Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

Revue bibliographique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 10 (1876), p. 209-242

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1876__10__209_0>

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

HANKEL (H), weil. ord. Professor der Math. an der Universität zu Tübingen — ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATIK IN ALTERTHUM UND MITTELALTER. — Leipzig, Teubner, 1874. 1 vol in-8°, 410 p.

Le volume dont nous venons de transcrire le titre contient des fragments d'un grand Ouvrage sur l'histoire des Mathématiques, auquel l'auteur travaillait depuis longtemps, lorsque la mort est venue interrompre son œuvre. Heureusement, Hankel avait commencé par l'étude des époques les plus intéressantes ; celles qu'il n'a pu traiter ont moins d'importance ou ont été déjà l'objet d'écrits à la hauteur des découvertes récentes.

Après avoir exposé le plan qu'il se proposait de suivre et apprécié ce que l'on a pu apprendre sur l'état antéscientifique de l'art de compter et de l'art de mesurer, l'auteur trace l'histoire de la science grecque pendant la première période, qui se termine à l'École de Platon. Hankel n'a laissé sur la seconde période que des fragments, dont le plus étendu, consacré à Euclide, a été reproduit dans un Appendice à la fin du volume. L'histoire reprend à la période arithmétique, qui se résume dans ce qui nous reste des écrits de Diophante. De là à l'histoire des Mathématiques dans l'Inde la transition était naturelle. Après avoir exposé les découvertes des Hindous dans la science des nombres et dans l'Algèbre, et résumé leurs connaissances géométriques, l'auteur passe à l'étude de la science arabe; une traduction italienne du Chapitre consacré à cet objet a été publiée en 1872, dans le *Bullettino* de M. le prince Boncompagni (1). Après avoir indiqué en passant la pauvreté des connaissances mathématiques chez les Romains, l'historien présente dans les trois derniers Chapitres le tableau du mouvement scientifique au moyen âge et pendant la Renaissance. Le volume se termine par un court fragment sur les Mathématiques des Chinois.

Tel est le résumé sommaire du contenu de ce volume. Nous allons reprendre avec plus de détails l'étude de quelques points qui

(1) Voir *Bulletin*, t. VI, p. 254.

se distinguent particulièrement par la nouveauté et la profondeur des aperçus.

Après avoir tracé en quelques pages, dans son Introduction, l'histoire du développement mathématique chez les peuples qui nous ont laissé des documents, depuis le VI^e siècle avant notre ère, jusqu'aux temps modernes, l'auteur consacre les premiers Chapitres de son Livre à l'histoire de la numération, tant parlée qu'écrite, à celle du calcul usuel et de la Géométrie pratique, antérieurement à la période scientifique. Il indique dans le Chapitre I^er le peu que l'on sait sur l'origine des noms de nombres; puis il expose le principe, commun à toutes les numérations, du groupement des unités en unités d'ordres supérieurs. Il passe en revue les systèmes de nomenclature adoptés pour ces groupes chez les divers peuples. Le nombre qui sert de base à ce groupement successif est généralement le nombre 10, quelquefois son double ou sa moitié, et la raison en est facile à trouver dans la conformation du corps humain.

Le second Chapitre traite des signes numéraux. L'obscurité qui enveloppe les temps où ces signes ont pris naissance a permis à l'imagination des historiens de se donner carrière. Ainsi mille conjectures ont été faites sur l'origine des chiffres romains et sur celle de nos chiffres modernes. Hankel les considère avec raison comme des jeux d'esprit, tant qu'elles ne sont pas appuyées sur des découvertes archéologiques bien constatées. Il présente ensuite quelques considérations sur l'importance de l'écriture numérale, qui est une vraie langue universelle, et pourrait au besoin fournir la solution du problème sur lequel Leibnitz a vainement exercé son génie.

Dans les paragraphes suivants, il énumère les différents principes sur lesquels reposent les divers systèmes de chiffres : 1° notation non systématique : telle était celle des Grecs lorsqu'ils désignaient les chants de l'Iliade par les lettres de l'alphabet; 2° principe *additif :* c'est celui des chiffres des Romains, des Phéniciens et des anciens Grecs; 3° principe *multiplicatif,* consistant à désigner par un signe particulier l'unité de chaque groupe et à faire précéder chaque signe d'un coefficient moindre que 10 : on rencontre ce système chez les Chinois; 4° principe *élévatoire,* qui revient à peu près au précédent, si ce n'est que c'est le coefficient qui est ici considéré comme représentant des unités d'un ordre indiqué par un signe particulier; c'est ainsi que les Grecs représentaient les mille au moyen des signes des neuf premiers nombres, affectés d'un accent inférieur; 5° principes des *colonnes :* c'est celui sur lequel était fondé l'*abacus* employé en Europe au moyen âge; 6° principe de *position,* celui de nos chiffres modernes, dont toutes les traditions attribuent l'invention aux Hindous, et dont aucun autre peuple n'a revendiqué la découverte. Il n'a pas encore été possible de déterminer quand et comment cette idée est née sur le sol indien. Les inscriptions de l'Inde occidentale n'en offrent aucune trace avant le VII^e siècle de notre ère, quoique ce système fût probablement en usage dès cette époque dans la vallée du Gange. Mais le manque de documents positifs ne peut nous empêcher de conclure en faveur des Hindous, dont les aptitudes si remarquables pour le calcul et les spéculations numériques pouvaient seules résoudre un problème qui ne convenait en aucune façon à la nature du génie hellénique.

