Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

JULES TANNERY

# Sur le plan osculateur aux cubiques gauches

*Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, tome 11 (1876), p. 183-192

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1876__11__183_1>

---

## SUR LE PLAN OSCULATEUR AUX CUBIQUES GAUCHES;

PAR M. JULES TANNERY.

Dans une thèse récemment soutenue devant la Faculté des Sciences de Paris, M. Appell a étudié, après M. Chasles, un système de pôles et de plans polaires relatif aux cubiques gauches. Le travail de M. Appell est fondé sur la considération d'une relation involutive entre trois valeurs de la variable au moyen de laquelle peuvent être exprimées les coordonnées d'un point quelconque de la courbe : l'auteur parvient ainsi, d'une façon très-élégante, et presque sans calculs, à la série de propositions qu'il avait en vue. Il était aisé de prévoir, après la lecture de sa thèse, que l'équation même du plan osculateur devait naturellement conduire à la même série de propositions; c'est, en effet, ce que je vais montrer, d'autant qu'on parvient ainsi à quelques vérités nouvelles.

Je ferai d'abord les remarques suivantes : si

$$x = \mathrm{P}, \quad y = \mathrm{P}_1, \quad z = \mathrm{P}_2, \quad u = \mathrm{P}_3$$

sont les équations d'une courbe unicursale quelconque, $\mathrm{P}$, $\mathrm{P}_1$, $\mathrm{P}_2$, $\mathrm{P}_3$ étant des polynômes entiers, homogènes, du degré $n$ en $t$, $s$, la tangente au point $(t, s)$ joindra les deux points dont les coordonnées sont

$$\mathrm{P}, \quad \mathrm{P}_1, \quad \mathrm{P}_2, \quad \mathrm{P}_3,$$

d'une part, et

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathrm{P}_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathrm{P}_2}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathrm{P}_3}{\partial t},$$

de l'autre; ou, si l'on veut, les deux points dont les coordonnées sont

$$\frac{\partial P}{\partial t},\quad \frac{\partial P_1}{\partial t},\quad \frac{\partial P_2}{\partial t},\quad \frac{\partial P_3}{\partial t},$$

d'une part, et

$$\frac{\partial P}{\partial s},\quad \frac{\partial P_1}{\partial s},\quad \frac{\partial P_2}{\partial s},\quad \frac{\partial P_3}{\partial s},$$

de l'autre. Le plan osculateur au même point passera par les trois points dont les coordonnées sont respectivement

$$\begin{array}{cccc} P, & P_1, & P_2, & P_3; \\ \dfrac{\partial P}{\partial t}, & \dfrac{\partial P_1}{\partial t}, & \dfrac{\partial P_2}{\partial t}, & \dfrac{\partial P_3}{\partial t}; \\ \dfrac{\partial^2 P}{\partial t^2}, & \dfrac{\partial^2 P_1}{\partial t^2}, & \dfrac{\partial^2 P_2}{\partial t^2}, & \dfrac{\partial^2 P_3}{\partial t^2}; \end{array}$$

ou, si l'on veut, par les trois points dont les coordonnées sont respectivement

$$\begin{array}{cccc} \dfrac{\partial^2 P}{\partial t^2}, & \dfrac{\partial^2 P_1}{\partial t^2}, & \dfrac{\partial^2 P_2}{\partial t^2}, & \dfrac{\partial^2 P_3}{\partial t^2}; \\ \dfrac{\partial^2 P}{\partial t\,\partial s}, & \dfrac{\partial^2 P_1}{\partial t\,\partial s}, & \dfrac{\partial^2 P_2}{\partial t\,\partial s}, & \dfrac{\partial^2 P_3}{\partial t\,\partial s}; \\ \dfrac{\partial^2 P}{\partial s^2}, & \dfrac{\partial^2 P_1}{\partial s^2}, & \dfrac{\partial^2 P_2}{\partial s^2}, & \dfrac{\partial^2 P_3}{\partial s^2}. \end{array}$$

