Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

Revue bibliographique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 10 (1876), p. 7-32

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1876__10__7_0>

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

SCHORR (Dr F.), Mitglied der naturforschenden Gesellschaft zu Danzig. — DER VENUSMOND UND DIE UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE FRÜHEREN BEOBACHTUNGEN DIESES MONDES. — Braunschweig, Friedrich Vieweg und Sohn, 1875.

La découverte des satellites de Jupiter a été l'une des premières conquêtes de Galilée dans le ciel.

Seize ans après la découverte du quatrième satellite de Saturne par Huyghens, Dominique Cassini signala le cinquième en 1671 ; il aperçut le troisième l'année suivante, et, treize années plus tard, en 1684, le perfectionnement de ses instruments lui permit la découverte des deux premiers, par ordre de distance à la planète. Les astronomes cependant doutaient encore, lorsque Pound, en 1718, fit installer sur le clocher de sa paroisse le télescope envoyé par Huyghens à la Société Royale, et observa les cinq satellites de manière à en déterminer l'orbite. C'est en 1789 seulement qu'Herschel en découvrit un nouveau, qui, plus rapproché de la planète que tous les autres, aurait dû prendre le nom de premier satellite ; il fut cependant nommé sixième, pour ne pas déranger la nomenclature adoptée. Le septième, découvert quelques mois plus tard, est placé, par ordre de distance, entre le sixième et le second. L'Américain Bond enfin, en 1848, en découvrit un huitième, qui reste jusqu'ici le dernier.

Les six satellites d'Uranus furent découverts par Herschel, du 11 janvier 1787 au 26 mai 1794.

Deux satellites de Neptune, enfin, découverts le 1er août 1847 et le 14 août 1850, exigent, pour être aperçus, d'excellents instruments et des circonstances très-favorables.

Les planètes Mars, Vénus et Mercure sont considérées par les astronomes comme privées de satellites. La question cependant, en ce qui regarde Vénus, a été tenue pour douteuse, et les preuves alléguées en faveur de l'existence d'un satellite de Vénus resteraient très-sérieuses, si le temps écoulé depuis les dernières observations ne diminuait considérablement la probabilité de leur exacte interprétation. Le passage récent de Vénus sur le Soleil, dans lequel aucun observateur, pas plus qu'en 1761 et en 1769, ne signale de satellite, accroît encore la confiance de ceux qui rejettent formellement l'existence du compagnon de Vénus, signalé pour la première fois par Fontana, le 15 novembre 1645. Fontana, parmi les contemporains de Galilée, était un des observateurs les plus habiles et les plus assidus ; il a découvert la rotation de Mars, les taches de Vénus et les bandes régulières qui, de l'est à l'ouest, sillonnent Jupiter parallèlement à l'équateur.

Quoique l'observation de Fontana fût précise et certaine, les astronomes, pendant vingt-sept ans, cherchèrent sans résultat le petit astre qui, le 15 novembre 1645, s'était montré tout auprès et au-dessus de Vénus. Dominique Cassini, dont l'habileté et la circonspection n'ont pas besoin d'être rappelées, aperçut, en 1672, un petit astre d'un diamètre apparent égal au quart environ de celui de Vénus et distant de la planète d'un diamètre seulement de celle-ci. Les astronomes, encouragés par l'annonce de Cassini, cherchèrent sans doute à renouveler l'observation ; leurs efforts furent inutiles, et c'est quatorze années plus tard seulement, le 27 août 1686, que Cassini retrouva un petit astre égal en diamètre au quart de Vénus, à une distance égale aux trois cinquièmes environ de ce diamètre.

Un demi-siècle s'écoule, après cette observation de Cassini, sans qu'aucun astronome signale le compagnon de Vénus. Le 3 novembre 1740, Short aperçut, à 10 minutes environ de la planète, un astre d'un diamètre un peu inférieur au tiers de celle-ci, et qui semblait l'accompagner dans le ciel. L'observation ne put être renouvelée les jours suivants.

Après l'observation de Short, nous en trouvons une d'André

Mayer, à Greifswald, 1759; quatre de Montaigne, à Limoges, le 3, le 7 et le 11 mai 1761; sept enfin, de Rodkier et de Horrebow, à Copenhague, et de Montbarron, à Auxerre, les 3, 4, 10, 11, 15, 28 et 29 mars 1764.

Les astronomes que nous venons de citer, sans être de premier ordre, sont dignes de confiance. Short était, en même temps qu'excellent observateur, le plus habile opticien de son temps; on lui doit d'excellentes déterminations micrométriques de Jupiter et la mesure de son aplatissement. Très-habitué à l'emploi des instruments qu'il construisait lui-même, il est difficile de le supposer dupe d'une illusion.

Montaigne découvrit deux comètes en 1772 et en 1774; observateur zélé du ciel, il avait l'habitude des instruments.

Horrebow, élevé dans l'Observatoire de Copenhague, dont son père, avant lui, était le directeur, a laissé la réputation d'un astronome consciencieux et habile.

André Mayer, de Greifswald, a prouvé sa capacité, dit M. Schorr, par plusieurs bons travaux; mais il n'en cite aucun, et ce nom ne figure pas dans la bibliographie astronomique de Lalande. Rodkier et Montbarron, enfin, ont été de simples amateurs de la science astronomique; mais leurs observations acquièrent un grand prix par leur accord avec celles d'Horrebow, qui sont à peu près simultanées.

On s'est demandé si ces apparitions singulières ne devaient pas être attribuées au passage d'Uranus, inconnu alors des astronomes, dans le voisinage de Vénus. Le D^r Koch, de Danzig, qui a laissé d'excellents travaux d'astronomie stellaire, a trouvé qu'Uranus, le 4 mars 1764, jour de l'observation de Rodkier, était distant de Vénus de 16′30″ seulement, mais cette distance dépasse de beaucoup la distance observée. La tentative de Koch pourrait être renouvelée pour les nombreuses petites planètes découvertes depuis un quart de siècle, et si, pour chaque apparition signalée, l'une d'elles était trouvée dans le voisinage de Vénus, le problème semblerait complétement résolu. La recherche est facile, quoique d'une exécution un peu longue; plusieurs jeunes astronomes pourraient utilement se la partager.

Le P. Hell a cru, en 1757, apercevoir près de Vénus un point brillant dans le ciel; mais un examen plus attentif lui en fit découvrir l'origine dans la lumière réfléchie par son œil même et renvoyée de nouveau par l'oculaire du télescope; un déplacement de l'image accompagnait en effet chaque mouvement de son œil; l'astre supposé un instant n'avait donc aucune réalité. Short et Cassini ne mentionnent pas, il est vrai, l'épreuve du déplacement de l'œil faite par le P. Hell; mais il n'est pas croyable que d'aussi habiles observateurs aient pu, pendant plus d'une heure, se laisser prendre à une illusion aussi grossière.

Le P. Hell, tout en signalant la cause possible, suivant lui, des observations prétendues du satellite, engageait cependant, en 1761, tous les observateurs du passage de Vénus à chercher soigneusement la trace du satellite sur le disque solaire. Le P. Hell voyant, dans l'insuccès des recherches, la confirmation de son soupçon, le communiqua à La Caille en le priant de garder sa lettre pour lui seul; mais, en 1762, après la mort de La Caille, il reçut d'une main inconnue la traduction, en langue française, de sa propre lettre, accompagnée d'une réfutation de Montaigne. Il publia alors, dans les *Éphémérides* de Vienne pour 1766, une dissertation (*De satellite Veneris*), dans laquelle il s'efforça d'expliquer toutes les apparitions prétendues par des illusions d'optique.