Le Chapitre suivant est intitulé : « le Calcul pratique pendant la période antéscientifique ». Les premiers peuples ont dû commencer par calculer avec les doigts. Pour faciliter les opérations, ils adoptèrent, pour les usages de la vie, des unités de 60 en 60 fois plus grandes. On se servit d'abord, pour faire les additions, de grains ou de cailloux (ψῆφοι), ou de tout autre procédé analogue, peu d'hommes étant capables, dans ces temps reculés, de retenir par cœur les résultats de l'addition des premiers nombres entre eux. Les systèmes de numération compliqués et irréguliers, comme ceux des Grecs et des Romains pour les grands nombres, ne pouvant être d'aucun secours aux calculateurs, on se servit de jetons que l'on disposait en ligne sur une table (ἄβαξ ou ἀβάκιον), dont l'usage s'est conservé dans nos pays jusqu'au XVII^e siècle ([1]). C'est au même genre de méthodes qu'il faut rapporter l'*abacus* du moyen âge, et le *suan p'huân* des Chinois et des Tartares, ainsi que les *crёмы* dont se servent encore aujourd'hui les marchands russes.

La multiplication et la division s'opéraient par des moyens analogues. Quant au calcul des fractions, il présentait des difficultés dont nous ne pouvons plus nous faire aucune idée. Il suffit, pour s'en convaincre, de jeter les yeux sur le tableau des fractions duodé-

---

([1]) *Voir* les Traités d'Arithmétique de cette époque, et la première scène du *Malade imaginaire.*

cimales auxquelles les Romains avaient donné des noms particuliers et dont ils faisaient usage dans leurs calculs. Les arpenteurs grecs, suivant la méthode égyptienne, décomposaient les fractions en fractions simples ayant l'unité pour numérateur. Les astronomes anciens avaient emprunté aux Babyloniens leurs fractions sexagésimales, à l'aide desquelles ils exécutaient les divisions et les extractions de racines. C'est chez Diophante, au IV^e siècle de notre ère, que nous trouvons pour la première fois des fractions exprimées par leur numérateur et leur dénominateur, et traitées comme on le fait aujourd'hui.

Longtemps avant les autres peuples, les Hindous pratiquèrent avec une prodigieuse facilité l'art du calcul, à une époque où ils ne connaissaient encore ni l'Arithmétique scientifique, ni la numération fondée sur la valeur de position. Ils étaient aidés en cela par leur nomenclature des unités des différents ordres, pour lesquelles ils avaient des dénominations spéciales jusqu'au dix-septième ordre, ce qui les dispensait d'opérer sur des nombres plus grands que 9.

L'Introduction se termine par un Chapitre sur la « Géométrie pratique pendant la période antéscientifique ». L'homme le moins cultivé arrive par l'intuition, comme les animaux eux-mêmes, à la connaissance d'un grand nombre de vérités géométriques, dont il ne sait pas d'abord séparer l'idée abstraite. En appliquant ces notions aux usages de la vie, il parvient à construire successivement diverses figures simples, il invente pour cela des instruments commodes, et chaque invention est un pas fait vers l'abstraction. On peut constater une relation entre le style de l'architecture de chaque peuple et le caractère de ses connaissances géométriques. Les Grecs ont été à la fois les plus grands architectes et les plus grands géomètres.

Dans les monuments d'Égypte on retrouve partout des traces de préoccupations géométriques. Sans adopter les exagérations auxquelles on s'est livré dans ces derniers temps, en prétendant trouver dans la grande pyramide de Gizeh une gigantesque table de constantes numériques, on ne peut nier des faits tels que l'orientation des pyramides par rapport au méridien, celle de certains temples suivant l'azimut de Sirius, etc; il est aussi très-admissible que le sens mystique attribué à certains nombres leur ait fait jouer un rôle dans le choix des dimensions des édifices sacrés de l'Égypte, comme ils en ont joué un au moyen âge dans la construction des cathédrales gothiques.

La mesure des champs et l'Astronomie ont dû aussi avoir leur part d'influence dans le développement de la Géométrie. Toute l'antiquité s'accorde à faire remonter aux Égyptiens la pratique de l'arpentage, qui a fini par donner son nom à la science générale de l'étendue : les procédés imparfaits dont ils se servaient ont été suivis par les arpenteurs romains, qui n'y ont apporté aucun perfectionnement. L'Astronomie a été cultivée anciennement en Égypte, à Babylone et dans l'Inde; mais nous sommes trop peu renseignés sur l'état de la science chez ces derniers peuples pour en tirer des conclusions relativement à leur Géométrie.

L'auteur résume brièvement ce que nous connaissons de l'antique science des Chinois. A l'engouement qu'ils inspiraient à nos pères au siècle dernier a succédé, chez certains esprits, un mépris exagéré. Quoiqu'il y ait beaucoup à rabattre sur l'antiquité attribuée autrefois aux annales chinoises, il n'en est pas moins certain aujourd'hui que nous possédons des documents authentiques remontant bien au delà de notre ère. Ces documents nous apprennent quelle était l'organisation du corps des astronomes officiels du Céleste Empire. Quant à la Géométrie de cette époque, nous n'en savons guère que ce que nous apprend le *Tchéou-Pi*, et que l'on peut résumer ainsi : 1° avec les côtés 3, 4, 5 on peut former un triangle rectangle; 2° dans ce triangle, on a $3^2 + 4^2 = 5^2$; 3° on peut mesurer les distances à l'aide de l'équerre (sans doute par la considération des triangles semblables). C'est là le plus ancien texte géométrique qui nous soit parvenu.