Cela posé, si l'on a affaire à une cubique gauche, on prendra

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} P &= at^3 + 3\,bt^2s + 3\,cts^2 + ds^3, \\ P_1 &= a't^3 + 3\,b't^2s + 3\,c'ts^2 + d's^3, \\ P_2 &= a''t^3 + 3\,b''t^2s + 3\,c''ts^2 + d''s^3, \\ P_3 &= a'''t^3 + 3\,b'''t^2s + 3\,c'''ts^2 + d'''s^3; \end{aligned}\right.$$

et l'équation du plan osculateur au point $(t, s)$ sera

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} x & at + bs & bt + cs & ct + ds \\ y & a't + b's & b't + c's & c't + d's \\ z & a''t + b''s & b''t + c''s & c''t + d''s \\ u & a'''t + b'''s & b'''t + c'''s & c'''t + d'''s \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation montre déjà que par un point quelconque de l'espace on peut mener trois points osculateurs à la cubique ; les coordonnées de ces trois points seront déterminées par les trois valeurs de $\frac{t}{s}$ que l'on tirera de cette équation, en y regardant $x, y, z, u$ comme données.

Cette équation développée et ordonnée peut s'écrire

$$(3) \qquad \mathrm{X}s^3 - \mathrm{Y}ts^2 + \mathrm{Z}t^2s - \mathrm{U}t^3 = 0,$$

en faisant

$$(4) \qquad \begin{cases} \mathrm{X} = \mathrm{A}x + \mathrm{A}'y + \mathrm{A}''z + \mathrm{A}'''u, \\ \mathrm{Y} = \mathrm{B}x + \mathrm{B}'y + \mathrm{B}''z + \mathrm{B}'''u, \\ \mathrm{Z} = \mathrm{C}x + \mathrm{C}'y + \mathrm{C}''z + \mathrm{C}'''u, \\ \mathrm{U} = \mathrm{D}x + \mathrm{D}'y + \mathrm{D}''z + \mathrm{D}'''u, \end{cases}$$

A, A′, ... étant les mineurs relatifs à $a$, $a'$, ... du déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix}.$$

L'équation (3) peut aussi être considérée comme étant l'équation du plan osculateur au point $(t, s)$, dans le système de coordonnées tétraédriques X, Y, Z, U : dans ce système, les équations de la cubique gauche prennent la forme simple

$$(5) \qquad \mathrm{X} = t^3, \quad \mathrm{Y} = 3t^2s, \quad \mathrm{Z} = 3ts^2, \quad \mathrm{U} = s^3;$$

enfin, en écrivant que l'équation (3) en $\frac{t}{s}$ a deux racines égales, on obtiendra l'équation de la surface développable du quatrième ordre dont la cubique gauche est l'arête de rebroussement.

Revenant à l'équation (2) du plan osculateur au point $(t, s)$ de la cubique et désignant par $x', y', z', u'$ les coordonnées de ce point, on la mettra successivement sous les deux formes suivantes :

$$\begin{vmatrix} x & x' & at+bs & bt+cs \\ y & y' & a't+b's & b't+c's \\ z & z' & a''t+b''s & b''t+c''s \\ u & u' & a'''t+b'''s & b'''t+c'''s \end{vmatrix} = 0,$$

$$s\begin{vmatrix} x & x' & b & c \\ y & y' & b' & c' \\ z & z' & b'' & c'' \\ u & u' & b''' & c''' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x' & a & bt^2+cts \\ y & y' & a' & b't^2+c'ts \\ z & z' & a'' & b''t^2+c''ts \\ u & u' & a''' & b'''t^2+c'''ts \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en remplaçant $bt^2+cts, \ldots$ par $\dfrac{x^2-at^3-ds^3}{3s}, \ldots,$ divisant par $s^2$ et simplifiant le second déterminant,

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} x & x' & b & c \\ y & y' & b' & c' \\ z & z' & b'' & c'' \\ u & u' & b''' & c''' \end{vmatrix} - \frac{1}{3}\begin{vmatrix} x & x' & a & d \\ y & y' & a' & d' \\ z & z' & a'' & d'' \\ u & u' & a''' & d''' \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est l'équation du plan osculateur au point $x', y', z', u'$ de la cubique. Si $x', y', z', u'$ sont les coordonnées d'un point quelconque de l'espace, on aperçoit de suite, en vertu de la symétrie par rapport à $x, y, z, u$, d'une part, $x', y', z', u'$, de l'autre, que cette même équation représente le plan des trois points de contact des trois plans osculateurs à la cubique que l'on peut mener par le point $x', y', z', u'$ : ce plan passe par ce dernier point, qui peut en être regardé comme le pôle. Au surplus, l'équation (6) se présente sous la forme de l'équation d'un *complexe* du premier ordre; de là, la série des propositions établies par M. Appell. On mettra l'équation de ce complexe sous la forme habituelle

