être développés suivant des puissances de x à exposants entiers positifs ou négatifs ; ou bien les intégrales sont des agrégats linéaires de plusieurs expressions de cette forme. Les coefficients de ces séries n'ont été déterminés jusqu'à présent que lorsqu'ils contiennent seulement un nombre fini de puissances de la variable à exposants négatifs. C'est pourquoi de telles intégrales ont été nommées *régulières* par M. Thomé (*Journ.*, t. LXXV; *Bull.*, t. IV, p. 237). Après M. Fuchs, qui avait déjà entrepris l'étude des équations différentielles linéaires qui n'admettent que des intégrales régulières, M. Thomé avait étendu ses recherches aux équations différentielles qui parmi leurs intégrales en ont quelques-unes de régulières, et il était parvenu à des résultats remarquables. M. Frobenius avait un peu plus tard introduit la notion de l'irréductibilité dans la théorie des équations différentielles linéaires. Secondé par cette nouvelle idée, il reprend ici la question traitée par M. Thomé, et de là il réussit à déduire presque sans calcul quelques-uns des théorèmes de M. Thomé.

Sturm (R.). — *Addition aux recherches sur les courbes cubiques gauches.* (1 p.)

Remarque sur le droit de priorité.

Table des matières des tomes LXXI-LXXX. (10 p.)

T. LXXXI; 1876.

Thomé (L.-W.). — *Sur la théorie des équations différentielles linéaires* [suite ([1])]. (32 p.)

M. Thomé, dont les recherches antérieures sur les équations différentielles linéaires ont été publiées dans les tomes LXXIV-LXXVIII du même Journal, continue à en étudier les propriétés ; en particulier il s'occupe maintenant de la question suivante : « Étant donnée une équation différentielle linéaire homogène à coefficients rationnels, à quelles conditions doit-elle satisfaire pour qu'elle contienne

([1]) *Voir* t. 78. — *Bulletin*, t. VII, p. 256.

les intégrales d'un autre d'ordre inférieur, à coefficients rationnels et qui ne possède que des intégrales régulières?» Ce qui fait le progrès essentiel du nouveau Mémoire comparé à celui du tome LXXVIII, c'est que l'équation différentielle cherchée peut avoir des points singuliers quelconques ([1]). M. Thomé réussit à établir ces résultats généraux :

Si, dans l'équation différentielle proposée, les indices caractéristiques ([2]) sont soumis à la seule condition de satisfaire à l'inégalité $0 \leqq h < m$, où h est le plus grand des indices, m l'ordre de l'équation différentielle, il ne peut exister qu'une équation différentielle d'ordre $m - h$ à coefficients rationnels et dont les intégrales, étant toutes régulières, soient comprises parmi celles de l'équation donnée. Le Mémoire actuel apprend à rechercher si cette équation différente existe et quelle elle est.

Toute la recherche tend à remplacer l'équation différentielle proposée

$$(1) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + p_m y = \mathrm{F}(y, x) = 0$$

par le système

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^{m-h} y}{dx^{m-h}} + p_1^{(h)} \dfrac{d^{m-h-1} y}{dx^{m-h-1}} + \ldots + p_{m-h}^{(h)} y = \mathrm{F}_{m-h}(y, x) = 0, \\ \dfrac{d^h s}{dx^h} + g_1^{(m-h)} \dfrac{d^{h-1} s}{dx^{h-1}} + \ldots + g_h^{(m-h)} s = f_h(s, x) = 0, \end{cases}$$

ou bien à faire

$$(3) \qquad \mathrm{F}_m(y, x) = f_h(\mathrm{F}_{m-h}, x),$$

$\mathrm{F}_{m-h}(y, x)$ étant l'équation différentielle cherchée.

Pour découvrir les points singuliers de l'équation différentielle $\mathrm{F}_{m-h} = 0$ qui ne reviennent pas dans l'équation différentielle donnée $\mathrm{F}_m = 0$, l'auteur observe que ce sont des points *non essentiellement singuliers*, c'est-à-dire où les intégrales de l'équation différentielle restent toutes uniformes et finies; et que d'ailleurs, d'après un théorème de M. Fuchs (t. LXVIII du Journal), le pro-

([1]) Rappelons la définition des *points singuliers* dans la théorie des équations différentielles lineaires : ce sont les points du plan de construction où les coefficients de l'équation differentielle cessent d'être finis.

