BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Revue des publications périodiques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 11 (1876), p. 114-125

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1876__11__114_1>

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

УЧЕНЫЯ ЗАПИСКИ Имп. Казанскаго Университета ([1]).

Année 1872.

VINOGRADSKY (V.-N.) — *De la détermination des orbites des étoiles doubles.* (60 p.)

Le problème de la détermination des orbites des étoiles doubles, quoique assez simple théoriquement, présente cependant de grandes difficultés pratiques, par suite des erreurs résultant de la petitesse extrême d'un des éléments observés.

Les observations directes des distances apparentes ρ de l'astre mobile à l'astre fixe et des angles de position θ permettent d'obtenir, à l'aide des formules $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, un certain nombre des

([1]) *Mémoires scientifiques de l'Université Impériale de Kazan.* Ces Mémoires, écrits en langue russe, sont publiés chaque année en plusieurs fascicules grand in-8°.

coordonnées orthogonales de la projection de l'orbite sur un plan perpendiculaire au rayon visuel de l'observateur, et passant par le centre de l'astre fixe. On peut donc, soit graphiquement, soit en substituant les valeurs de x et y dans l'équation générale des coniques, tracer ou calculer les éléments de la projection de l'orbite et en déduire l'angle du plan de l'orbite avec sa projection, la position des nœuds et enfin les éléments de l'orbite réelle.

Les premiers essais de solution de ce problème, faits par Savary [1], sont fondés sur les propriétés des diamètres conjugués. Les éléments sont déterminés par un tâtonnement long et pénible. Encke [2] a cherché à modifier les formules de Savary ; mais sa méthode, consistant dans la détermination des deux inconnues à l'aide des trois équations, conduit à des calculs répétés, très-pénibles, quoique un peu facilités par les Tables qu'il a dressées.

Sir John Herschel [3] a donné une solution purement géométrique. Sa méthode consiste dans le tracé d'une courbe représentative, ayant les époques d'observation pour abscisses et les angles de position pour ordonnées. Une fois cette courbe tracée, la connaissance de ses tangentes donne les variations de la vitesse angulaire et par conséquent les distances, avec lesquelles on peut construire la perspective de l'orbite, déterminer ensuite ses axes et le diamètre passant par l'astre fixe. En 1849, le même astronome [4] a indiqué une autre méthode où les éléments de l'orbite projetée ne sont plus déterminés graphiquement, mais par le calcul.

Presque en même temps, M. Yvon Villarceau, en partant du même principe que Herschel, a exposé, dans la *Connaissance des temps* pour 1852, une méthode analytique où, pour déterminer les éléments de l'orbite projetée, il développe ρ et θ, et par suite x et y en séries, en fonction des puissances du temps, et donne des formules exprimant les paramètres cherchés en fonction de x, y et de leurs dérivées.

Enfin Klinkerfues [5] a indiqué une méthode de détermination

---

(1) *Connaissance des temps*, 1830.

(2) *Astronomisches Jahrbuch*, 1832.

(3) *Memoirs of the Royal Astronomical Society*, vol. V.

(4) *Memoirs of the Royal Astronomical Society*, vol. XVIII.

(5) *Ueber eine neue Methode, die Bahnen der Doppelsterne zu berechnen*. Göttingen, 1855.

8.

directe de l'orbite réelle, fondée sur l'égalité des rapports entre les aires des triangles dans cette orbite et les projections de ces aires.