Au milieu des récits fabuleux des Grecs sur l'origine de la Géométrie en Égypte, on peut démêler ceci, que, dès les temps les plus reculés, la Géométrie n'a pas été cultivée seulement au point de vue pratique, mais encore au point de vue théorique. C'est là que les premiers philosophes grecs sont allés puiser leurs connaissances. Outre le célèbre papyrus de Rhind [1], qui n'est encore connu que par quelques extraits, on possède une inscription, remontant à un siècle environ avant notre ère, et contenant les détails

---

[1] Voir *Bulletin*, t. IV, p. 115.

d'un calcul d'arpentage. L'aire d'un quadrilatère dont les côtés opposés sont a et b, c et d, est donnée par la formule empirique $\frac{a+b}{2} \times \frac{c+d}{2}$, qui est évidemment d'origine égyptienne, les géomètres grecs n'ayant pu ignorer longtemps que l'aire d'un quadrilatère n'est pas déterminée par les seuls côtés. C'est cette formule qu'employaient les *gromatici* romains.

Après ces considérations préliminaires sur les origines de la Science, l'auteur entre en pleine histoire, en abordant l'étude du développement des Mathématiques chez les Grecs pendant la première période, depuis Thalès (600 ans avant J.-C.) jusqu'à la fondation de l'École d'Alexandrie (300 ans avant J.-C.). Les Grecs n'ont pas inventé eux-mêmes les premiers éléments de leur civilisation; ils les ont empruntés aux nations barbares, et les ont fécondés par leur génie. C'est ainsi que leurs premiers géomètres ont puisé leur science en Égypte.

L'introducteur de la Géométrie chez les Grecs a été Thalès, le fondateur de l'École ionienne. On lui attribue la solution de deux problèmes pratiques : la mesure de la hauteur des pyramides d'après la longueur de leur ombre, et celle de la distance d'un navire en mer au moyen d'observations faites sur le rivage. Si Thalès a résolu ces problèmes, ce doit être plutôt en se fondant sur l'égalité des triangles que sur leur similitude, et il n'y a aucune raison sérieuse de désigner la propriété de proportionnalité des côtés de deux triangles équiangles, du nom de « théorème de Thalès ». Il est également très-contestable que ce philosophe ait *démontré*, comme l'affirme Proclus, la division du cercle en deux parties égales par un diamètre, les idées géométriques à cette époque n'étant pas encore assez avancées pour que l'on pût s'apercevoir que, dans ce cas, y il eût lieu à démonstration. Euclide lui-même se contente d'énoncer le fait *dans une définition*. Il est d'ailleurs à peu près impossible de distinguer ce que Thalès a découvert par lui-même de ce qu'il a importé d'Égypte. On peut en dire autant d'OEnopidès de Chios.

C'est incontestablement à l'École pythagoricienne que l'on doit la première impulsion donnée à la Géométrie et la découverte des propositions fondamentales de cette science. Malheureusement les documents anciens sur cette École et sur les travaux de son fondateur sont insuffisants; ils abondent au contraire, mais sans nous instruire davantage, à partir de la naissance de l'École des néo-pythagoriciens. Cette École, imprégnée des doctrines mystiques de l'Orient, a voulu les rattacher au grand philosophe dont elle prétendait continuer les traditions, et elle nous a transmis sur Pythagore des récits qui dégénèrent en véritables romans.

Ce qui semble le mieux établi au sujet des découvertes géométriques du philosophe de Samos, c'est qu'on lui doit le théorème sur la somme des angles d'un triangle. Il paraît que, avant de donner la démonstration au moyen d'une parallèle menée à la base par le sommet opposé, on avait commencé par considérer séparément trois cas : celui du triangle équilatéral, celui du triangle isoscèle, et enfin celui du triangle quelconque. Hankel présente des conjectures très-plausibles sur la manière dont on a dû traiter successivement ces trois cas, en prenant pour axiome l'existence du quadrilatère rectangle.

L'autre grande découverte, à laquelle le nom de Pythagore est resté attaché, est celle de la relation entre les carrés des côtés du triangle rectangle. Mais la première mention qui ait été faite de l'origine pythagoricienne de ce théorème se trouve chez Vitruve, et ne peut inspirer une confiance absolue, d'autant qu'elle est accompagnée de l'anecdote d'une hécatombe offerte à cette occasion, contrairement aux prescriptions formelles du maître lui-même. M. Bretschneider a essayé (¹) de restituer le raisonnement qu'a dû suivre Pythagore; Hankel pense que cette restitution rappelle plutôt la manière des Hindous que celle des géomètres grecs.

Un autre problème important, dont on doit la solution à l'École pythagoricienne, est celui de l'*application* (παραβολή) d'une aire, qui revient à la résolution géométrique de l'équation $ax = b$. Ce problème a été généralisé plus tard sous les noms de ἔλλειψις et de ὑπερβολή, qui correspondent aux équations

$$ax - x^2 = b \quad \text{et} \quad ax + x^2 = b.$$

C'est là l'origine des noms qui ont été, depuis, donnés aux sections coniques, dont on a les équations sous la forme moderne en rem-

(¹) Voir *Bulletin*, t. IV, p. 120.

plaçant dans les formules précédentes b par y^2. On ignore jusqu'où la célèbre école a poursuivi ces recherches, qui exigeaient déjà la connaissance d'un grand nombre de propositions, formant à peu près le contenu des deux premiers Livres d'Euclide.