([2]) Voir *Bulletin*, t. IV, p. 238.

duit du premier coefficient de l'équation différentielle par $x - a$ devient pour $x = a$ un nombre entier négatif dans un point non essentiellement singulier. Si l'on décompose alors le coefficient $p_1^{(h)}$ en fractions simples, soit $\sum_{1}^{\lambda} \frac{\alpha_a}{x - a^a}$ la partie de ce coefficient qui provient du point singulier cherché, alors le produit $\prod_{a=1}^{a=\lambda} (x - a_a)^{-\alpha_a}$ devient une fonction entière et rationnelle.

Pour un point singulier dont l'indice caractéristique h est supérieur à zéro, le développement formel de la grandeur $p_1^{(h)}$ peut se déduire des m équations pour les coefficients $p, p^{(h)}$ et $g^{(m-h)}$, lesquelles résultent de l'équation (3) quand on égale les coefficients des dérivées de même ordre; on peut donc en tirer la détermination des coefficients de la fonction entière et rationnelle que nous venons de mentionner. $p_1^{(h)}$ ayant été ainsi complétement déterminé, les autres quantités $p^{(h)}$ et $g^{(m-h)}$ se déduisent d'un certain nombre des m équations d'une seule manière. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une solution du problème soit possible demande enfin que les valeurs trouvées pour les $p^{(h)}$ et les $g^{(m-h)}$ satisfassent aussi aux autres de ces équations.

Pochhammer (L.). — *Contribution à la théorie de la flexion du cylindre à base circulaire.* (29 p.)

Le problème de la flexion d'un cylindre, après avoir été traité par beaucoup d'éminents géomètres, a été résolu dans un certain sens par Navier; M. de Saint-Venant a complété les formules de son célèbre prédécesseur, et les valeurs qu'il établit pour les déplacements sont, en effet, des solutions des trois équations aux différentielles partielles qui régissent les déformations des corps solides à élasticité constante. Enfin M. Kirchhoff a développé la solution exacte pour un cylindre infiniment mince.

Actuellement M. Pochhammer a repris ce problème, parce que les hypothèses d'où Navier est parti dans sa déduction n'ont pas été vérifiées par un exemple, qui, tout en se bornant à des dimensions finies, ait été traité par l'Analyse mathématique. Le cas du cylindre solide qu'il a choisi pour sujet du présent Mémoire permet d'obtenir, par l'intégration complète des trois équations différentielles de l'élasticité, les déformations que produit la flexion à l'intérieur. Les calculs confirment en général la théorie de Navier, en montrant que ses hypothèses constituent une approximation de premier ordre.

Ce problème spécial a été déjà soumis à l'Analyse dans un travail de Lamé et Clapeyron (*Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes. — Journal de Crelle,* t. 7); cependant on n'y trouve que les idées générales qui président au calcul, et les lois de la flexion n'y ont point été développées. Dans ses *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité,* Lamé n'a pas reproduit sa solution, et il semble que la complication inhérente à sa première manière de traiter le problème l'ait empêché d'y revenir plus tard. Toutefois il faut avouer que les travaux préparatoires étaient donnés par le Mémoire de Lamé et Clapeyron; la méthode d'intégration qu'a suivie M. Pochhammer se rattache à celle qui a été développée par Lamé à propos de la question de l'équilibre d'élasticité des enveloppes sphériques.

M. Pochhammer divise son sujet en trois Parties : la première comprend l'intégration générale; dans la deuxième, il détermine les constantes arbitraires par les forces données qui sollicitent la surface du solide; la troisième s'occupe de formules d'approximation. Pour plus de facilité, il décompose le problème en trois autres plus simples. Il considère les cas où la surface du cylindre est sollicitée seulement : 1° par des forces normales; 2° par des forces tangentielles et normales à l'axe du cylindre; 3° par des forces tangentielles et parallèles à l'axe. Le premier de ces trois problèmes spéciaux explique déjà les phénomènes (proprement dits) de flexion; car les formules d'approximation du deuxième deviennent, abstraction faite d'une simple torsion, identiques à celles du premier, et le troisième ne fournit qu'une flexion secondaire. C'est pourquoi les calculs approchés de la troisième Partie ont été limités au premier problème. Le système des expressions obtenues par là pour les déplacements est analogue à celui qu'a développé M. de Saint-Venant pour le cylindre à section normale circulaire; mais les fonctions qui y entrent sont plus générales. Enfin deux exemples ont été traités où la ligne élastique se réduit, dans une première approximation, aux paraboles connues du troisième et du quatrième ordre.