Après cet aperçu historique de la question, M. Vinogradsky expose la méthode de Herschel, que nous reproduirons en quelques mots :

Soient r, v les coordonnées polaires de l'orbite réelle, et ρ et θ les coordonnées observées de l'orbite projetée; on a, d'après la deuxième loi de Kepler,

$$r^2 \frac{dv}{dt} = k \quad \text{et} \quad \rho^2 \frac{d\theta}{dt} = k \cos i = c^2,$$

i étant l'angle des projections. En supposant $\frac{d\theta}{dt}$ connue, et en posant $c^2 = 1$, on calculera une série des valeurs de ρ exprimées en fonction de cette unité arbitraire; on aura alors un certain nombre d'équations de la forme

$$\rho\,(\text{observé}) = \frac{c}{\sqrt{\frac{d\theta}{dt}}} \quad \text{et} \quad \rho_1\,(\text{calculé}) = \frac{1}{\sqrt{\frac{d\theta}{dt}}},$$

d'où

$$c = \frac{\Sigma \rho_1}{\Sigma \rho}.$$

Quant à $\frac{d\theta}{dt}$, on aura, en posant

$$\theta = A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + \ldots,$$
$$\frac{d\theta}{dt} = B + 2Ct + 3Dt^2 + \ldots,$$

une série d'équations à l'aide desquelles on déterminera les coefficients A, B, C,... soit par la méthode des moindres carrés, soit à l'aide des méthodes d'interpolation de Cauchy (¹) ou de Tchebychef (²). On calculera ensuite une série des valeurs de θ_1, θ_2, θ_3, ..., ρ_1, ρ_2, ρ_3, ..., correspondant aux époques d'observation t_1, t_2, t_3, ...; puis une série des valeurs de $x_1 = \rho_1 \cos\theta_1$, ..., $y_1 = r_1 \sin\theta_1$, ...,

(¹) CAUCHY, *Mémoire sur l'interpolation* (*Journal de Liouville*, IX, 1837). — VILLARCEAU, *Méthode d'interpolation de M. Cauchy* (*Connaissance des temps*, 1852).

(²) *Sur l'interpolation par la méthode des moindres carrés* (*Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, t. I, 1859).

et l'on obtiendra ainsi un certain nombre d'équations

$$\alpha x + \beta y + \gamma x^2 + \delta xy + \varepsilon y^2 + 1 = 0, \tag{1}$$

dans lesquels les coefficients α, β, γ, ... sont inconnus.

Les valeurs de ces coefficients peuvent être obtenues par la méthode des moindres carrés, et, connaissant ces valeurs, on calculera sans difficulté les paramètres de la projection de l'orbite, lesquels étant connus, on pourra tracer cette projection, et par des considérations géométriques obtenir ensuite des formules donnant les valeurs des éléments de l'orbite réelle.

Les valeurs de ρ étant exprimées en unité arbitraire, la valeur du demi-axe a sera aussi exprimée en même unité. En calculant avec a ainsi obtenu les valeurs de ρ correspondantes aux temps connus, et en les comparant avec les ρ observés, on obtiendra la grandeur de l'unité arbitraire, et par suite la vraie valeur de a.

L'auteur applique ce procédé au calcul des éléments de l'orbite de l'étoile du ξ Bouvier, en prenant pour base les observations faites par Herschel, O. Struve, Dembowski.

Voici le tableau de ces éléments ainsi que de leurs valeurs calculées par Herschel :

	Vinogradsky.	Herschel.
Demi-grand axe..................	$a = 5'',425$	$12'',56$
Excentricité..................	$e = 0,64099$	$0,59374$
Inclinaison..................	$i = 48^\circ 25',5$	$80^\circ 5'$
Longitude du nœud..........	$\Omega = 11^\circ 35',6$	$359^\circ 59'$
Position du périastre par rapport à l'origine.............	$\varpi = 147^\circ 14',0$	$138^\circ 24'$
Longitude du périastre comptée à partir du nœud sur l'orbite réelle.....................	$\lambda = 124^\circ 9'4$	$100^\circ 59'$
Époque du passage au périastre..................	$T = 1767^{\text{ans}},76$	$1779,96$
Mouvement moyen..........	$n = -2^\circ,5597$	$-3^\circ,0733$
Durée de révolution........	$\tau = 140^{\text{ans}},64$	$117^{\text{ans}},14$

Dans une brève analyse du précédent Mémoire, M. Kowalski, professeur à l'Université de Kazan, fait à propos de la méthode de Herschel plusieurs remarques importantes, que nous jugeons utile de reproduire.