Ce qui a surtout caractérisé l'École pythagoricienne, ce sont ses recherches sur les nombres. Il y a deux théories qui rattachent l'Arithmétique à la Géométrie, et dont l'une est la recherche des triangles rectangles rationnels. Pythagore donna, pour les valeurs des côtés d'un tel triangle, les formules connues a, $\frac{a^2-1}{2}$, $\frac{a^2+1}{2}$, dans lesquelles on peut attribuer à a toutes les valeurs rationnelles; mais il ne considéra que les valeurs entières et impaires de ce nombre. Hankel conclut de là que cette règle a dû être suggérée par la considération de la propriété des carrés d'être la somme de tous les nombres impairs inférieurs au double de leur racine. Dès lors, si l'on prend un carré impair, tel que 25, il sera la différence entre les carrés de $\frac{25+1}{2}$ et de $\frac{25-1}{2}$, de sorte que 5, $\frac{25-1}{2}$ et $\frac{25+1}{2}$ seront les côtés d'un triangle rectangle.

L'autre découverte capitale que les Pythagoriciens tirèrent de l'étude du triangle rectangle fut celle de l'incommensurabilité. Dans un triangle rectangle isoscèle, le carré de l'hypoténuse étant double de celui du côté, on dut chercher, mais en vain, un nombre qui pût exprimer le rapport de ces lignes. Enfin un trait de génie, dû peut-être à Pythagore lui-même, inspira l'idée que ce problème pouvait bien être insoluble par sa nature, et, en effet, Pythagore démontra qu'il ne pouvait exister deux nombres dont le quotient fût égal à ce rapport, sans que chacun de ces nombres fût à la fois pair et impair [1]. Les Pythagoriciens furent longtemps à se remettre de l'émotion que leur causa cette découverte, qu'ils regardèrent comme un mystère redoutable, l'irrationnel étant pour eux l'ineffable, l'informe (ἀνείδεον). Aussi en gardèrent-ils soigneusement le secret, de crainte d'être précipités dans le séjour des Mères, pour y être battus par les flots éternels.

La démonstration de l'irrationnalité des racines carrées non en-

---

[1] Euclide, X, 117.

tières des nombres entiers ne fut étendue que successivement aux nombres autres que 2. Platon nous apprend que c'est seulement un siècle après la mort de Pythagore que l'on démontra l'irrationnalité des racines des nombres 3, 5, . . . , jusqu'à 17.

Les Pythagoriciens firent voir non-seulement que la somme des nombres impairs donne tous les carrés, ce qui se déduit d'une construction géométrique très-simple, où l'on montre, au moyen de points disposés en carré, que l'on a la relation

$$n^2 + (2n+1) = (n+1)^2;$$

mais encore que la somme des nombres pairs engendre les nombres décomposables en deux facteurs différant entre eux d'une unité, et auxquels on a donné le nom de ἑτερομήκης. On ignore si ces recherches ont été poursuivies jusqu'aux nombres polygones d'ordre supérieur.

Une autre découverte des Pythagoriciens, c'est la théorie des proportions : arithmétique, géométrique et harmonique, exprimée par les égalités

$$a - b = c - d, \quad a : b = c : d, \quad \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{c} - \frac{1}{d}.$$

En supposant dans chacune d'elles les deux moyens égaux, on obtient entre a et d les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique

$$\frac{a+d}{2}, \quad \sqrt{ad}, \quad \frac{2\,ad}{a+d}.$$

Il est probable que Pythagore avait déjà remarqué la proportion

$$a : \frac{a+d}{2} = \frac{2\,ad}{a+d} : d,$$

qui comprend toutes les précédentes, et qui a été appelée la proportion *parfaite* ou *musicale*.

L'idée de la proportion harmonique a été fournie par la considération des longueurs qu'il faut donner à des cordes de même constitution et également tendues, pour leur faire rendre les sons de la gamme. Ce rôle des nombres dans la beauté musicale, comme dans la beauté architecturale, conduisit Pythagore à les regarder comme le fondement universel de l'harmonie du monde, et même comme le principe et l'erreur de toute chose. On conçoit dès lors l'ardeur avec laquelle son École se livra à l'étude des propriétés mystiques des nombres. Les nombres impairs étaient les nombres saints et représentaient le défini; les nombres pairs étaient les représentants profanes de l'infini. Dans l'énumération des couples de contraires que rapporte Aristote, on trouve le carré opposé à l'ἑτερομηκης. Hankel pense que cette opposition équivaut à celle du rationnel et de l'irrationnel, qui sont les racines carrées de ces deux éléments. Il n'appartient pas à l'histoire des Mathématiques de suivre plus loin la célèbre École dans ses rêveries arithmétiques.

Les Mathématiques au v^e *siècle.* — Lorsque, vers le milieu du v^e siècle avant J.-C., un mouvement démocratique dans les Républiques de la Grande-Grèce eut détruit les écoles pythagoriciennes et chassé leurs adeptes, ceux-ci se dispersèrent dans la Grèce propre, où ils purent divulguer les doctrines jusque-là tenues secrètes. Un des plus illustres de ces fugitifs fut Hippocrate de Chios, qui, le premier, écrivit un Traité de Géométrie; il vint se fixer à Athènes, où il enseigna cette science, et qui devint pendant longtemps le centre des études mathématiques.

Tous les écrits d'Hippocrate sont perdus, à l'exception d'un précieux fragment qui nous a été conservé par Simplicius, et que M. Bretschneider a récemment mis en lumière. Ce fragment montre avec quel soin et quelles précautions les géomètres de cette époque procédaient dans leurs démonstrations et dans leurs instructions. Nulle part on n'y découvre le besoin de généraliser une règle pour faire mieux comprendre la marche du raisonnement et pour éviter les répétitions fastidieuses. Cette habitude de n'opérer jamais que sur des cas particuliers s'est conservée pendant toute la période de la Géométrie classique. Seulement nous ne trouvons pas encore chez Hippocrate cette régularité solennelle que, cent cinquante ans plus tard, Euclide introduisit dans la disposition de ses raisonnements.