Oberbeck (L.). — *Sur les mouvements permanents d'un fluide quand on a égard au frottement intérieur.* (19 p.)

Les équations différentielles générales de l'Hydrodynamique qui ne négligent pas le frottement intérieur ont été employées jusqu'à présent presque exclusivement lorsqu'il s'agissait de résoudre les problèmes de déterminer par l'expérience les valeurs numériques des constantes de frottement. En général, c'est en renonçant au frottement intérieur qu'on a abordé les nombreuses questions de l'Hydrodynamique qui ont été examinées. Parmi ces problèmes, il y a un certain genre de mouvements qu'on peut désigner sous le nom de *courants influencés* par des corps solides dans le fluide. Ces problèmes ont été l'objet des spéculations d'éminents géomètres allemands, tels que Dirichlet, Clebsch, Kirchhoff. M. Oberbeck a trouvé qu'une partie de ces problèmes reste accessible à l'Analyse quand on part des équations différentielles générales.

Si le mouvement d'un fluide, abstraction faite du frottement, admet un potentiel de la vitesse, et que ce potentiel soit déterminé, il faut seulement, pour introduire le frottement, ajouter aux composantes de la vitesse déjà trouvées les intégrales des équations différentielles hydrodynamiques qui correspondent aux mouvements de tourbillon et qui ont été traitées par MM. Helmholtz et Stefan. Alors les fonctions arbitraires qui y entrent peuvent souvent être déterminées à l'aide du potentiel de la vitesse, par les conditions à la surface.

De cette manière, l'auteur a traité quelques problèmes d'Hydrodynamique où, quand on ne tient pas compte du frottement, les composantes de la vitesse peuvent être exprimées par les dérivées d'une même fonction. Cette fonction a été supposée indépendante du temps, c'est-à-dire que l'on suppose le mouvement devenu permanent. La question posée est toujours la suivante : « Étant données les hypothèses sur le potentiel de la vitesse et sur les limites du fluide, quelles quantités faut-il ajouter aux composantes primitives de la vitesse quand on veut introduire aussi le frottement? » Parmi les différents problèmes du Mémoire, signalons surtout l'exemple d'une sphère fixe dans un fluide illimité.

Thomae (J.). — *Sur la réduction de l'intégrale elliptique* $\int (\sin \operatorname{am} u)^{2r} du$. (12 p.)

M. Thomae s'est proposé de chercher une formule pour l'intégrale $\int \frac{\frac{1}{2} x^r \, dx}{\sqrt{x(1-x)(1-kx)}}$ analogue à la formule pour $\int \frac{x^{2r}\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$ qu'on trouve dans tous les Cours d'Analyse. Mais il découvre qu'il n'est guère possible d'établir des formules finies, parce que les séries hypergéométriques qui entrent dans les formules de réduction ne se prêtent pas bien à une expression simple au moyen de leurs arguments. Néanmoins, quoique ainsi l'évaluation numérique des intégrales ne soit pas avancée par ses formules, M. Thomae les croit assez intéressantes pour les communiquer : car elles démontrent l'importance de l'intégration des formules récurrentes, et leurs coefficients sont en même temps les modules de périodicité d'intégrales elliptiques de seconde espèce. D'ailleurs l'auteur cherche à s'approcher d'expressions finies en donnant les coefficients comme numérateurs des fractions réduites d'une fraction continue.

HERMITE (Ch.). — *Extrait d'une lettre à M. Borchardt. Sur les nombres de Bernoulli.* (3 p.; fr.)

BOLTZMANN (L.). — *Remarque relative au Mémoire de M. O.-E. Meyer sur le frottement intérieur.* (1 p.)

FUCHS (L.). — *Sur les équations différentielles linéaires du second ordre qui possèdent des intégrales algébriques, et sur une nouvelle application de la théorie des invariants.* (46 p.)