Dans la plupart des cas, les distances ρ sont excessivement petites et les erreurs de leur observation sont très-comparables avec leur grandeur; souvent même il est impossible de les mesurer directement, et l'on se borne à les calculer d'après les valeurs des θ. On pourrait donc introduire directement dans le calcul les éléments θ et t, pouvant être observés avec beaucoup plus d'exactitude, quoique dans ce cas les résolutions d'équations du second degré fussent remplacées par celles d'équations transcendantes.

Dans la méthode de Herschel, après avoir évalué les coefficients α, β, γ, δ, ε et l'équation générale de la projection (1), on détermine en premier lieu les éléments de cette projection. Or l'équation (1) peut servir à la détermination directe de l'orbite réelle. En effet, si les coefficients α, β, ... sont suffisants pour déterminer les constantes de l'équation

$$z = mx + ny \tag{2}$$

du plan de l'ellipse réelle, ces constantes doivent être fonctions de ces coefficients. En outre, une des conditions du problème est que l'origine des coordonnées x, y coïncide avec le foyer de l'ellipse située dans le plan (2); donc, en introduisant immédiatement cette condition dans l'équation (1), on pourra en déduire les éléments et la position de l'ellipse réelle.

En désignant par p le paramètre, par λ l'angle du grand axe et de l'intersection du plan (2) avec celui des xy, par ω l'angle de cette intersection avec l'axe des x, l'équation générale de l'ellipse

$$p = r + er\cos v$$

se transforme, en projetant r et ρ sur la ligne des nœuds, en

$$p = e\rho[\sin(\theta - \omega)\sin\lambda\,\text{séc}\,i + \cos(\theta - \omega\cos\lambda] + \rho\sqrt{1 + \tan^2 i \sin^2(\theta - \omega)}.$$

En y introduisant $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, on aura une équation du second degré en x et y, et, en comparant ses coefficients de cette nouvelle équation avec ceux de l'équation (1), on obtiendra les cinq relations :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\tan g^2 i}{p^2}\sin 2\omega = \delta - \frac{1}{2}\alpha\beta,\\ &\frac{\tan g^2 i}{p^2}\cos 2\omega = (\gamma-\varepsilon) - \frac{1}{4}(\alpha^2-\beta^2),\\ &\frac{2}{p^2} + \frac{\tan g^2 i}{p^2} = -(\gamma+\varepsilon) + \frac{1}{4}(\alpha^2+\beta^2),\\ &e\sin\lambda = -\frac{p}{2}(\beta\cos\omega - \alpha\sin\omega)\cos i,\\ &e\cos\lambda = -\frac{p}{2}(\beta\sin\omega + \alpha\cos\omega), \end{aligned}\right.$$

qui expriment les éléments de l'orbite réelle, p, e, ω, i et λ, en fonction des coefficients α, β, γ, δ et ε.

Le calcul des coefficients α, β, ... est assez difficile, même dans le cas où le nombre d'équations serait réduit à cinq, tandis que la méthode des moindres carrés, appliquée au calcul des coefficients des séries périodiques, est assez facile. Pour obtenir une pareille série, supposons que les observations de θ et ρ sont faites à des intervalles égaux α, assez petits pour que $\frac{360}{\alpha} > 5$ et qu'elles embrassent un arc de $360^\circ - \alpha$. Dans ce cas, en développant le radical de l'équation (3) suivant les cosinus des multiples de $\theta - \omega$, on peut introduire cinq nouvelles inconnues auxiliaires, exprimées en séries périodiques, et qui permettent de déterminer les éléments cherchés.

On peut observer, à propos de cette dernière remarque, que ce procédé, tout en rendant le calcul facile, n'est applicable que dans le cas où l'on possède des observations le long de l'orbite presque entière, ce qui n'est pas le cas général.

VINOGRADSKY (N.-V.) — *Détermination de l'orbite du compagnon de l'étoile μ^2 du Bouvier.* (15 p.)