Le passage de Vénus, en 1769, n'ayant montré le prétendu satellite à aucun observateur, les astronomes paraissaient adopter l'interprétation du P. Hell, lorsque Lambert, reprenant la question et acceptant comme exactes les observations de 1764, en déduisit la position et la grandeur de l'orbite à cette époque, renseignement précieux qui aurait dû stimuler à de nouvelles recherches. Les calculs de Lambert, quoique reposant sur des observations douteuses, sont complets et précis. Il les applique particulièrement à l'époque de l'observation de Cassini, de Short et de Fontana. La théorie lui montre en outre que, pendant les passages de 1761 et de 1769, le satellite n'a pu paraître sur le disque solaire, étant audessus en 1761 et au-dessous en 1769. Il peut arriver, au contraire, que le satellite se projette sur le Soleil quand la planète reste en dehors. Le 8 juin 1753, par exemple, si les Tables de Lambert sont exactes, l'orbite du satellite coupait le disque solaire, mais la position occupée ne le plaçait pas dans la partie commune. Le 1er juin 1777, Lambert annonçait un passage du satellite sur le Soleil non-seulement possible, mais réel, et, « s'il ne se produit pas », dit-il, « les Tables auront besoin de fortes corrections. J'annonce ce passage », ajoute-t-il, « tout au moins comme possible. Les astronomes qui observent souvent le disque du Soleil trouveront sans doute qu'il y a convenance à choisir ce jour, dans l'espoir d'y trouver une observation plus fructueuse et plus agréable que de coutume. »

Cet appel ne donna aucun résultat.

L'excentricité de l'orbite calculée par Lambert est de 0,195, un peu moindre que celle de Mercure. L'inclinaison de l'orbite sur celle de la planète, 64 degrés, dépasse de bien loin toutes les inclinaisons connues.

La plus grande distance de Vénus au satellite sous-tendrait un angle de 19 minutes à la distance qui sépare la Terre du Soleil, et l'on pourrait par conséquent, lorsque Vénus se rapproche de nous le plus possible, si la position du satellite est favorable, l'apercevoir à une distance de 42 minutes ; une des observations de Montaigne le place à 25 minutes.

La dimension du satellite et celle de la planète seraient à peu près dans le même rapport que la Lune à la Terre. Le diamètre de la Terre, en effet, étant pris pour unité, celui de Vénus est de 0,87, celui de la Lune 0,27, et celui du satellite de Vénus, d'après Lambert, 0,28.

L'insuccès du 1er juin 1777 découragea sans doute les astronomes ; on n'a plus revu ni cherché le satellite de Vénus, et les Traités d'Astronomie n'en font mention que pour prémunir les observateurs contre une illusion semblable à celle du P. Hell.

La sincérité de Fontana, Short, Cassini, Horrebow, Montaigne, etc., ne saurait être révoquée en doute, et leur habileté rend l'hypothèse du P. Hell inacceptable ; deux explications seulement restent donc possibles. La première et la plus vraisemblable consiste à considérer les observations comme celle de petites planètes restées inconnues avant et après, et amenées fortuitement dans leur course à se rapprocher de Vénus. La seconde, en admettant la réalité du satellite, expliquerait l'extrême rareté de ses apparitions par la difficulté d'apercevoir un astre d'aussi petites dimensions, qu'aucun observateur sérieux d'ailleurs n'a cherché depuis cent ans.

L'orbite assignée par Lambert ne conserve aucune vraisemblance et lui-même s'est empressé de l'abandonner. L'ensemble des observations semble toutefois, d'après M. Schorr, imposer le chiffre de douze jours pour durée de la révolution. Ce chiffre, donné par les calculs de Lambert sur les observations de 1764, semble confirmé par la concordance des observations faites le 3 et le 15 mars. M. Schorr y ajoute des considérations très-hasardées, que nous indiquerons en terminant.

Cassini a remarqué que l'éclat du cinquième satellite de Saturne varie d'une manière remarquable avec la position par rapport à la planète. Le maximum correspond à un arc de 68 à 129 degrés, parcourus après la conjonction ; il brille, dans cet intervalle, à l'égal du quatrième satellite. A l'est de la planète, au contraire, il semble disparaître complétement, au moins dans les lunettes de force moyenne. Herschel, qui a confirmé et discuté ces remarques, compare le cinquième satellite de Saturne à une étoile variable, qui passerait régulièrement et périodiquement de la seconde à la cinquième grandeur. Quelle que soit l'explication de ce fait, rattaché par Herschel à l'égalité des durées de rotation et de révolution des satellites, M. Schorr se demande si les variations d'éclat du satellite de Vénus, en le rendant rarement visible, ne pourraient pas expliquer, en partie au moins, la rareté de ses apparitions. Supposons, dit-il, que les apparitions du satellite de Vénus se soient toujours produites dans le voisinage du nœud ascendant de son orbite, on pourrait en déduire un nouveau moyen d'assigner la durée de sa révolution. La possibilité de représenter les intervalles des apparitions par des multiples d'une même durée confirmera, jusqu'à un certain point, cette hypothèse.

Quelle que soit la valeur d'une telle conjecture, elle s'accorde d'une manière assez remarquable avec la plus grande partie des faits connus. En laissant de côté l'observation de Fontana et celle de Mayer, qui semblent moins favorables, et ne tenant compte, dans chaque série, que de la première apparition observée, qui doit, d'après la conjecture de M. Schorr, être séparée par des intervalles de douze jours, cela peut donner lieu à cinq vérifications seulement, quoique l'auteur, par un artifice peu digne d'un ouvrage sérieux, en propose quinze. Il est clair, en effet, que, si les diverses apparitions du satellite sont séparées de la première par des multiples de douze jours, l'intervalle entre deux d'entre elles sera également un multiple de douze jours, sans que la vérification offre aucun intérêt. La première observation de 1686 aurait été séparée, dans cette hypothèse, de celle de 1672 par 438 révolutions; entre celle de 1686 et celle de 1740, on en compterait 1626; de 1740 à 1761, 615, et enfin de 1761 à 1764, 85, et, pour faire concorder ces chiffres avec les instants indiqués par l'observation, il suffit de faire varier la durée d'une révolution de la valeur minimum 12,1615 à la valeur maximum 12,1747, accord bien supérieur à ce qu'on pouvait être en droit d'espérer; mais pourquoi négliger l'observation de Fontana et celle de Mayer?

Quoi qu'il en soit, le Livre de M. Schorr remet en lumière une question à peu près oubliée, et, s'il n'y apporte aucun fait nouveau, il présente avec clarté les éléments dont les astronomes pourront s'aider pour en poursuivre la solution définitive.

J. Bertrand.

БУГАЕВЪ (Н.-В.). — Ученіе о числовыхъ производныхъ. — Москва, Мамонтовъ и К°, 1872-1873 (1).

(Analyse faite par l'auteur.)

Ce travail se compose de quatre Mémoires, ayant pour objet l'étude des propriétés de diverses fonctions numériques.

I.

Dans le premier Mémoire, j'expose les principes généraux de la méthode employée.