Voici le point de départ du nouveau Mémoire de M. Fuchs : Soient y_1, y_2 les termes d'un système fondamental d'intégrales de l'équation différentielle proposée; toute autre intégrale en sera une fonction linéaire homogène à coefficients constants; donc, si μ est une intégrale algébrique quelconque, toute fonction symétrique des différentes valeurs qu'admet μ sera une forme binaire des deux quantités y_1, y_2. Cette forme binaire est une fonction rationnelle de la variable indépendante z. Toutefois, il se peut qu'elle soit une puissance d'une autre forme binaire; par conséquent, il faut considérer généralement les formes en y_1 et y_2 qui représentent une racine d'une fonction rationnelle de z. Nous en désignerons le complexe par Φ.

Si une racine d'une fonction rationnelle satisfait à l'équation différentielle, la forme linéaire est, de toutes les formes Φ, celle de l'ordre le moins élevé; donc, dans le cas général, il faut rechercher l'ordre le moins élevé N que puisse avoir une formule du complexe Φ.

Or, si z décrit des contours fermés, y_1 et y_2 se transforment en des fonctions linéaires homogènes et à coefficients constants de y_1, y_2; partant, les différentes valeurs qu'obtient une forme en y_1 et y_2 par suite de ces mouvements résulteront de certaines substitutions linéaires opérées sur y_1, y_2. Cela étant, M. Fuchs démontre que les covariants d'une forme du complexe Φ représentent eux aussi des racines de fonctions rationnelles; d'où il s'ensuit que les covariants de la forme de $N^{\text{ième}}$ ordre dont les ordres sont inférieurs à N doivent tous s'évanouir identiquement. Il serait donc facile d'effectuer la détermination du nombre N, si l'on possédait la solution du problème, d'indiquer l'espèce des formes binaires de $m^{\text{ième}}$ ordre dont les covariants d'ordres inférieurs à m s'évanouissent tous identiquement; mais, comme il n'en est pas ainsi, l'auteur prend le chemin suivant pour déterminer N.

Parmi toutes les racines d'une équation algébrique irréductible, nommons *système radical réduit* le système de celles dont le quotient n'est pas constant; et désignons par *forme première* toute forme du complexe Φ qui se compose des termes d'un tel système comme facteurs. Alors il en résulte que la forme de $N^{\text{ième}}$ ordre et en même temps son covariant hessien représentent des formes premières. Et la forme que prend le *covariant hessien du covariant hessien* de la même forme amène à conclure que le nombre N n'est jamais supérieur à *douze*. Si l'on réduit encore davantage, on trouve qu'il ne faut attribuer à N qu'une des valeurs 2, 4, 6, 8, 10, 12; donc, si l'équation différentielle doit avoir une intégrale algébrique, cette intégrale (c'est-à-dire une forme de premier ordre en y_1, y_2), ou une forme de ces mêmes intégrales dont le degré égale un des nombres 2, 4, 6, 8, 10, 12, est la racine d'une fonction rationnelle. L'inverse de cette proposition a aussi lieu, à l'exception du cas de $N = 2$.

Pour reconnaître s'il y a des formes qui représentent des racines de fonctions rationnelles, l'auteur prend deux voies différentes. La première nous conduit à la question de savoir si une racine d'une fonction rationnelle satisfait à une équation différentielle à coefficients rationnels; car on découvre que toute forme en y_1, y_2 de l'ordre m satisfait à une certaine équation différentielle linéaire à coefficients rationnels de l'ordre $m + 1$, et de là on tire la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation différentielle donnée possède des intégrales algébriques. Il faut, en général, qu'une certaine équation différentielle linéaire à coefficients rationnels, dont l'ordre n'est pas supérieur à 12, soit satisfaite par la racine d'une fonction rationnelle. La question de savoir si la racine d'une fonction rationnelle satisfait à une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels se réduit au problème élémentaire de juger si un système d'équations linéaires a des solutions finies. Au reste, M. Fuchs montre comment on peut parvenir à ce système d'équations linéaires sans établir en effet l'équation différentielle d'ordre $N+1$.