Application des formules (4) données par M. Kowalski au calcul de l'orbite du compagnon de μ^2 du Bouvier, si ce n'est que les coefficients α, β, γ, ... ont été déterminés à l'aide d'équations de la forme (1) par la méthode des moindres carrés.

Voici les résultats obtenus par l'auteur, comparés avec les résultats trouvés par Wilson :

	Vinogradsky.	Wilson.
Longitude du nœud comptée à partir de l'axe des x....	$\Omega = 166°8'$	$172°,0$
Inclinaison................	$i = 47°31'$	$45°$
Longitude du périastre comptée à partir du nœud sur l'orbite réelle...........	$\lambda = 23°1'$	$20°5'$
Excentricité...............	$e = 0,491$	$0,51$
Position du périastre à partir de l'axe des x...........	$\mu = 182°8'$	$186°30'$
Mouvement moyen.........	$n = -1°,972$	$-1°,7$
Époque de passage au périastre....................	$T = 1866^{ans},00$	$1965^{ans},2$
Durée de la révolution.....	$\tau = 182^{ans},6$	$200,4$
Demi-grand axe............	$a = 1'',165$	»

Vassilief (A). — *De la détermination du nombre de racines des équations simultanées.* (26 p.)

En considérant les fonctions de n variables comme représentant les points d'un système de n dimensions, le nombre des racines sera le nombre des points d'intersection de n systèmes de $n-1$ dimensions, et sa recherche sera amenée à celle de la caractéristique d'un système de $n-1$ fonctions. A. P.

NOUVELLES ANNALES de Mathématiques, rédigées par MM. Gerono et Ch. Brisse.

T. XV (2e série); 1876 [1].

Lucas (É.). — *Problèmes sur l'ellipse.* (3 p.)

Sur la construction géométrique des normales à une conique. — Sur la corde normale maximum. — Sur le triangle inscrit et concentrique à l'ellipse. — *Voir* aussi *Nouvelles Annales*, 2e série, t. VII, p. 523, et t. IX, p. 348; et Salmon, *Traité des sections coniques* (*traduction française*). (p. 306.)

---

[1] Voir *Bulletin*, t. X, p. 32.

Lucas (É.). — *De la trisection de l'angle à l'aide du compas sphérique.* (2 p.)

Interprétation d'un passage d'une lettre de Descartes. — *Voir* aussi *Nouvelles Annales*, 2e série, t. III, p. 222.

Laguerre. — *Sur les lignes géodésiques des surfaces du second ordre.* (2 p.)

Extension à l'espace d'un théorème de Maclaurin relatif à l'ellipse.

Worontzoff. — *Sur les nombres de Bernoulli.* (7 p.)

Cet article contient plusieurs formules renfermant les nombres de Bernoulli, et des applications de ces formules à diverses sommations.

Lucas (É.). — *Théorèmes nouveaux sur la parabole et l'hyperbole.* (2 p.)

L'auteur démontre ou énonce, dans cette étude, vingt-et-un théorèmes relatifs aux aires des triangles et des polygones inscrits à la parabole et à l'hyperbole. — *Voir*, du même auteur, *Nouveaux théorèmes de Géométrie supérieure* (*Bulletin de la Société d'émulation de l'Allier*, 1875).

Rouché (E.). — *Extrait d'une Lettre.*

Réclamation de priorité au sujet d'un article de M. Fontené sur la discussion des équations du premier degré. (*Voir*, pour l'analyse de cet article, *Bulletin*, t. X, p. 35.)

Laguerre. — *Sur la méthode de Monge pour l'intégration des équations linéaires aux différences partielles du second ordre.* (9 p.)

M. Laguerre s'est proposé, dans cet article, de présenter, sous une forme plus nette et plus brève qu'on ne le fait habituellement, la méthode de Monge qui a été élucidée par les travaux d'Ampère, de Boole et de Bour. (*Voir*, du même auteur, un Mémoire *Sur le calcul des systèmes linéaires*, inséré dans le *Journal de l'École Polytechnique*, XLIIe Cahier.)