Soit n un nombre entier quelconque. J'appelle *intégrale numérique* une expression de la forme

$$\sum_n \Theta(d) = \psi(n), \tag{1}$$

---

(1) Bougaïef (N.-V.). — *Théorie des dérivées numériques.* — Moscou, Mamontof et Cie, 1870-1873. 1 vol. grand in-8°, 222 p. (Extrait du *Математическій Сборникъ*, t. V et VI). Voir *Bulletin*, t. III, p. 210; t. V, p. 296-298, et t. VI, p. 314.

où le signe sommatoire s'étend à tous les diviseurs du nombre n. La fonction $\Theta(n)$ sera la *dérivée numérique* de $\psi(n)$.

La relation entre $\Theta(n)$ et $\psi(n)$ peut encore s'exprimer par l'équation

$$\Theta(n) = D\psi(n), \tag{2}$$

où le symbole D indique l'opération de la dérivation numérique.

Dirichlet et Liouville ont fait voir comment, étant donné $\psi(n)$, on peut déterminer $\Theta(n)$.

Un des résultats les plus remarquables de la théorie des dérivées numériques consiste dans son application à l'établissement des formules générales de développement des fonctions analytiques ou numériques en séries numériques d'une forme spéciale. On peut obtenir ce développement pour toutes les valeurs entières et positives de la variable.

La formule générale de ce développement se présente sous la forme

$$F(n) = Q(1)\,E\frac{n}{1} + Q(2)\,E\frac{n}{2} + \ldots + Q(k)\,E\frac{n}{k} + \ldots, \tag{3}$$

où $E(x)$ représente le plus grand nombre entier non supérieur à x.

Je démontre, en premier lieu, qu'une fonction donnée ne peut être ainsi développée que d'une seule manière.

Les coefficients $Q(n)$ sont déterminés en fonction de $F(n)$ par l'équation

$$Q(n) = D[F(n) - F(n-1)] = \overline{F}(n). \tag{4}$$

Cette formule générale est appliquée ensuite au développement des fonctions

$$1, \quad E\sqrt{n}, \quad E\sqrt[3]{n}, \quad \ldots, \quad E\sqrt[n]{n};$$

à celui de la fonction $\Theta(n)$, exprimant le nombre des nombres premiers non supérieurs à n; à celui de $N(n)$, exprimant le nombre des résidus quadratiques d'un nombre premier p, non supérieurs à une limite donnée n; enfin à celui des fonctions de la forme $f(E\sqrt{n})$, $f(E\sqrt[3]{n})$, .. , $f[\Theta(n)]$, etc.

Les coefficients du développement de ces fonctions sont encore des fonctions numériques, dont le rôle est très-important. Ces fonctions sont

$$\begin{aligned}
q(n) &= \mathrm{D}\left(\mathrm{E}\frac{1}{n}\right) = \mathrm{D}\pi(n),\\
\lambda(n) &= \mathrm{D}(\mathrm{E}\sqrt{n} - \mathrm{E}\sqrt{n-1}),\\
\lambda_1(n) &= \mathrm{D}(\mathrm{E}\sqrt[3]{n} - \mathrm{E}\sqrt[3]{n-1}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\lambda_m(n) &= \mathrm{D}(\mathrm{E}\sqrt[m]{n} - \mathrm{E}\sqrt[m]{n-1}),\\
\mu(n) &= \mathrm{D}[\Theta(n) - \Theta(n-1)],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Les développements eux-mêmes sont

$$\begin{aligned}
1 &= q(1)\,\mathrm{E}\frac{n}{1} + q(2)\,\mathrm{E}\frac{n}{2} + \ldots,\\
\mathrm{E}\sqrt{n} &= \lambda(1)\,\mathrm{E}\frac{n}{1} + \lambda(2)\,\mathrm{E}\frac{n}{2} + \ldots,\\
\mathrm{E}\sqrt[3]{n} &= \lambda_1(1)\,\mathrm{E}\frac{n}{1} + \lambda_1(2)\,\mathrm{E}\frac{n}{2} + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\Theta(n) &= \mu(1)\,\mathrm{E}\frac{n}{1} + \mu(2)\,\mathrm{E}\frac{n}{2} + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

On peut trouver, par un examen immédiat, les caractères de ces fonctions. Ainsi

$$q(1) = 1, \quad q(a) = -1, \quad q(ab) = +1, \quad q(abc) = -1, \quad \ldots,$$

c'est-à-dire que la fonction $q(n)$ est nulle pour tous les nombres divisibles par un carré, et égale à ± 1 pour les nombres non divisibles par un carré (nombres *primitifs*).

La fonction $\lambda(n)$, pour un nombre quelconque $n = a^\alpha b^\beta c^\gamma$, est déterminée par l'équation

$$\lambda(a^\alpha b^\beta c^\gamma) = (-1)^{\alpha+\beta+\gamma}.$$

La valeur de la fonction $\lambda_1(n)$, pour $n = a^\alpha b^\beta c^\gamma$, est donnée par l'équation

$$\lambda_1(a^\alpha b^\beta c^\gamma) = \Theta_\varepsilon \Theta_{\varepsilon'} \Theta_{\varepsilon''},$$

où ε, ε', ε'' sont les plus petits restes positifs des nombres α, β, γ, suivant le module 3, de façon que

$$\alpha \equiv \varepsilon, \quad \beta \equiv \varepsilon', \quad \gamma \equiv \varepsilon'', \quad (\text{mod. } 3),$$

et où $\Theta_0 = 1$, $\Theta_1 = -1$, $\Theta_2 = 0$.

Un développement qui offre de l'intérêt est celui de la fonction Θn, exprimant combien il y a de nombres premiers non supérieurs à n. Ce développement est représenté par la série

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \Theta(n) = {} & \mathrm{S}\,\mathrm{E}\frac{n}{a} && -\mathrm{S}\,\mathrm{E}\frac{n}{a^2} \\ & -2\,\mathrm{S}\,\mathrm{E}\frac{n}{ab} && +\mathrm{S}\,\mathrm{E}\frac{n}{a^2 b} \\ & +3\,\mathrm{S}\,\mathrm{E}\frac{n}{abc} && -\mathrm{S}\,\mathrm{E}\frac{n}{a^2 bc} \\ & -4\,\mathrm{S}\,\mathrm{E}\frac{n}{abcd} && +\mathrm{S}\,\mathrm{E}\frac{n}{a^2 bcd} \\ & +\ldots\ldots\ldots\ldots && -\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Les signes de deux colonnes verticales sont alternés; les coefficients de la première colonne ne sont autres que les nombres naturels; le signe sommatoire S s'étend à tous les nombres premiers, de sorte que l'on a

$$\mathrm{S}\,\mathrm{E}\frac{n}{a} = \mathrm{E}\frac{n}{2} + \mathrm{E}\frac{n}{3} + \mathrm{E}\frac{n}{5} + \mathrm{E}\frac{n}{7} + \ldots,$$

$$\mathrm{S}\,\mathrm{E}\frac{n}{ab} = \mathrm{E}\frac{n}{2.3} + \mathrm{E}\frac{n}{2.5} + \ldots + \mathrm{E}\frac{n}{3.5} + \ldots.$$

Exemple. — Pour $n = 10$,

$$\Theta(10) = \mathrm{E}\frac{10}{2} + \mathrm{E}\frac{10}{3} - \mathrm{E}\frac{10}{4} + \mathrm{E}\frac{10}{5} - 2\mathrm{E}\frac{10}{6} + \mathrm{E}\frac{10}{7} - \mathrm{E}\frac{10}{9} - 2\mathrm{E}\frac{10}{10} = 4.$$

La formule (5) fait ressortir clairement le caractère numérique de la fonction $\Theta(n)$, et donne, pour la première fois, une idée nette de sa forme.