C'est chez Hippocrate que l'on trouve, pour la première fois, une application de la similitude des figures, dans le cas de deux triangles isoscèles. On ne sait s'il avait étendu cette notion aux triangles quelconques. Il faut songer d'ailleurs à la difficulté énorme qu'offrait aux anciens l'établissement de la théorie des proportions, dans un temps où l'on ne pouvait avoir l'idée de traiter les nombres incommensurables, symboles de la limite du résultat d'une infinité d'opérations, comme on traite les nombres commensurables, qui représentent des opérations en nombre fini. Aussi, chez Euclide, la théorie des proportions entre les grandeurs continues ne s'appuie en aucune sorte sur la théorie des proportions entre les nombres. C'est de l'École platonicienne qu'est sortie la théorie exposée par Euclide dans son Livre V. D'après le témoignage d'Aristote, ceux qui, les premiers, avaient traité de la proportionnalité des grandeurs avaient donné des démonstrations séparées pour chaque espèce de grandeur, faute d'un terme général pour désigner à la fois le nombre, la longueur, le volume, le temps, etc.

Dans le v^e siècle ont été découverts les théorèmes sur le cercle, dont on ne trouve pas de trace chez les anciens Pythagoriciens. Hippocrate considéra les segments *semblables,* c'est-à-dire dans lesquels on peut inscrire des triangles isoscèles semblables. C'est sans doute à lui qu'on doit le théorème de la proportionnalité des aires de ces segments aux carrés de leurs cordes, et par suite des aires des cercles aux carrés de leurs diamètres. Mais il paraît n'avoir pas connu dans sa généralité la relation entre l'angle inscrit et l'angle au centre qui comprennent le même arc entre leurs côtés.

La quadrature du cercle et la méthode d'exhaustion. — Le passage cité d'Hippocrate faisait partie de ses recherches sur la quadrature du cercle, problème qui, avec deux autres non moins célèbres, occupait alors tous les savants d'Athènes. Pour poser ce problème, il fallait d'abord avoir complétement résolu celui de la quadrature d'une figure rectiligne quelconque, après quoi se présentait le cas des aires curvilignes les plus simples. Déjà Anaxagore dans sa prison avait vainement médité sur ce sujet.

C'était le temps où les sophistes commençaient à faire leur apparition. Quelques-uns, ayant entendu parler des nombres *cycliques* (c'est-à-dire de ceux qui, comme 5 et 6, ont toutes leurs puissances terminées par le même chiffre), s'imaginèrent avoir trouvé la quadrature du cercle, parce qu'ils avaient trouvé un nombre à la fois cyclique et carré.

D'autres sophistes soutinrent que la quadrature était impossible, parce qu'on ne pouvait comparer entre elles des choses qualitativement différentes, comme le droit et le courbe. D'autres défendirent la possibilité par des raisons aussi concluantes. L'un deux toutefois, Antiphon, entrevit le premier la réalisation d'une solution indéfiniment approchée, par l'inscription de polygones réguliers dont le nombre des côtés irait toujours en doublant. Seulement il crut que l'on pourrait finir par obtenir ainsi une solution rigoureusement exacte. Cette opinion fut combattue, comme on pouvait s'y attendre. On était à l'époque où Zénon soutenait l'impossibilité du mouvement, par la raison que, l'espace étant divisible à l'infini, on parcourrait dans un temps fini une infinité d'espaces; comme si le temps n'était pas, aussi bien que l'espace, divisible à l'infini, d'où il résulterait que l'infinité d'espaces serait parcourue dans une infinité de temps; comme si, d'autre part, on n'aurait pas pu aussi bien nier la divisibilité de l'espace à l'infini, en objectant que le fini ne peut pas contenir l'infini. C'est Aristote qui a le premier réfuté ces paradoxes, lesquels ne peuvent manquer de se représenter toutes les fois que l'on voudra introduire dans la science de la grandeur l'infini absolu des métaphysiciens, qui est la négation de l'idée de grandeur. Cependant Aristote lui-même n'était pas en état d'écarter toutes les obscurités qu'entraîne la considération de l'infini. Les Grecs ne possédaient pas la notion moderne d'une variable toujours mesurable, mais *pouvant* croître arbitrairement, et vis-à-vis de laquelle il est permis de négliger l'influence de l'addition d'une constante, le but de l'introduction de cette variable étant la recherche d'une limite indépendante de la constante ajoutée. Ils n'avaient en vue que l'infini actuel, et quant au très-petit, ils le rangeaient avec raison parmi les quantités finies, comme l'exprime ce lemme, invoqué par Archimède et déjà connu avant lui : « Quelque petite que soit la différence de deux aires, on pourra, en l'ajoutant à elle-même un assez grand nombre de fois, surpasser toute aire finie donnée ». Le théorème sur le rapport des aires des cercles, qu'Eudémus attribue à Hippocrate, prouve que ce géomètre devait déjà, un siècle et demi avant Archimède, s'être servi du lemme en question, qui, sous une forme ou sous une autre, a été le fondement de la méthode d'exhaustion des anciens.