La seconde voie revient à une étude directe de la forme en y_1, y_2, lorsque z décrit les différents contours fermés. Pour cela, M. Fuchs tire parti des coefficients des relations linéaires homogènes qui lient les systèmes fondamentaux d'intégrales appartenant aux différents points singuliers d'une équation différentielle linéaire, relations qu'il a développées dans le tome 75 du *Journal de Borchardt.*

La fin est consacrée au développement de quelques théorèmes spéciaux; en voici un : « Qu'on réduise au plus petit dénominateur les nombres rationnels qui représentent les racines des équations fondamentales appartenant aux points singuliers et à l'hypothèse $z=\infty$ de l'équation différentielle $\frac{d^2y}{dz^2}=Py$; supposons qu'un quelconque des dénominateurs soit supérieur à dix : cette équation différentielle ne possédera pas d'intégrale algébrique, à moins que la racine d'une fonction rationnelle ne satisfasse à l'équation elle-même ou à l'équation différentielle linéaire en y^2. »

Caspary (F.). — *La surface des centres de courbure dans le paraboloïde elliptique.* (50 p.)

Les surfaces des centres de courbure ont été souvent traitées par les géomètres; en particulier, Clebsch a publié dans le *Journal de Borchardt* un Mémoire qui contient les résultats détaillés de ses recherches sur les surfaces des centres de courbures des surfaces du second ordre. Cependant l'absence de centre dans une surface du second ordre modifie et simplifie beaucoup les propriétés de ces surfaces, et c'est pourquoi la Faculté de Philosophie de l'Université de Berlin avait posé en 1874 ce problème de concours pour les étudiants :

« Étudier la surface des centres de courbure du paraboloïde elliptique et de sa polaire réciproque, et rechercher exactement les propriétés correspondantes de ces deux surfaces. »

Le prix a été décerné séparément à chacun des deux concurrents, MM. Caspary et Rohovsky. Plus tard, M. Caspary a complété ses études sur cet objet et a présenté ses résultats comme dissertation inaugurale à la même Faculté. Le fruit de ces travaux est le Mémoire publié dans le *Journal de Borchardt,* et qui forme une véritable monographie détaillée des propriétés de la surface des centres de courbure du paraboloïde elliptique. Le grand nombre des détails ne nous permet pas d'en énumérer quelques-uns; contentons-nous de reproduire les titres des différentes parties du Mémoire.

§ 1. Représentation des coordonnées de la surface par deux paramètres. Relation qui existe entre la surface et le problème des normales.

§ 2. Déduction d'une équation fondamentale pour la recherche et la discussion de la surface des centres.

§ 3. Relations d'invariants. Représentation de la surface des centres sous la forme finale $F(x, y, z) = 27\,U^2 - 8\,VW^2 = 0$.

§ 4. Recherche des points de la surface d'où l'on peut mener trois normales coïncidantes; plans tangents singuliers et courbes suivant lesquelles ils coupent et touchent.

§ 5. 1° Points de la surface d'où l'on peut tirer des normales formant deux couples de normales coïncidantes; 2° points de la surface d'où l'on peut tirer des normales formant un système de deux et un système de trois normales coïncidantes; 3° points de la surface d'où l'on peut tirer des normales dont quatre coïncident.

§ 6. La courbe double de la surface; ses différentes représentations; ses singularités et nombres caractéristiques.

§ 7. Recherche de la surface polaire réciproque à la surface des centres; ses singularités et l'abaissement de classe qu'elles produisent.

Koenigsberger (L.). — *Sur les relations les plus générales qui existent entre les intégrales hyperelliptiques.* (24 p.)

Le Mémoire résout deux problèmes : 1° réduction du problème de transformation algébrique au problème rationnel ; 2° relation la plus générale entre les intégrales hyperelliptiques de même irrationalité.

Les formules qui contiennent les résultats définitifs nous semblent être trop longues et exiger trop d'explications pour pouvoir être communiquées ici.

Faà de Bruno. — *Sur les fonctions génératrices de Borchardt.* (3 p.; fr.)

Hermite (Ch.). — *Extrait d'une lettre à M. L. Kœnigsberger sur le développement des fonctions elliptiques suivant les puissances croissantes de la variable.* (9 p.; fr.)

Il s'agit de l'expression générale, en fonction de l'indice, des polynômes rationnels et entiers par rapport au module, qui se présentent dans les développements des fonctions $\sin\operatorname{am} x$, $\cos\operatorname{am} x$, $\Delta\operatorname{am} x$ suivant les puissances croissantes de la variable. M. Hermite trouve que les développements de ces trois fonctions tendent de plus en plus à se confondre dans leurs derniers termes avec de simples progressions. Deux nouvelles séries de polynômes définies par les coefficients des développements de $\frac{1}{\sin\operatorname{am} x}$ et $\frac{1}{\cos\operatorname{am} x}$ présentent encore beaucoup d'intérêt; c'est à l'égard de ces polynômes que M. Hermite tire de la transformation de nombreuses propriétés qu'il indique succinctement.