Étant donnés les développements en séries numériques de deux fonctions $F(n)$ et $\varphi(n)$, tels que

$$F(n) = \mathrm{S}_1^n \overline{F}(u)\,\mathrm{E}\frac{n}{u},$$

$$\varphi(n) = \mathrm{S}_1^n \overline{\varphi}(u)\,\mathrm{E}\frac{n}{u},$$

on peut en déduire facilement la *loi des développements réciproques,* exprimée par l'équation

$$(6)\qquad \mathop{\mathbf{S}}_1^n \bar{\varphi}(u)\,\mathrm{F}\left(\mathrm{E}\,\frac{n}{u}\right) = \mathop{\mathbf{S}}_1^n \bar{\mathrm{F}}(u)\,\varphi\left(\mathrm{E}\,\frac{n}{u}\right).$$

Cette loi conduit à une infinité de relations différentes, et rend possible la solution de divers problèmes numériques.

Ainsi, soient

$$\mathrm{F}(u) = \mathrm{E}\sqrt{u},\quad \varphi(u) = 1;$$

on a

$$\bar{\mathrm{F}}(u) = \lambda(u),\quad \bar{\varphi}(u) = q(u),$$

d'où

$$(7)\qquad \mathop{\mathbf{S}}_1^n \lambda(u) = \mathop{\mathbf{S}}_1^n q(u)\,\mathrm{E}\sqrt{\frac{n}{u}}.$$

Un nombre quelconque $n = a^\alpha b^\beta c^\gamma$ sera dit d'*ordre pair* lorsque la somme $\alpha + \beta + \gamma$ sera un nombre pair, et d'*ordre impair* si $\alpha + \beta + \gamma$ est impair.

Désignons maintenant par $\mathrm{N}_2(n)$ le nombre des nombres d'ordre pair, et par $\mathrm{N}_1(n)$ le nombre des nombres d'ordre impair non supérieurs à n; nous aurons, d'après la formule (7),

$$\mathrm{N}_2(n) - \mathrm{N}_1(n) = \mathrm{E}\sqrt{n} - \mathbf{S}\,\mathrm{E}\sqrt{\frac{n}{a}} + \mathbf{S}\,\mathrm{E}\sqrt{\frac{n}{ab}} - \mathbf{S}\,\mathrm{E}\sqrt{\frac{n}{abc}} + \ldots.$$

On démontre ensuite que

$$\mathrm{N}_2(n) = \mathrm{E}\sqrt{n} + \mathbf{S}\,\mathrm{E}\sqrt{\frac{n}{ab}} + \mathbf{S}\,\mathrm{E}\sqrt{\frac{n}{abcd}} + \ldots,$$

$$\mathrm{N}_1(n) = \mathbf{S}\,\mathrm{E}\sqrt{\frac{n}{a}} + \mathbf{S}\,\mathrm{E}\sqrt{\frac{n}{abc}} + \ldots.$$

II.

Dans le deuxième Mémoire, je démontre que, si, dans l'équation

$$(8)\qquad \sum_n \vartheta(\delta)\,\chi'(d) = \psi(n),$$

on connaît les fonctions $\vartheta(n)$ et $\psi(n)$, on peut facilement ramener la détermination de la fonction $\chi(n)$ à une opération de dérivation numérique, lorsque la fonction $\vartheta(n)$ satisfait à la condition

$$(9)\qquad \vartheta(n')\,\vartheta(n'') = \vartheta(n'n'').$$

Dans ce cas,

$$\chi(n) = \vartheta(n) \mathrm{D}\left[\frac{\psi(n)}{\vartheta(n)}\right]. \tag{10}$$

En appliquant cette formule à l'un des théorèmes de Liouville, on obtient aisément la relation

$$6\varphi_2(n) = 2\varphi(n)n^2 + 3n^2 \mathrm{E}\frac{1}{n} + (-1)^{\xi(n)}\varphi(n)\xi_1(n), \tag{11}$$

dans laquelle $\varphi(n)$ exprime le nombre de nombres premiers avec n et plus petits que n, $\varphi_2(n)$ la somme des carrés de ces nombres, et où, pour $n = a^\alpha b^\beta c^\gamma$, on a

$\xi(n) = 3 =$ au nombre de facteurs premiers de n différents entre eux,
$\xi_1(n) = abc =$ au produit de ces facteurs.

La condition (9) étant satisfaite, on déduit de la formule (8) toute une série de développements, qui, comme cas particuliers, conduisent à diverses séries numériques d'une forme spéciale.

Les séries infinies, combinées avec les identités numériques, conduisent aussi à un grand nombre de relations nouvelles.

Ainsi, si l'on considère le produit de trois séries infinies

$$\mathbf{S}_1^\infty \frac{\psi_1(u)}{u^\mu} \cdot \mathbf{S}_1^\infty \frac{\psi_2(u)}{u^\mu} \cdot \mathbf{S}_1^\infty \frac{\psi_3(u)}{u^\mu}, \tag{12}$$

et si l'on compare les coefficients des mêmes nombres, on obtiendra, d'après le théorème de Dirichlet ([1]), pour trois fonctions arbitraires $\psi_1(u)$, $\psi_2(u)$, $\psi_3(u)$, les relations

$$\left\{\begin{aligned} \sum_n \psi_1(\delta) \cdot \sum_d \psi_2(\delta') \cdot \psi_3(d') &= \sum_n \psi_2(\delta) \cdot \sum_d \psi_1(\delta') \cdot \psi_3(d') \\ &= \sum_n \psi_3(\delta) \cdot \sum_d \psi_1(\delta') \cdot \psi_2(d'), \end{aligned}\right. \tag{13}$$

où $n = d\delta$, $d = \delta' d'$.

Comme cas particulier, cette relation donne

$$\sum_n \sum_d \Theta(\delta') \cdot \psi(d') = \sum_n \Theta(\delta) \cdot \sum_d \psi(d') = \sum_n \psi(\delta) \cdot \sum_d \Theta(d'), \tag{14}$$

([1]) Lejeune-Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, p. 247.

et, sous cette forme, elle devient la source d'un grand nombre de lois particulières.

On obtient, entre autres, comme simple conséquence de la formule (14), la loi de la différentiation et de l'intégration numérique des intégrales de la forme $\sum_n \chi(\delta).\Theta(d)$, et, en posant

$$\sum_n \Theta(d) = D^{-1}\Theta(d),$$

on a la formule générale

$$(15) \qquad D^\mu \sum_n \chi(\delta)\Theta(d) = \sum_n \chi(\delta) D^\mu \Theta(d) = \sum_n \Theta(d) D^\mu \chi(\delta),$$

pour μ quelconque, positif ou négatif.

On peut ramener aux intégrales de la forme (8) le problème de l'inversion des fonctions numériques.

III.

Le troisième Mémoire a pour objet l'étude de quelques applications, tant numériques qu'analytiques, des dérivées numériques.