$$\begin{aligned} A(x-x') + B(y-y') + C(z-z') + A_1(yz'-y'z) \\ + B_1(zx'-z'x) + C_1(xy'-x'y) = 0, \end{aligned}$$

en faisant

$$\begin{aligned} A &= 3(b'c''-b''c') - (a'd''-a''d'), \\ B &= 3(b''c-bc'') - (a''d-ad''), \\ C &= 3(bc'-b'c) - (ad'-a'd); \\ A_1 &= 3(bc'''-cb''') - (ad'''-da'''), \\ B_1 &= 3(b'c'''-c'b''') - (a'd'''-d'a'''), \\ C_1 &= 3(b''c'''-c''b''') - (a''d'''-d''a'''). \end{aligned}$$

Dans le système de coordonnées tétraédriques défini par les équations (4), l'équation de ce complexe ou du plan osculateur au point X', Y', Z', U' de la cubique, ou encore l'équation du plan *polaire* du point X', Y', Z', U' de l'espace, prendra la forme simple

$$XU' - X'U - \frac{1}{3}(YZ' - Y'Z) = 0.$$

Si l'on se reporte à l'équation (6) et si l'on désigne par A, B, C, D les points dont les coordonnées sont respectivement

$$\begin{matrix} a, & a', & a'', & a''', \\ b, & b', & b'', & b''', \\ c, & c', & c'', & c''', \\ d, & d', & d'', & d''', \end{matrix}$$

on aperçoit immédiatement que les deux droites AD d'une part, BC de l'autre sont deux droites conjuguées du complexe; si, en effet, P est le point dont les coordonnées sont $x'$, $y'$, $z'$, $u'$, le premier déterminant égalé à zéro représente le plan PBC; le second, égalé de même à zéro, le plan PAD : le plan représenté par l'équation (2), à savoir, si l'on veut, le plan polaire du point P, passe par l'intersection de ces deux plans, ou par la droite menée par P qui rencontre les deux droites AD, BC. Cette remarque conduira immédiatement à l'identification d'un complexe tel que (2) avec un complexe donné du premier ordre; si, en effet, AD, BC sont deux droites conjuguées de ce dernier, et si l'on désigne par les mêmes notations que ci-dessus les coordonnées des points A, B, C, D, on reconnaît de suite que l'équation du complexe donné devra être de la forme

$$\begin{vmatrix} x & x' & b & c \\ y & y' & b' & c' \\ z & z' & b'' & c'' \\ u & u' & b''' & c''' \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} x & x' & a & d \\ y & y' & a' & d' \\ z & z' & a'' & d'' \\ u & u' & a''' & d''' \end{vmatrix} = 0,$$

$\lambda$ étant une certaine constante qui sera donnée avec le complexe; il est bien aisé de mettre cette dernière équation sous la forme (6), et de trouver par conséquent une cubique gauche, telle que le complexe du premier ordre qui s'en déduit comme il a été expliqué précédemment coïncide avec le complexe donné.

Observons encore que la droite AD est une corde de la cubique, que AB est la tangente au point A, DC la tangente au point C, que ABC est le plan osculateur au point A et DBC le plan osculateur au point D; qu'ainsi BC est l'intersection de ces deux plans osculateurs : tout cela résulte immédiatement des remarques qui ont été faites au début.

Enfin, les plans $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, $U = 0$ sont respectivement les plans BCD, ADC, ABD, ABC.

Les points AD sont des points particuliers de la cubique correspondant respectivement aux valeurs particulières $s = 0$, $t = 0$; mais on les remplacera aisément par deux points quelconques de cette même courbe, en employant la substitution

$$t = \lambda t_1 + \lambda' s_1,$$
$$s = \mu t_1 + \mu' s_1;$$

$a$, $b$, ... seront remplacés par $a_1$, $b_1$, ..., en faisant

$$a_1 = a\lambda^3 + 3b\lambda^2\mu + 3c\lambda\mu^2 + d\lambda^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On remarquera d'abord, en passant, que, si l'on remplace $a$, $b$, ... par $a_1$, $b_1$, ..., dans les coefficients du complexe, ces coefficients se reproduiront, multipliés par le cube du déterminant $\lambda\mu' - \lambda'\mu$ de la substitution. Soient maintenant $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ les quatre points qui remplacent A, B, C, D et qui jouissent des mêmes propriétés; regardons momentanément $\lambda$, $\mu$ comme fixes, $\lambda'$, $\mu'$ comme variables. Le point $A_1$ restera fixe et le point $D_1$ décrira la cubique; le point $B_1$, dont les coordonnées sont