Cayley (A.). — *Correction de deux erreurs numériques qui se trouvent dans le travail de Sohncke sur les équations modulaires*, t. XVI. (1 p.)

Lipschitz (R.). — *Contribution à la théorie de la courbure*. (13 p.)

M. Lipschitz se propose de généraliser, pour une variété de n variables, le théorème connu de la théorie de la courbure qui dit que la somme des valeurs réciproques des deux rayons principaux varie quand on effectue une flexion de la surface, mais que le produit des mêmes quantités ou la *mesure de la courbure* de Gauss reste invariable. Pour donner une idée des recherches de M. Lipschitz, il nous faut revenir à l'équation $D(\omega) = 0$ expliquée par l'auteur (¹). Le dernier coefficient D_{n-1} de cette équation, divisé par le premier D_0, forme la généralisation naturelle de la *mesure de la courbure* de Gauss. Les propriétés invariantives des coefficients de cette équation, qui avaient été déjà signalées dans les Mémoires antérieurs, en particulier *Bulletin*, t. IV, p. 304, mènent rapidement au théorème correspondant, dont voici l'énoncé : « La généralisation de la mesure de courbure $\frac{D_{n-1}}{D_0}$ est pour tout n impair un invariant de la forme $g(dy)$ (*Bulletin*, t. IV, p. 307), et, pour tout n pair supérieur à 2, la racine carrée d'un invariant de la forme $g(dy)$.

Hamburger. — *Sur la théorie de l'intégration d'un système de n équations linéaires de premier ordre aux différences partielles contenant deux variables indépendantes et n dépendantes*. (38 p.)

(¹) Voir *Bulletin*, t. IV, p. 301 (14 et 15).

L'étude des recherches de M. Natani sur les équations différentielles, contenues dans son Livre : *Die höhere Analysis in vier Abhandlungen,* a suggéré à M. Hamburger l'idée de les porter plus loin. Les §§ 1-3 du Mémoire ont pour objet de ramener l'intégration de n équations différentielles linéaires du premier ordre aux différentielles partielles et à n variables dépendantes et deux indépendantes, à l'intégration de plusieurs systèmes incomplets d'équations différentielles ordinaires pour toutes les $n+2$ variables, si cela est possible, c'est-à-dire si les conditions connues d'intégrabilité sont remplies. Il résulte de cette recherche que la classe d'équations linéaires simultanées aux différences partielles intégrée par Jacobi, t. II du *Journal de Crelle,* est la seule qui mène à un seul système de $n+1$ équations différentielles ordinaires pour les $n+2$ variables, ou bien à un système complet. Un complément essentiel des développements de ces trois premiers paragraphes est fourni par les considérations du § 4 sur la forme des équations aux différences partielles qui dérivent d'intégrales générales d'une certaine forme en les différentiant et éliminant les fonctions arbitraires. Cette forme des intégrales est $F=\varphi(f)$, où F et f représentent des fonctions des $n+2$ variables, et φ une fonction arbitraire. Tandis que l'équation aux différentielles partielles dérivée de cette forme d'intégrale est toujours linéaire s'il y a une seule variable dépendante, elle contient en outre, dans le cas de plusieurs variables dépendantes, des termes tels que $q_r p_s - p_r q_s$, où p_i et q_i sont les dérivées des n variables dépendantes prises respectivement par rapport aux deux variables indépendantes. Il existe encore une autre différence entre ces deux cas : c'est qu'il existe, lorsqu'il y a plus d'une variable dépendante, certaines relations entre les coefficients de l'équation dérivée, au nombre de $\frac{1}{2}n(n-1)$. En confirmant ainsi la solution donnée dans les premiers paragraphes, on est conduit en même temps à intégrer ces équations simultanées aux différentielles partielles où entrent les agrégats du second ordre mentionnés ci-dessus, pourvu qu'il existe certaines équations de condition entre leurs coefficients. Enfin l'auteur applique sa méthode à l'intégration d'une équation de $m^{\text{ième}}$ ordre aux différentielles partielles ; M. Natani avait déjà établi la forme de cette équation différentielle, qui est une généralisation de celle d'Ampère, et en même temps il avait indiqué une voie pour l'intégrer.