Une de ces applications consiste dans le développement d'une fonction en série infinie de la forme

$$\Theta(1)\frac{z}{1-z} + \Theta(2)\frac{z^2}{1-z^2} + \Theta(3)\frac{z^3}{1-z^3} + \ldots + \Theta(n)\frac{z^n}{1-z^n} + \ldots.$$

Comme cas particuliers de ce genre de développement, citons les séries

$$\underset{u=1}{\overset{u=\infty}{\mathrm{S}}} z^{u^2} = z + z^4 + z^9 + z^{16} + \ldots$$

$$= \underset{u=1}{\overset{u=\infty}{\mathrm{S}}} \lambda(u)\frac{z^u}{1-z^u} = \frac{z}{1-z} - \frac{z^2}{1-z^2} - \frac{z^3}{1-z^3} + \frac{z^4}{1-z^4} - \ldots,$$

$$\underset{u=1}{\overset{u=\infty}{\mathrm{S}}} z^{u^3} = \underset{u=1}{\overset{u=\infty}{\mathrm{S}}} \lambda_1(u)\frac{z^u}{1-z^u},$$

$$z^2 + z^3 + z^5 + z^7 + z^{11} + \ldots = \underset{u=1}{\overset{u=\infty}{\mathrm{S}}} \mu(u)\frac{z^u}{1-z^u},$$

où les fonctions $\mu(u)$ sont les coefficients de la formule (5).

Les séries précédentes conduisent encore au développement des fonctions en produits infinis d'une forme spéciale, comme, par exemple, le développement

$$e^{-\left(z+\frac{1}{4}z^4+\frac{1}{9}z^9+\quad\right)}=\prod_{u=1}^{u=\infty}(1-z^u)^{\frac{\lambda(u)}{u}},$$

et autres semblables.

Les propriétés des fonctions numériques permettent d'effectuer la sommation de plusieurs séries infinies. Ainsi on obtient

$$\mathrm{S}_1^\infty \frac{q(u)}{u^2}=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}-\ldots=\frac{\pi^2}{6},$$

$$\mathrm{S}_1^\infty \frac{\lambda(u)}{u^2}=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}-\ldots=\frac{\pi^2}{15},$$

$$\mathrm{S}_1^\infty \frac{\lambda_1(u)}{u^2}=\frac{2\pi^4}{315},$$

$$\mathrm{S}_1^\infty \frac{\lambda(u)\rho(u)}{u^2}=\frac{\pi^4}{15^2},$$

où $\rho(n)$ exprime le nombre de diviseurs de l'entier n;

$$\mathrm{S}_1^\infty \frac{[q(u)]^2}{u^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{15}.$$

On peut exprimer de la même manière les sommes de diverses séries infinies, dépendant des nombres premiers.

Les principes généraux de la théorie des dérivées numériques conduisent aussi à la solution des problèmes généraux relatifs à l'inversion des séries infinies.

Comme exemples, nous citerons les solutions des deux problèmes suivants.

Exemple I. — Étant donnée la série

$$\mathrm{S}_1^\infty uf(x^u)=fx+2fx^2+3fx^3+\ldots=\mathrm{F}(x),$$

trouver le développement de $\mathrm{S}_{u=1}^{u=\infty} f(x^{u^2})$ en fonction de $\mathrm{F}(x)$. On obtient pour la solution la formule

$$f(x)+f(x^4)+f(x^9)+\ldots = \mathop{\mathrm{S}}_{u=1}^{u=\infty} \lambda(u)\, r_2(u)\, \mathrm{F}(x^u),$$

où

$$r_2(a^\alpha b^\beta c^\gamma) = a^{\alpha - 2\mathrm{E}\frac{\alpha}{2}} b^{\beta - 2\mathrm{E}\frac{\beta}{2}} c^{\gamma - 2\mathrm{E}\frac{\gamma}{2}}.$$

Exemple II. — Étant donnée la série

$$\mathop{\mathrm{S}}_1^\infty \frac{1}{u^2} f(x^u) = f(x) + \frac{1}{4} f(x^2) + \frac{1}{9} f(x^3) + \ldots = \mathrm{F}(x),$$

trouver le développement de $\mathop{\mathrm{S}}_1^\infty \frac{1}{u} f(x^u)$ en fonction de

$$\varphi(x) = \mathop{\mathrm{S}}_1^\infty \lambda(u)\, \mathrm{F}(x^u).$$

Tout calcul fait, on trouve

$$\mathop{\mathrm{S}}_1^\infty \frac{1}{u} f(x^u) = \varphi(x) \sum\nolimits_1 [q(\delta)]^2 \frac{\varphi(d)}{d^1} + \varphi(x^2) \sum\nolimits_2 [q(\delta)]^2 \frac{\varphi(d)}{d^2} + \ldots.$$

Au problème de l'inversion des séries infinies se rattache la question de l'inversion des produits infinis. Si, par exemple,

$$\prod_{u=1}^{u=\infty} (1 - x^u) = f(x),$$

on a aussi

$$\prod_1^\infty (1 - x^{u^2}) = \prod_1^\infty [f(x^u)]^{\lambda(u)},$$

$$\prod_1^\infty (1 - x^{u^3}) = \prod_1^\infty [f(x^u)]^{\lambda_1(u)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On remarque encore que de la série

$$\cot z = \mathop{\mathrm{S}}_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{1}{z - m\pi}$$

découlent les séries

$$\frac{2z}{z^2-\beta^2} = -\mathrm{S}_0^\infty \frac{\pi}{2\beta}\, q(2u+1)\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\left(\frac{\pi z}{(2u+1)\beta}\right),$$

$$\mathrm{S}_{u=1}^{u=\infty} \frac{1}{(2u+1)^3\pi^2\alpha^2 - z^3} = \frac{1}{2^3\alpha z}\mathrm{S}_1^\infty \lambda_1(2u+1)\,\mathrm{tang}\left(\frac{1}{2}\,\frac{z}{(2u+1)\alpha}\right),$$

etc.

L'auteur expose ensuite les règles de l'inversion des séries doubles de la forme

$$\mathrm{S}_{u=1}^{u=\infty}\mathrm{S}_{v=1}^{v=\infty}\psi(u,v)f(uvx) = \mathrm{S}_{u=1}^{u=\infty}\mathrm{S}_{v=1}^{v=\infty}\chi(u,v)\mathrm{F}(uvx).$$

En appliquant ces règles à l'inversion d'un théorème connu de Tchebychef,

$$\begin{aligned}\Pi(n) = \mathrm{T}(n)\,\mathrm{T}\left(n^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{T}\left(n^{\frac{1}{3}}\right)\ldots\\ \times \mathrm{T}\left(\frac{n}{2}\right)\mathrm{T}\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{T}\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\ldots\\ \times \mathrm{T}\left(\frac{n}{3}\right)\mathrm{T}\left(\frac{n}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{T}\left(\frac{n}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\ldots\\ \times\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

où $\Pi(n)$ exprime le produit de tous les nombres naturels, et $\mathrm{T}(n)$ le produit de tous les nombres premiers inférieurs à n, on obtient

$$\mathrm{T}(n) = \Pi\left[\Pi\left(\frac{n^{\frac{1}{u}}}{v}\right)\right]^{q(u)q(v)}.$$

ou

$$\mathrm{T}(n) = \frac{\Pi(n)\,\Pi\left(\frac{n}{6}\right)\Pi\left(\frac{n}{10}\right)\cdots}{\Pi\left(\frac{n}{2}\right)\Pi\left(\frac{n}{3}\right)\Pi\left(\frac{n}{5}\right)\cdots} \times \frac{\Pi\left(\frac{1}{2}n^{\frac{1}{2}}\right)\Pi\left(\frac{1}{3}n^{\frac{1}{3}}\right)\cdots}{\Pi\left(n^{\frac{1}{2}}\right)\Pi\left(\frac{1}{6}n^{\frac{1}{2}}\right)\cdots} \times \ldots$$

IV.