Lucas (F.). — *Démonstration nouvelle du théorème de Coriolis.* (3 p.)

Il s'agit d'un théorème sur l'accélération apparente dans un mouvement relatif. La démonstration de M. F. Lucas, surtout géométrique, s'appuie sur la considération de mobiles fictifs qui obéiraient seulement au mouvement d'entraînement.

ESCARY. — *Remarque sur la Note de M. Floquet, relative à l'intégration de l'équation d'Euler.* (3 p.)

Voir, pour la Note de M. Floquet : *Nouvelles Annales,* 2e série, t. XIV, p. 120; et, pour l'analyse de cette Note, *Bulletin,* t. IX, p. 174.

LUCAS (É.) — *Question nouvelle d'Arithmétique supérieure.* (2 p.)

Enoncés de neuf questions d'arithmologie.

MOREAU (C.). — *Extrait d'une lettre.*

Sur les permutations : indication de résultats obtenus depuis plusieurs années, et confirmant ceux de M. Vachette.

LUCAS (É.). — *Extrait d'une lettre.*

M. É. Lucas fait ressortir qu'en réalité l'idée de la Cinématique appartient, non pas à Ampère ou à Wronski, mais bien à Carnot, comme le prouvent deux citations extraites de la *Géométrie de position.*

HATON DE LA GOUPILLIÈRE. — *Note sur les courbes que représente l'équation* $\rho^n = \mathrm{A}\sin n\omega$. (11 p.)

L'auteur expose un résumé des propriétés fort remarquables de ces courbes, qui ont été étudiées par Maclaurin, Euler, l'Hospital, Fagnano, Riccati, Lamé, Serret, Ossian Bonnet, W. Roberts, etc. Il a eu soin, pour la plupart de ces propriétés, d'indiquer les sources où l'on pourrait retrouver les démonstrations.

TERRIER (P.) — *Quadrilatères et sections coniques.* (6 p.)

M. Terrier énonce onze nouveaux théorèmes relatifs aux quadrilatères. Cet article fait suite à un précédent, publié dans les *Nouvelles Annales,* 2e série, t. XIV, p. 514. *Voir* aussi *Bulletin,* t. X, p. 35.

VACHETTE. — *Permutations rectilignes de* $3q$ *lettres égales trois à trois, quand trois lettres consécutives sont distinctes; calcul de la formule générale; application.* (12 p.)

Suite d'articles publiés précédemment. *Voir* notamment *Bulletin,* t. X, p. 32 et 34.

NIEWENGLOWSKI (B.). — *Note sur les courbes planes d'ordre n à point multiple d'ordre n — 1*. (2 p.)

Cette Note est relative au mode de génération des courbes dont il s'agit; on y trouve l'expression du rayon vecteur issu du point multiple. *Voir*, sur ce sujet, les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXX, séance du 26 avril 1875.

NIEWENGLOWSKI (B.). — *Sur un théorème de Jacques Bernoulli*. (1 p.)

L'énoncé de ce théorème, relatif au cône oblique, est le suivant, extrait de l'*Aperçu historique* :

« Que l'on mène un plan parallèle à la base du cône, et situé à la même distance de son sommet que le plan de la section conique proposée; ce plan coupera le cône suivant un cercle dont le diamètre sera le *latus rectum* $\frac{2b^2}{a}$ de la conique. »

DEVIN. — *Correspondance*. (1 p.)

Sur cette propriété, que, si deux bissectrices des angles d'un triangle sont égales, le triangle est isoscèle.

VACHETTE. — *Permutations rectilignes de $3q$ lettres égales trois à trois, quand trois lettres consécutives sont distinctes; calcul de la formule générale; application*. (2e art., 22 p.)