$$x = \frac{\partial a_1}{\partial \lambda}\lambda' + \frac{\partial a_1}{\partial \mu}\mu',$$
$$y = \frac{\partial a'_1}{\partial \lambda}\lambda' + \frac{\partial a'_1}{\partial \mu}\mu',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

décrira la droite qui joint les deux points E, F dont les coordonnées sont respectivement

$$x = \frac{\partial a_1}{\partial \lambda} = 3(a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2),$$
$$y = \frac{\partial a'_1}{\partial \lambda} = 3(a'\lambda^2 + 2b'\lambda\mu + c'\mu^2),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

d'une part, et

$$x = \frac{\partial a_1}{\partial \mu} = 3(b\lambda^2 + 2c\lambda\mu + d\mu^2),$$
$$y = \frac{\partial a'_1}{\partial \mu} = 3(b'\lambda^2 + 2c'\lambda\mu + d'\mu^2),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

de l'autre. Cette droite EF est la tangente en $A_1$, les points E et F sont les points où elle perce respectivement les plans ABC, BCD, osculateurs en A et D ; ils décrivent dans ces deux plans, lorsque $\lambda, \mu$ varient, et que, par suite, $A_1$ décrit la cubique, deux coniques $(\alpha)$, $(\delta)$, tangentes la première à AB en A et à BC en C, la deuxième à BC en B et à CD en D : ces deux coniques sont les intersections des deux plans osculateurs ABC, BCD avec la surface développable dont la cubique est l'arête de rebroussement.

Si on laisse encore $\lambda, \mu$ fixes et si l'on fait varier $\lambda', \mu'$, le point $C_1$, dont les coordonnées sont

$$x = \frac{\partial^2 a_1}{\partial \lambda^2}\lambda'^2 + 2\frac{\partial^2 a_1}{\partial \lambda\,\partial \mu}\lambda'\mu' + \frac{\partial^2 a_1}{\partial \mu^2}\mu'^2,$$
$$y = \frac{\partial^2 a'_1}{\partial \lambda^2}\lambda'^2 + 2\frac{\partial^2 a'_1}{\partial \lambda\,\partial \mu}\lambda'\mu' + \frac{\partial^2 a'_1}{\partial \mu^2}\mu'^2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

décrit une conique $(\alpha_1)$ située dans le plan des trois points P, Q, R, dont les coordonnées sont respectivement

$$x = \frac{\partial^2 a_1}{\partial \lambda^2} = 6(a\lambda + b\mu),$$
$$y = \frac{\partial^2 a'_1}{\partial \lambda^2} = 6(a'\lambda + b'\mu),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

pour le point P;

$$x = \frac{\partial^2 a_1}{\partial\lambda\,\partial\mu} = 6(b\lambda + c\mu),$$

$$y = \frac{\partial^2 a'_1}{\partial\lambda\,\partial\mu} = 6(b'\lambda + c'\mu),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

pour le point Q;

$$x = \frac{\partial^2 a_1}{\partial\mu^2} = 6\,(c\lambda + d\mu),$$

$$y = \frac{\partial^2 a'_1}{\partial\mu^2} = 6\,(c'\lambda + d'\mu),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

pour le point R. Ce plan PQR est le plan osculateur en $A_1$ : les points P, Q, R situés respectivement sur les droites AB, BC, CD sont, par suite, les points d'intersection de ces droites avec le plan osculateur; en outre, les droites PQ, QR sont respectivement tangentes en E et F aux coniques $(\alpha)$ et $(\delta)$ : lorsque, $\lambda$ et $\mu$ venant à varier, le point $A_1$ décrit la cubique, les points P, Q, R décrivent respectivement sur les trois droites AB, BC, CD trois divisions homographiques : ainsi, un plan osculateur à une cubique gauche, en se mouvant autour de cette cubique, trace sur deux tangentes quelconques deux divisions homographiques [1]. En vertu des équations qui la déterminent, la conique $(\alpha_1)$ est tangente à PQ en P et à QR en R. En un point quelconque $(\lambda', \mu')$ de cette conique, la tangente joint les deux points dont les coordonnées sont