Le quatrième Mémoire a pour objet l'extension de la théorie des dérivées numériques dans son application au développement des fonctions en séries numériques de la forme

$$(16)\qquad \begin{cases} F(n) = \mathbf{S}_1^n \overline{F}_2(u)\,E\sqrt{\dfrac{n}{u}}, \\ F(n) = \mathbf{S}_1^n \overline{F}_3(u)\,E\sqrt[3]{\dfrac{n}{u}}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ F(n) = \mathbf{S}_1^n \overline{F}_\mu(u)\,E\sqrt[\mu]{\dfrac{n}{u}}. \end{cases}$$

Il est facile de voir que, pour obtenir ces développements, il est nécessaire de connaître d'abord les développements

$$(17)\qquad \begin{cases} n = \mathbf{S}_1^n \vartheta_2(u)\,E\sqrt{\dfrac{n}{u}}, \\ n = \mathbf{S}_1^n \vartheta_3(u)\,E\sqrt[3]{\dfrac{n}{u}}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ n = \mathbf{S}_1^n \vartheta_\mu(u)\,E\sqrt[\mu]{\dfrac{n}{u}}. \end{cases}$$

En particulier, on trouve que

$$(18)\qquad \begin{cases} n = E\sqrt{\dfrac{n}{1}} + \mathbf{S}\,E\sqrt{\dfrac{n}{a}} + \mathbf{S}\,E\sqrt{\dfrac{n}{ab}} + \mathbf{S}\,E\sqrt{\dfrac{n}{abc}} + \dots \\ \quad = -\mathbf{S}\,[q(u)]^2\,E\sqrt{\dfrac{n}{u}}; \end{cases}$$

par conséquent, on a

$$\vartheta_2(n) = [q(n)]^2,$$

et

$$(19)\qquad \overline{F}_2(n) \sum_n \vartheta_2(\delta)\overline{F}(d) = \sum_n [q(\delta)]^2\overline{F}(d).$$

L'expression générale de $F(n)$ en fonction de $E\sqrt{\dfrac{n}{u}}$ sera donc

$$(20)\qquad \begin{cases} F(n) = E\sqrt{\dfrac{n}{1}}\sum_1 \vartheta_2(\delta)\overline{F}(d) + E\sqrt{\dfrac{n}{2}}\sum_2 \vartheta_2(\delta)\overline{F}(\delta) + \dots \\ \quad = \mathbf{S}_{u=1}^{u=n} E\sqrt{\dfrac{n}{u}}\sum_u [q(\delta)]^2\overline{F}(d). \end{cases}$$

De cette manière il est facile d'obtenir les développements de 1, $E\sqrt[3]{n}$, $\Theta(n)$ en fonction de $E\sqrt{\frac{n}{u}}$.

En désignant par $H_1(n)$ le nombre de nombres primitifs, c'est-à-dire non divisibles par des carrés, on tire de la formule (18) ([1])

$$H_1\left(\frac{n}{1}\right)+H_1\left(\frac{n}{2^2}\right)+H_1\left(\frac{n}{3^2}\right)+\ldots=n. \tag{21}$$

Des équations analogues ont lieu pour les nombres non divisibles par les cubes, les quatrièmes puissances, etc., de sorte qu'en désignant par $H_2(n)$, $H_3(n)$, ... les nombres respectifs de ces nombres non supérieurs à n, on obtient les relations

$$\left\{\begin{array}{l} H_2\left(\frac{n}{1}\right)+H_2\left(\frac{n}{2^3}\right)+H_2\left(\frac{n}{3^3}\right)+\ldots=n, \\ H_3\left(\frac{n}{1}\right)+H_3\left(\frac{n}{2^4}\right)+H_3\left(\frac{n}{3^4}\right)+\ldots=n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{22}$$

Les fonctions $H_1(n)$, $H_2(n)$, $H_3(n)$, ..., $H_m(n)$ présentent ceci de remarquable, qu'elles peuvent servir à obtenir les développements de diverses fonctions numériques en séries dont elles constituent les termes.

La formule générale de ces développements se présente sous la forme

$$F(n)=\mathop{\mathrm{S}}_{u=1}^{u=n} H_1\left(\frac{n}{u}\right)\sum\nolimits_n\left(E\sqrt{\delta}-E\sqrt{\delta-1}\right)\overline{F}(d). \tag{23}$$

On a en particulier

$$\Theta(n)=-\mathop{\mathrm{S}}_2^n \lambda(u)\xi(u)H_1\left(\frac{n}{u}\right), \tag{24}$$

où $\Theta(n)$ exprime le nombre de nombres premiers, et où, pour $n=a^\alpha b^\beta c^\gamma$, on a posé

$$\lambda(n)=(-1)^{\alpha+\beta+\gamma}, \qquad \xi(n)=3.$$

([1]) Bougaïef, *Résolution d'une question numérique. — Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1872, t. LXXIV, n° 7.

L'auteur fait voir ensuite de quelle manière on peut déduire des développements ci-dessus les valeurs asymptotiques des fonctions numériques, et il examine les conditions dans lesquelles cette déduction est possible.

En appliquant ce qui précède à la fonction $H_1(n)$, on trouve que sa valeur asymptotique est $\frac{6}{\pi^2}n$.

Les formules (16) conduisent à deux formes différentes de la loi des développements réciproques. Une des conséquences de cette loi est la formule

$$(25)\qquad \mathop{\mathbf{S}}_{1}^{n}\varphi(u)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathbf{S}\,q(u)\left(\mathrm{E}\,\frac{n}{u}\right)^2,$$

dans laquelle $\varphi(n)$ exprime le nombre de nombres plus petits que n et premiers avec lui.

A la fin du quatrième Mémoire, l'auteur traite quelques problèmes relatifs à la forme de diverses fonctions numériques.

A la page 148 du Mémoire intitulé : *Identités numériques en relation avec les propriétés du symbole* E, l'auteur a encore établi la formule suivante :

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned}&\mathop{\mathbf{S}}_{u=1}^{u=s}\left[\varphi(u)\mathop{\mathbf{S}}_{1}^{\mathrm{E}\psi(u)}\chi(u)\right]+\mathop{\mathbf{S}}_{1}^{\mathrm{E}\psi(s)}\left[\chi(u)\mathop{\mathbf{S}}_{1}^{\mathrm{F}\psi(u)}\varphi(u)\right]\\ &\quad=\mathop{\mathbf{S}}_{1}^{\mathrm{E}\mu}\varphi(u)\mathop{\mathbf{S}}_{1}^{\mathrm{E}\psi(u)}\chi(u)+\mathop{\mathbf{S}}_{1}^{s}\varphi(u)\mathop{\mathbf{S}}_{1}^{\mathrm{E}\psi(s)}\chi(u),\end{aligned}\right.$$

dans laquelle $\psi(u)$ est une fonction constamment décroissante, $\varphi(u)$ et $\chi(u)$ deux fonctions arbitraires, et μ une quantité satisfaisant à la condition $\psi(\mu)=0$.

De cette formule on conclut l'équation

$$(27)\quad 2\mathop{\mathbf{S}}_{1}^{\mathrm{E}\sqrt{n}}\varphi(u)\mathop{\mathbf{S}}_{1}^{\mathrm{E}\frac{n}{u}}\varphi(u)=\mathop{\mathbf{S}}_{1}^{n}\varphi(u)\mathop{\mathbf{S}}_{1}^{\mathrm{E}\frac{n}{u}}\varphi(u)+\left[\mathop{\mathbf{S}}_{1}^{\mathrm{E}\sqrt{n}}\varphi(u)\right]^2,$$

de laquelle on tire la congruence

$$\mathbf{S}\,\Theta\left(\frac{n}{a}\right)=\Theta\left(\frac{n}{2}\right)+\Theta\left(\frac{n}{3}\right)+\Theta\left(\frac{n}{5}\right)+\ldots\equiv\Theta(\sqrt{n})\pmod{2},$$

$\Theta(n)$ représentant le nombre de nombres premiers non supérieurs à n.