Ces articles terminent la série de ceux dont nous avons eu précédemment l'occasion de rendre compte. (*Voir* notamment *Bulletin*, t. X, p. 32.) Les observations que nous avons formulées alors subsistent en entier. Les résultats obtenus ne semblent pas en proportion des efforts faits pour les obtenir et de la difficulté des notations. Dans tous les cas, un semblable travail aurait mieux trouvé sa place dans tout autre recueil mathématique, plutôt que dans les *Nouvelles Annales*, qui, par destination, s'adressent spécialement aux élèves et aux professeurs.

ROUQUET. — *Note sur la continuité des racines des équations algébriques*. (4 p.)

Démonstration de deux théorèmes intéressants sur les variations des coefficients et des racines d'une équation algébrique.

GAMBEY. — *Note sur le rayon de courbure des sections coniques*. (1 p.)

On peut comparer cette Note avec la méthode de M. Bellavitis

(*Exposition de la méthode des équipollences*, p. 147) sur le même sujet.

Lucas (É.). — *Sur la relation de Möbius, qui exprime que quatre points d'un plan sont situés sur un cercle.* (2 p.)

Théorème plus général que celui de Möbius, et donnant la condition pour que quatre cercles soient orthogonaux à un même cercle. *Voir*, pour la relation de Möbius, *Journal de Crelle*, t. XVI, p. 26.

Lucas (É.) — *Sur un problème de Halley relatif à la théorie des sections coniques.* (3 p.)

Ce problème, posé par Halley sous forme astronomique, revient à la construction d'une conique, connaissant un foyer et trois points. La méthode indiquée par M. Lucas est d'une simplicité et d'une originalité remarquables; elle a pour objet de ramener la solution à celle d'un problème très-élémentaire de Géométrie descriptive. Nous croyons la méthode de M. Lucas absolument nouvelle.

Milewski (N.). — *Extrait d'une lettre.*

Énoncés de deux théorèmes très-simples, et qui paraissent nouveaux, sur le triangle rectangle. Ces théorèmes sont dus à M. E. Karatchinsky.

Parmentier (Th.). — *Simplification de la méthode d'interpolation de Thomas Simpson.* (10 p.)

La formule de quadrature du général Parmentier

$$S_3 = h\left(2\Sigma y_i + \frac{y_0 + y_{2n}}{6} - \frac{y_1 + y_{2n-1}}{6}\right)$$

n'est pas nouvelle. Il l'a publiée depuis longtemps (Voir *Mémorial de l'Officier du Génie*, n° 16, 1854, p. 290, et *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1re série, t. XIV, 1855, p. 370); mais la manière dont l'auteur présente actuellement cette formule permet de la comparer directement à celle de Simpson. Pour apprécier la valeur pratique de cette formule, ce qui est surtout intéressant en pareille matière, deux tableaux renfermant un certain nombre d'exemples numériques ont été dressés et sont suivis d'une discussion sur les résultats qu'ils contiennent. La formule de M. Parmentier semble offrir, en général, de grands avantages, et réunir, comme il le dit, l'exactitude de celle de Simpson à la simplicité de celle de Poncelet. Toutefois, nous croyons qu'il ne faut pas être absolu, et que la meilleure formule à appliquer dans chaque cas particulier dépend des conditions spéciales du problème, et du degré d'exactitude dont on a besoin.

Le général Piobert a découvert la même formule. L'article se termine par une Note qui établit d'une façon péremptoire la priorité du général Parmentier.

Faure. — *Théorie des indices.* (13 p.)

Le nom du commandant Faure est bien connu des lecteurs des *Nouvelles Annales*, et ils ont pu constater quel usage habile des indices il a su faire dans de nombreux problèmes. Il a, dans le même recueil, publié une théorie géométrique des indices, dans laquelle il considérait l'indice d'un point, d'une droite, d'un plan. Cette nouvelle étude est consacrée aux indices d'un système de deux points, de deux droites ou de deux plans. Le présent article devant avoir une suite, il nous semble préférable de l'attendre, avant d'en présenter une analyse.

Bourguet. — *Extrait d'une lettre.*

Enoncés de neuf formules concernant les tangentes, les normales, les rayons vecteurs et les rayons de courbure des coniques.

A. L.