Le principe de cette méthode aurait pu être démontré généralement une fois pour toutes, en établissant que, si les termes de deux séries de grandeurs pouvant être prolongées indéfiniment,

$$V_1,\quad V_2,\quad V_3,\ldots,$$
$$V'_1,\quad V'_2,\quad V'_3,\ldots,$$

sont dans un rapport constant, de sorte qu'on ait

$$V_1 : V'_1 = V_2 : V'_2 = V_3 : V'_3 = \ldots = \alpha : \beta,$$

et si les V s'approchent aussi près qu'on voudra d'une quantité K, et de même les V′ d'une quantité K′, on aura aussi

$$K : K' = \alpha : \beta.$$

Mais ni Euclide ni Archimède n'ont eu la pensée d'une telle généralisation; ils n'ont jamais établi de méthode générale et uniforme, et se sont toujours contentés de démontrer indépendamment les uns des autres les théorèmes analogues concernant les diverses espèces de grandeurs.

L'imperfection de l'art du calcul était un obstacle qui s'opposa longtemps à l'application des méthodes rigoureuses pour la détermination du rapport approché de la circonférence au diamètre. Il fallut toute l'habileté d'un Archimède pour arriver au calcul du périmètre du polygone régulier de 96 côtés, et en déduire que le nombre cherché était compris entre $3\frac{10}{70}$ et $3\frac{10}{71}$.

Hippocrate avait pris une autre voie pour parvenir à la quadrature du cercle. Il espérait en venir à bout par ses recherches sur les lunules; après avoir avoir trouvé la quadrature non-seulement de la lunule construite sur le côté du carré, mais encore de toutes les lunules qui ont été depuis reconnues carrables, il indiqua que la solution de la quadrature du cercle dépendait de la quadrature de la lunule construite sur le côté de l'hexagone. D'après le texte du passage conservé, il aurait cru posséder la solution de cette dernière question; mais il ne nous reste aucun renseignement sur la manière dont il aurait tenté de l'obtenir.

Ecole Platonicienne. — La fin du v^e^ siècle, occupée par la guerre du Péloponnèse, fut à peu près stérile pour les Mathématiques, si l'on excepte les travaux de Démocrite, qui doivent appartenir à cette époque. Avec le iv^e^ siècle commence une période glorieuse par la réunion de tous les talents mathématiques dans l'Académie. Platon (429-348) ne partageait pas sur la Géométrie les vues de son maître Socrate, au dire duquel cette science n'avait d'utilité que pour l'arpentage. Il s'appropria la science des Pythagoriciens et leurs idées mystiques sur les nombres et les figures. L'âme du monde a son essence dans les nombres et les rapports constants. Les éléments du monde matériel sont les corps réguliers de la Géométrie. Par analogie, tout dans les sociétés humaines doit être réglé par nombres et par proportions. La Géométrie est la science de ce qui est éternellement. Les Mathématiques sont l'intermédiaire entre le monde réel, celui des idées, et le monde du néant, c'est-à-dire la matière. Aussi comprend-on qu'il ait pu inscrire sur la porte de son École la sentence d'exclusion des non-géomètres que lui prête un versificateur byzantin.

Platon recommandait les Mathématiques non-seulement à cause de leur importance théorique, mais encore pour leur utilité pratique, comme rendant l'esprit plus propre à toute autre espèce d'étude. C'est à l'estime que Platon leur a portée que les Mathématiques doivent d'avoir conservé à toutes les époques une place, si restreinte qu'elle soit, dans l'enseignement de la jeunesse.

Progrès dans les éléments. — En Arithmétique et dans la théorie générale des grandeurs, on attribue à Platon lui-même ces théorèmes : « Entre deux nombres carrés on peut toujours insérer une moyenne proportionnelle entière; entre deux cubes on en peut insérer deux ». Il modifia un peu la formule de Pythagore pour la formation des triangles rectangles en nombres entiers.

Le pythagoricien Archytas et son disciple Eudoxe s'occupèrent particulièrement des proportions. On attribue au second la théorie des proportions exposée depuis par Euclide dans son Livre V. Théétète passe pour avoir démontré d'une manière générale qu'un entier non carré parfait ne peut avoir de racine carrée rationnelle.

La Stéréométrie était peu avancée quand l'École platonicienne entreprit de la perfectionner. On doit à cette École d'avoir complété la théorie des polyèdres réguliers, d'avoir découvert les propriétés essentielles du prisme, de la pyramide, du cylindre et du cône de révolution. Le problème de la duplication du cube, posé vers cette époque, imprima aux études géométriques une grande impulsion, et Ménechme découvrit alors les sections coniques.

Platon ne s'occupait guère personnellement de recherches mathématiques; il se contentait d'encourager ses disciples dans cette étude, en les éclairant par d'ingénieux aperçus. Les méthodes rigoureuses de démonstration étaient déjà connues, comme on l'a vu, dès le v[e] siècle; mais, bien que les géomètres eussent admis sans hésitation les notions du point, de la ligne, de la surface, etc., on n'avait pas encore songé à donner de ces êtres géométriques des définitions exactes. C'est l'École de Platon qui, la première, établit ces définitions, telles qu'on les trouve chez Euclide. Elle fixa aussi les axiomes qui servent de base à la Science. On est fondé à croire que, dès le temps d'Aristote, les *Éléments* rédigés par Léon et par Theudius avaient déjà reçu la forme dont on considère vulgairement Euclide comme l'inventeur.

Hankel décrit ensuite, dans un remarquable article [1] que nous n'entreprendrons pas de résumer, la méthode analytique, autre création capitale de Platon, grâce à laquelle les Mathématiques purent s'élever au-dessus des éléments.

Les sections coniques et la duplication du cube. — Ménechme obtenait les sections coniques en coupant un cône droit par un plan perpendiculaire à une arête, et la nature de la section dépendait ainsi de l'angle au sommet du cône. C'est Apollonius qui reconnut le premier que les trois espèces de courbes peuvent s'obtenir à l'aide d'un même cône, et qui leur donna les noms actuellement en usage. Dès la fin du IV[e] siècle, la théorie des sections coniques était tellement avancée qu'Aristée l'Ancien composa sur ces courbes un Traité en cinq livres.