On obtient facilement aussi la congruence

$$(28)\qquad \mathbf{S}\,\Theta\left(\frac{n}{a^2}\right)-\mathbf{S}\,\Theta\left(\frac{n}{ab}\right)+2\Theta(\sqrt[3]{n})\equiv 0 \pmod{3},$$

qui donne l'idée de la fonction numérique

$$\mathbf{S}\,\Theta\left(\frac{n}{a^2}\right)-\mathbf{S}\,\Theta\left(\frac{n}{ab}\right).$$

Le travail se termine par des considérations générales sur les fonctions numériques.

CONCLUSION.

Je terminerai ce Mémoire par quelques considérations sur les fonctions numériques. Quelques-unes de ces considérations ont été exposées par moi en 1865, dans une Leçon d'ouverture. Je crois utile de donner aujourd'hui quelques éclaircissements plus détaillés sur les principes qui m'ont guidé dans mes recherches sur la théorie des fonctions numériques.

Le caractère principal des fonctions numériques consiste dans leur manière spéciale de varier avec la variable dont elles dépendent. Toutes les fonctions considérées en Analyse jouissaient de la propriété de varier d'une manière continue pour une variation continue de la variable. Ces fonctions ont été appelées *analytiques*. Les fonctions numériques ne jouissent pas de cette propriété. On peut leur donner le nom de fonctions *non analytiques* ou *discontinues*. Une fonction analytique avait toujours une valeur déterminée pour chaque grandeur réelle ou imaginaire de la variable; une fonction numérique peut n'admettre absolument aucune valeur pour certaines grandeurs de la variable. En un mot, si l'on représente les grandeurs de la variable par des points d'un plan, de manière que les abscisses correspondent aux parties réelles et les ordonnées aux parties imaginaires, et que l'on représente de même sur d'autres plans les grandeurs de la fonction, la définition la plus générale d'une fonction analytique consiste en ce que, pour aucune portion continue de plan ou de ligne, correspondante à une variation de la variable, si petite que soit cette portion, la fonction analytique ne peut conserver une valeur constante, c'est-à-dire être représentée sur les autres plans par un seul et même point.

Les fonctions numériques ne jouissent pas de cette propriété. Il arrive que non-seulement la valeur d'une fonction numérique, mais aussi celles de sa variable varient d'une manière discontinue.

En présence de cette différence essentielle entre les propriétés fondamentales de ces deux sortes de fonctions, on conçoit que les méthodes de l'Analyse ne peuvent pas être appliquées purement et simplement aux fonctions numériques. L'étude de ces dernières exige l'adoption des nouvelles méthodes appropriées à la nature même de ces fonctions et à leur définition. En outre, c'est avec la plus grande circonspection qu'il faut émettre la prétention de demander à l'Analyse numérique des méthodes générales applicables à toutes les fonctions numériques. Très-souvent, en effet, il dépend de notre volonté de faire varier une fonction discontinue d'une manière ou d'une autre, sous telles ou telles restrictions. La généralité des méthodes dans la théorie des fonctions numériques dépend en quelque sorte de ces restrictions; néanmoins, il peut exister des procédés généraux de recherche pour tel ou tel groupe de fonctions numériques, et l'on peut facilement se rendre compte du sens que l'on doit attacher à une théorie de ces fonctions.

Pour avoir une notion exacte d'une fonction quelconque, il faut connaître d'abord sa relation avec d'autres fonctions déjà connues, et ensuite sa manière d'être en présence de diverses conditions pouvant influer sur elle. Ces considérations générales s'appliquent aussi aux fonctions numériques, et font entrevoir immédiatement les questions fondamentales de la théorie de ces fonctions. En effet, la plupart des recherches relatives aux fonctions numériques ont pour objet soit (a) d'établir la relation de ces fonctions avec les fonctions analytiques, soit (b) de trouver leur dépendance vis-à-vis des autres fonctions numériques, soit enfin (c) d'étudier des relations entre les états d'une même fonction pour diverses valeurs de la variable.

La première question qui se présente dans l'étude des relations entre les fonctions numériques et les fonctions analytiques est la suivante : Avec quelle approximation et à l'aide de quelle fonction analytique peut-on exprimer une certaine propriété numérique, dépendante de telle ou telle fonction numérique? C'est seulement pour un très-petit nombre de fonctions numériques que l'on peut poser ce problème. Parmi celles qui s'y prêtent, on doit citer les fonctions $\Theta(n)$ et $H_1(n)$, exprimant, l'une le nombre de nombres absolument premiers, l'autre le nombre de nombres non divisibles par des carrés, et non supérieurs à n.

La plupart des fonctions numériques varient d'une manière tout à fait irrégulière; néanmoins, on remarque parfois que leurs valeurs moyennes présentent une tendance de plus en plus grande à la régularité.

Une expression analytique vers laquelle converge à la limite une telle valeur moyenne a été appelée par Dirichlet expression *asymptotique*. L'étude des fonctions numériques, au point de vue de leurs expressions asymptotiques, permet de résoudre certains problèmes, dont l'Analyse est impuissante à donner la solution.

La question des relations mutuelles entre les fonctions analytiques et les fonctions numériques a particulièrement attiré l'attention des plus grands mathématiciens. Son étude approfondie permet d'éclaircir plusieurs faits scientifiques intéressants; mais elle ne suffit pas à elle seule pour épuiser toutes les ressources de la théorie des dérivées numériques. Au point de vue logique, les études ayant pour objet la recherche des lois de la dépendance entre les diverses fonctions numériques constituent un des plus puissants moyens d'arriver à la définition et à la connaissance des fonctions numériques, et les travaux des savants dans cette direction sont motivés par d'importantes raisons scientifiques.

Le peu d'attention qu'on prête à ces recherches ne peut se justifier que par cette circonstance, que ces recherches ne conduisent pas toujours à une méthode générale, et qu'elles constituent, en face des autres parties des Mathématiques, un domaine à part, en raison du caractère spécial de leurs procédés.

Un reproche assez fondé, qu'on adresse à ces recherches, c'est qu'ici on ne peut pas toujours passer d'un cas général à un cas particulier et réciproquement; mais ce reproche peut s'appliquer aussi à plusieurs parties de l'Analyse. Par le développement de la théorie des dérivées numériques, cet inconvénient disparaît peu à peu, et de ce développement se dégagent des vérités de plus en plus déterminées et régulières. Le matériel scientifique qui forme cette branche des Mathématiques commence un peu à la fois à s'organiser en une théorie ordonnée et systématique.