$$\frac{\partial^2 a_1}{\partial\lambda^2}\lambda' + \frac{\partial^2 a_1}{\partial\lambda\,\partial\mu}\mu',$$

$$\frac{\partial^2 a'_1}{\partial\lambda^2}\lambda' + \frac{\partial^2 a'_1}{\partial\lambda\,\partial\mu}\mu',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

d'une part, et

$$\frac{\partial^2 a_1}{\partial\lambda\,\partial\mu}\lambda' + \frac{\partial^2 a_1}{\partial\mu^2}\mu',$$

$$\frac{\partial^2 a'_1}{\partial\lambda\,\partial\mu}\lambda' + \frac{\partial^2 a'_1}{\partial\mu^2}\mu',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

---

(1) Ce théorème est dû à M. Chasles (*Journal de Mathématiques*, 1857.)

de l'autre; les coordonnées du point $B_1$ pouvant s'écrire

$$\left(\frac{\partial^2 a_1}{\partial \lambda_1}\lambda' + \frac{\partial^2 a_1}{\partial \lambda\, \partial \mu}\mu'\right)\lambda + \left(\frac{\partial^2 a_1}{\partial \lambda\, \partial \mu}\lambda' + \frac{\partial^2 a_1}{\partial \mu^2}\mu'\right)\mu,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

On voit que $B_1$ est sur la tangente en $C_1$; enfin, en faisant $\lambda' = \lambda$, $\mu' = \mu$, on voit que la conique $(\alpha_1)$ passe en $A_1$ et qu'elle est tangente en ce point à la tangente $A_1B_1$ à la cubique : au reste, tous ces résultats se coordonnent en remarquant que, d'après sa définition même, la conique $(\alpha_1)$ est l'intersection du plan osculateur en $A_1$ à la cubique et de la développable du quatrième ordre circonscrite à cette cubique. Sur ce plan, la conique $(\alpha_1)$ est tracée par une tangente $D_1C_1$ à la cubique quand le point de contact $D_1$ décrit cette cubique, et enveloppée par l'intersection $B_1C_1$ du plan osculateur en $D_1$.

De ce qu'elle est tangente en $A_1$ à la droite $A_1B_1$ ou EF, et aux points P, R aux droites PQ et QR, on conclut que le point $A_1$ est conjugué harmonique, par rapport aux points E, F du point d'intersection des droites EF et PR : de là on peut déduire la construction point par point d'une cubique gauche et aussi la construction en un point quelconque du plan osculateur et de la tangente.

Étant donnés quatre points A, B, C, D; une première conique $(\alpha)$ située dans le plan ABC, tangente à AB en A, à BC en C; une deuxième conique $(\delta)$, située dans le plan BCD, tangente à CD en D et à BC en B; il existe une cubique gauche tangente à AB en A, à CD en D, admettant comme plans osculateurs en A et D les plans ABC, BCD, telle enfin que la surface développable qui lui est circonscrite passe par les coniques $(\alpha)$ et $(\delta)$.

D'un point quelconque Q situé sur la tangente commune BC aux deux coniques $(\alpha)$ et $(\delta)$, menons à ces deux coniques les secondes tangentes QE, QF qui rencontrent respectivement les droites AB, CD en P et R : le plan QEF sera un plan tangent à la surface développable circonscrite (ou un plan osculateur à la cubique), la droite EF sera une génératrice de la surface développable (ou une tangente à la cubique), enfin le point conjugué harmonique par rapport aux points E, F du point d'intersection de EF et de QR sera un point de la cubique, où EF sera la tangente et le plan QEF sera le plan osculateur.

Si $a$, $a'$, $a''$, $a'''$; $b$, $b'$, $b''$, $b'''$; ... sont les coordonnées des points A, B, C, D, les équations de la cubique seront de la forme

$$x = at^3 + 2\lambda bt^2s + 2\mu cts^2 + ds^3,$$
$$y = a't^3 + 2\lambda b'ts + 2\mu c'ts^2 + ds^3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$\lambda$ et $\mu$ étant deux constantes qui dépendent des coniques $(\alpha)$, $(\delta)$.