Dinostrate, frère de Ménechme, inventa la quadratrice, qui lui servit à partager un angle en un nombre quelconque de parties égales. La découverte de cette courbe et de quelques autres peut-être introduisit dans la Science la notion de lieu géométrique.

Un autre problème qui contribua beaucoup aux progrès de la Géométrie fut celui de la duplication du cube, connu sous le nom de *problème de Délos,* d'après son origine légendaire. Hippocrate reconnut que ce problème se ramenait à la construction de deux moyennes proportionnelles. Platon et ses disciples en trouvèrent

---

(1) *Ein Muster von Vertiefung in den philosophisch-mathematischen Geist.* (CANTOR, *Zeitschr. f. Math. u. Physik,* 1875.)

différentes solutions, soit par des procédés mécaniques, soit par des constructions de sections coniques.

Là finit la première Section du livre de Hankel. De la Section suivante, qui devait traiter de la seconde période de la Géométrie grecque, l'auteur n'a laissé que des fragments, dont un seul de quelque étendue, consacré à la Géométrie d'Euclide, a été reproduit par l'éditeur à la fin du volume (p. 381-404). Nous en donnerons ici un aperçu, pour interrompre le moins possible l'ordre chronologique des matières.

Euclide. — Après avoir exposé le peu que l'on sait, par Proclus et Pappus, sur la personne d'Euclide, l'auteur passe à l'examen de ses Ouvrages et en particulier des *Éléments*. Ce livre est le plus ancien des Traités de Mathématiques que nous ait laissés l'antiquité, et c'est le seul qu'on lise encore de nos jours comme ouvrage classique. Il a fait oublier tous les Traités qui l'ont précédé, et qui, pour cette raison, nous sont restés presque totalement inconnus.

Hankel indique sommairement le contenu des treize Livres des *Éléments*, et il entre ensuite dans une analyse détaillée et critique des méthodes du géomètre grec. Et d'abord, le texte d'Euclide que nous possédons est-il complétement authentique? On est porté à croire qu'il s'est conservé pur, à quelques interpolations près, comme celles qu'a pu y introduire Théon d'Alexandrie, et que l'on reconnaît parfois à ce qu'elles interrompent la suite naturelle des propositions. Parmi les différents textes que présentent les manuscrits, celui de l'édition de Peyrard est généralement le plus correct, et la plupart des passages interpolés ne s'y trouvent pas.

Les deux Livres que Hankel étudie comme les plus importants sont le V^e et le VI^e. Dans le Livre V, Euclide traite, comme on sait, des proportions entre des grandeurs quelconques. On peut remarquer que, bien que les nombres soient un cas particulier des grandeurs en général, Euclide, dans son Livre VII, n'en reprend pas moins, pour les nombres, la théorie des proportions tout entière par un autre mode de raisonnement. Une proportion telle que $a:b = 3:4$ n'est pas définie, tant qu'on n'admet pas les nombres comme un cas particulier des grandeurs. Hankel, en relevant cette lacune chez Euclide, rappelle à cette occasion le caractère des méthodes des géomètres grecs, qui n'ont jamais cherché à éviter par l'emploi des propositions générales les répétitions qu'entraîne leur étude exclusive des cas particuliers. Il est probable qu'Euclide a reçu séparément de ses prédécesseurs les théories des deux sortes de proportions, et que, naturellement enclin au respect de la tradition, il nous les a transmises sans chercher à les fondre en une seule.

Après avoir discuté la sixième définition du Livre V, l'auteur passe aux autres définitions. Il pense, avec d'autres géomètres, que les définitions 3 et 4, bien que se trouvant dans tous les manuscrits, ont dû être interpolées à une époque où l'on avait cessé de comprendre le Livre V, et il soupçonne Théon d'Alexandrie d'être l'auteur de cette addition. L'authenticité de la définition 9 lui semble également suspecte.

Hankel termine son examen du Livre V, en remarquant que, si Euclide démontre des propositions telles que celles-ci :

« Si $a=b$, on a $a:c=b:c$ » ;

« Si $a:b=c:d$ et $e:f=c:d$, on a $a:b=e:f$ »,

qui nous sembleraient aujourd'hui évidentes, c'est que, n'ayant pas défini le rapport en lui-même comme une quantité, il ne se croyait pas en droit d'appliquer aux rapports l'axiome admis pour les quantités, que deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles.

Dans le Livre VI, Euclide oublie de justifier la définition qu'il donne des polygones semblables, en établissant la possibilité de leur existence. Il eût suffi pour cela de démontrer que deux polygones formés avec des triangles semblables sont eux-mêmes semblables.

Dans tous les textes connus, on rencontre une définition arithmétique du rapport composé, qui s'écarte essentiellement de l'esprit d'Euclide, et que l'on doit considérer comme une interpolation. La définition dont Euclide fait réellement usage revient à dire que, si l'on a $a:b=a':b'$, $b:c=b':c'$, $c:d=c':d'$, le rapport $a:d$ est égal au *rapport composé* des rapports $a':b'$, $b':c'$, $c':d'$.

Un rapport composé de deux rapports égaux est dit rapport *doublé* (*ratio duplicata*, λόγος διπλασίων), qu'il ne faut pas confondre avec le rapport *double* (*ratio dupla*, λόγος διπλάσιος), $2m:m$, des arithméticiens.

L'article se termine par l'examen de quelques-unes des propositions les plus importantes du Livre VI.