A la question des relations mutuelles entre les fonctions numériques se rattache directement la question de la dépendance mutuelle entre les séries infinies. De la considération des coefficients de ces séries on peut au moins déduire plusieurs propriétés des fonctions numériques. A ce point de vue la théorie des fonctions numériques est intimement liée avec l'Analyse. Plusieurs théorèmes sur les fonctions numériques, déduits de la considération des séries infinies, se démontrent, dans la théorie des fonctions numériques, par une autre voie. Ici il importe d'attirer l'attention sur cette circonstance, que non-seulement plusieurs propositions de la théorie des fonctions numériques peuvent s'établir au moyen de l'Analyse, mais que réciproquement aussi des vérités démontrées en Analyse peuvent se déduire de considérations appartenant au calcul numérique; mais il est impossible de ne pas remarquer que le passage des conclusions relatives aux fonctions numériques aux conclusions s'appliquant aux fonctions analytiques n'a ordinairement lieu que pour des hypothèses particulières quelconques, relatives à la variable. Pour obtenir ce passage, l'expression analytique ou numérique doit très-souvent être considérée à la limite.

L'idée de continuité constitue le caractère principal des fonctions analytiques. Grâce aux travaux des mathématiciens éminents, elle a été développée en une série de brillantes théories mathématiques, lesquelles ont conduit à une étude générale et féconde des fonctions analytiques.

Les grands géomètres ont utilisé les propriétés de ces fonctions pour l'explication des phénomènes de la nature; ils n'ont pu le faire qu'autant que ces phénomènes, considérés entre les limites de certaines hypothèses, étaient continus.

L'idée de continuité n'épuise pas cependant toutes les sortes de relations qui peuvent conduire à la vérité mathématique. La discontinuité, déterminée par telles ou telles conditions, offre aussi un grand nombre de directions à l'exploration.

Cette idée, qui se manifeste dans le simple calcul des nombres naturels, où elle caractérise toute une série d'opérations, devient aussi une source de nouvelles et remarquables propriétés des grandeurs. Elle donne naissance à des fonctions d'un genre spécial, qui nous dévoilent de nouvelles lois et de nouvelles relations. L'idée de continuité n'a qu'une définition. La discontinuité peut être très-variée.

Voilà pourquoi les procédés de l'Analyse numérique sont plus variés, et pourquoi les vérités relatives aux fonctions numériques présentent plus de voies diverses à l'investigation. La continuité même peut être envisagée comme un cas particulier de la discontinuité, où les variations sont infiniment petites et les intervalles des valeurs égaux.

D'après ce qui précède, il n'est pas étonnant que l'Analyse numérique forme, pour ainsi dire, un arsenal mathématique de méthodes diverses de recherches. Conduisant à des résultats indépendants, elle permet de résoudre certains problèmes insolubles à l'aide des méthodes analytiques; le calcul numérique élargit et étend les ressources de l'Analyse.

Pour mieux faire comprendre la difficulté des problèmes numériques et leur dissemblance avec les questions analytiques, comparons un problème d'Analyse avec le problème arithmétique correspondant.

En cherchant le volume d'un cylindre droit en fonction du rayon de sa base et de sa hauteur, on a affaire à une fonction analytique. Le champ des questions que l'on peut poser relativement à ce cas est très-restreint; mais il en sera autrement si, au lieu du volume, on cherche la fonction numérique exprimant le nombre des sphères qui peuvent être contenues dans un cylindre donné.

Cette fonction numérique, dans sa variation discontinue, dépend non-seulement de la hauteur et du rayon du cylindre, mais encore du rayon des sphères et de leur mode de disposition. Ce problème se présente sous des aspects qui exigent des moyens spéciaux de recherche. Il se compliquera encore davantage si les corps remplissant le cylindre sont, au lieu de sphères, des ellipsoïdes ou des corps irréguliers. Comparativement au problème analytique, ce problème numérique est donc plus complexe, plus varié et plus difficile.

Toutes les fonctions numériques peuvent se diviser en deux classes, selon le rapport qui existe entre le mode de variation de la fonction et celui de la variable. A la première classe appartiennent les fonctions variant d'une manière discontinue, tandis que leur variable peut prendre un accroissement continu. Parmi ces fonctions, il faut classer les fonctions $\Theta(n)$, $H_1(n)$ et toutes les fonctions qui dépendent du symbole E.

A la seconde classe appartiennent les fonctions numériques qui, aussi bien elles-mêmes que leurs variables, varient d'une manière discontinue, les fonctions, en un mot, qui, par la nature de leur définition, n'existent que pour certaines valeurs de la variable. A cette classe appartiennent les fonctions

$$\Sigma_n 1 = \rho(n), \qquad \Sigma_n d = f(n),$$
$$\lambda(n) = \mathrm{D}(\mathrm{E}\sqrt{n} - \mathrm{E}\sqrt{n-1}),$$
$$\lambda_1(n) = \mathrm{D}(\mathrm{E}\sqrt[3]{n} - \mathrm{E}\sqrt[3]{n-1}),$$
$$q(n) = \mathrm{DE}\frac{1}{n} = \mathrm{D}\pi(n).$$

Dans ces fonctions, n ne peut admettre que des valeurs entières. Pour n fractionnaire ces fonctions n'ont aucune signification.

Les fonctions de la première classe ressemblent de près aux fonctions analytiques; le caractère de continuité s'y conserve encore pour le mode d'accroissement de la variable. Dans les méthodes employées pour leur investigation, elles présentent plusieurs points communs avec les fonctions analytiques. Leur étude offre moins de difficulté; leur théorie se prête mieux à un arrangement ordonné et systématique. On pourrait les appeler *semi-analytiques.*

L'étude des fonctions de la seconde classe devient beaucoup plus facile toutes les fois qu'on peut les ramener aux fonctions de la première classe. On y parvient souvent en réunissant ensemble un nombre suffisant de fonctions de la seconde classe. Ainsi la fonction $\rho(n)$, qui exprime le nombre de diviseurs du nombre entier n, appartient à la seconde classe, tandis que la fonction

$$\sigma(n) = \sum_{u=1}^{u=n} \rho(u) = \mathrm{E}\frac{n}{1} + \mathrm{E}\frac{n}{2} + \mathrm{E}\frac{n}{3} + \ldots$$

est déterminée à l'aide d'expressions dépendant du symbole E.

Sous cette forme, $\sigma(n)$ peut être calculée pour toutes les valeurs de n, et appartient aux fonctions numériques de la première classe.

De cette manière, une fonction de la première classe peut être considérée comme un chaînon intermédiaire entre les fonctions analytiques et les fonctions de la seconde classe. Dans le calcul numérique, l'étude des fonctions semi-analytiques doit être placée au premier plan. A ce point de vue, la *théorie du symbole* E doit former la matière première de l'Analyse numérique : c'est par elle qu'on doit commencer l'étude des fonctions arithmétiques.

Après la théorie du symbole E doit venir la *théorie des dérivées numériques*. Cette théorie donne naissance à plusieurs fonctions de la seconde classe, et met en évidence, d'une manière rigoureusement systématique, un grand nombre de leurs propriétés. La notion de l'intégrale numérique relie ces deux parties en un seul tout, et la méthode de l'intégration numérique sert d'instrument principal à l'étude de plusieurs fonctions numériques.

Les fonctions numériques peuvent être considérées et comme résultat et comme base d'une nouvelle espèce d'opérations, pouvant former elles-mêmes l'objet d'une étude indépendante. Pour relier par la notion de fonction toutes les parties des Mathématiques, il est nécessaire d'étendre la définition même de la fonction et de la rendre plus générale. Une fonction doit être envisagée comme un résultat de telle ou telle classe, de telle ou telle succession d'opérations, sans se préoccuper si ce résultat exprime une certaine grandeur ou s'il se présente sous une forme symbolique.

A ce point de vue, les Mathématiques seront une science des fonctions, dont le calcul numérique formera une partie essentielle et indispensable.

N.-V. Bougaïef.