Kostka. — *Sur la détermination des fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique par ses coefficients.* (9 p.)

C'est en construisant la *fonction génératrice* que M. Borchardt a montré la source de toutes les méthodes employées pour atteindre le but indiqué par le titre, et M. Mertens a complété cette recherche. Actuellement M. Kostka fait voir que la forme fondamentale, d'où découlent toutes les autres fonctions symétriques, admet une détermination par des considérations simples de permutation et de combinaison.

Stern (M.).— *Sur une propriété des nombres de Bernoulli.* (5 p.)

Généralisation d'un théorème de v. Staudt.

Lipschitz (R.). — *Généralisation de la théorie du rayon osculateur d'une surface.* (7 p.; fr.)

Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de Paris, séances des 10 et 17 janvier 1876. — Comparaison de sa méthode de généralisation avec celle de M. C. Jordan.

Simon (Max.). — *Multiplication des fonctions elliptiques par des nombres entiers, dans son rapport avec le problème des polygones fermés inscrits aux courbes.* (23 p.)

Le problème de la division du cercle dépend de la multiplication des fonctions cycliques; le problème d'inscrire certains polygones fermés à des courbes, par exemple d'inscrire un polygone fermé à une conique donnée, de sorte que ses côtés touchent une autre conique donnée, et d'autres pour les courbes du troisième et du quatrième degré, se lie à la multiplication des fonctions elliptiques. Le Mémoire de Jacobi, où il a découvert cette relation et résolu le problème pour deux cercles (non concentriques), a donné lieu à une série de travaux scientifiques. M. Simon, élève de M. Weierstrass, traite le problème spécial de deux coniques générales que nous venons de mentionner. Son travail donne des formules très-élégantes, tant pour la multiplication des fonctions elliptiques sous la forme normale de M. Weierstrass que pour la solution du problème spécial, où les seules constantes qu'il fait entrer sont les invariants simultanés des deux coniques.

Pochhammer (L.). — *Sur les vitesses de propagation des petites oscillations dans un cylindre circulaire infini et isotrope.* (13 p.)

Les recherches mathématiques de Bernoulli, d'Euler, de Poisson, de Cauchy sur les oscillations de cylindres de longueur finie font abstraction de certaines parties intégrantes du mouvement; d'où il s'ensuit que leurs calculs ne peuvent être regardés comme exacts que pour le cas de cylindres infiniment minces, cas pour lequel M. Kirchhoff a développé la déduction systématique des équations différentielles. Une méthode plus rigoureuse demande qu'on cherche à intégrer les trois équations différentielles de l'élasticité et qu'on prenne en considération les conditions à la surface. C'est ainsi que M. Pochhammer a tâché de procéder pour fixer exactement les vitesses de propagation des oscillations dans un cylindre infini à base circulaire.

KIEPERT (L.). — *Sur les surfaces minima.* 1er Mémoire. (12 p.)

Ce Mémoire est désigné par l'auteur comme une étude préparatoire; on y trouve une série de formules destinées à être employées dans les recherches ultérieures.

BRUNS. — *Sur un théorème de la théorie du potentiel.* (8 p.)

Cette Note a été occasionnée par le Mémoire de M. Stahl, t. 79 du même *Journal* (1). Nous citerons ici le passage qui donne les conclusions auxquelles M. Bruns est conduit sur la forme de la Terre.

« ... D'après les explications données, on peut dire ceci sur la surface mathématique qui renferme le solide de la Terre : Elle est une surface fermée, continue; la direction de la normale change d'une manière continue; elle est dépourvue d'arêtes, de sommets ou de points singuliers analogues, parce que la gravité possède partout une valeur différente de zéro. D'après ce que nous savons sur la composition de la couche superficielle de la Terre, elle passe par des lieux où la densité varie d'une manière discontinue; donc elle n'est pas formée d'une seule surface analytique, mais elle est soumise à différentes lois de formation sur différents points. La loi de la formation est la même pour tous les points de la surface qui sont compris dans une couche matérielle continue, à l'intérieur de laquelle la densité est constante ou variable d'après une certaine loi analytique. Aux lieux de transition, il y a variation subite de la courbure moyenne, de la mesure de courbure et des azimuts des lignes de courbure.... »

E. L.

(1) Voir *Bulletin*, t. X, p. 183.