Diophante. — Nous reprenons maintenant l'ordre des matières, en franchissant la lacune laissée par l'auteur, et arrivant à Diophante, le seul représentant connu de l'Algèbre et de l'Analyse indéterminée chez les Grecs.

En étudiant les œuvres d'hommes de génie, tels qu'Euclide, Archimède, Apollonius, on n'y rencontre, comme productions arithmétiques, que des essais qui rappellent l'enfance de la Science, mais une enfance sénile, pour ainsi dire, et frappée d'avance de stérilité. Tout à coup, sans aucune transition, autant qu'en en peut juger par les documents qui nous restent, apparaît un homme apportant une idée neuve et féconde, mais qui disparaît ensuite du sol de la Grèce, sans y avoir pris racine. Ce n'est qu'après avoir sommeillé pendant des siècles que cette idée est reprise par les Hindous et les Arabes.

Nous ignorons tout ce qui concerne la personne de Diophante, si ce n'est qu'il habitait Alexandrie. Son nom (Διόφαντος ou Διοφάντης) n'est pas exactement connu, son lieu de naissance encore moins; même incertitude sur l'époque de sa vie : on conjecture que c'était vers l'an 360 de notre ère. Son Livre des *Porismes* est perdu; il nous reste de lui un fragment d'un écrit *sur les nombres polygones*, et six des treize Livres dont se composait son grand Ouvrage sur l'*Arithmétique;* heureusement les sept autres Livres paraissent avoir été de beaucoup les moins importants.

Après avoir analysé les procédés de Diophante, et avoir montré combien sa méthode différait de celle des géomètres grecs de l'époque classique, Hankel résume son jugement sur cet auteur, en lui accordant une place éminente au point de vue de l'originalité de ses productions et de la sagacité qu'il déploie dans ses recherches. Mais il lui manque d'une part la perfection et la rigueur que l'on admire chez ses illustres devanciers, et d'autre part l'esprit de généralisation des modernes. On ne trouve chez Diophante aucune trace de méthode générale, et lorsqu'une question comporte plusieurs solutions, il se contente toujours d'en avoir obtenu une seule, sans se préoccuper des autres. Le génie grec était déjà trop déchu pour que l'inventeur d'une science nouvelle pût faire école. Ce fut à un autre peuple, destiné à ce rôle par ses aptitudes naturelles, qu'échut la tâche de cultiver et d'augmenter les connaissances acquises par Diophante.

Les Mathématiques des Hindous. — L'auteur rappelle d'abord en quelques pages les travaux philosophiques et grammaticaux des disciples de Brahma. Leurs connaissances astronomiques étaient peu étendues, ce qui s'explique naturellement chez un peuple qui ne s'est jamais occupé d'observer. Seulement ils savaient calculer les éclipses, au moyen de coquilles qui leur servaient de jetons, et avec une dextérité et une sûreté qui étonnent un Européen. On a cru autrefois que ces méthodes étaient des restes d'une antique science, dont la connaissance eût été très-précieuse pour le perfectionnement de l'Astronomie moderne; mais il semble établi que les astronomes hindous n'ont guère fait qu'appliquer leurs procédés de calcul perfectionnés aux méthodes des Grecs, plus ou moins modifiées. Il paraît établi, en effet, qu'aux temps de la domination romaine en Égypte, il existait un commerce actif entre Alexandrie et l'Inde, et qu'il en a dû résulter entre les deux nations un échange d'idées, qui expliquerait l'introduction de l'Algèbre en Grèce, comme celle de l'Astronomie sur les bords du Gange.

Le plus ancien mathématicien hindou dont les Ouvrages aient été conservés est Âryabhatta, né en 476 : son principal livre est un Traité de Mathématiques et d'Astronomie, l'*Âryabhattîyam* (appelé aussi, à tort, *Ârya-siddhânta*), que l'on possède complet en manuscrit, mais qui n'a pas encore été imprimé. Son contenu mathématique est présenté d'une manière très-concise, et réduit à ce qui est indispensable pour les calculs astronomiques. On a découvert récemment que le nom d'*Ârya-siddhânta* avait été attribué à deux Ouvrages différents, dont l'un était l'écrit d'Âryabhatta dont nous venons de parler, et l'autre un écrit beaucoup plus récent, ne remontant pas au delà du XII^{e} siècle. Hankel a pu se procurer, grâce à l'obligeance du professeur H. Kern, de Leyde, la traduction de quelques extraits intéressants des œuvres manuscrites de l'antique géomètre hindou.

Dans le siècle qui suivit Âryabhatta, les Mathématiques arrivèrent au plus haut point de développement qu'elles aient atteint dans l'Inde, et qui est représenté par le *Brâhmasiddhânta*, écrit en 628 par Brahmagupta (né en 598). Entre l'époque de Brahmagupta et celle de Bhâskara Atchârya (né en 1114), la science indienne resta stationnaire, et l'histoire a peu de noms remarquables à citer. Bhâskara est l'auteur du célèbre *Siddhânta-Çiromani*, qui contient deux Traités mathématiques : le *Lîlâvatî*, consacré à l'Arithmétique, et le *Vîdjaganita*, où est exposée l'Algèbre proprement dite. Ces deux Traités, avec celui de Brahmagupta, sont les seuls ouvrages mathématiques des Hindous dont on possède une traduction, due à Colebrooke.

Après Bhâskara, l'esprit d'invention semble éteint dans l'Inde ; on ne rencontre plus que des commentateurs, et aujourd'hui le livre le plus en vogue dans ce pays est un Traité arabe assez pauvre du XVI[e] siècle, le *Hilâset-al-Hisâb* de Beha-Eddin. A ce propos, Hankel fait observer que l'on aurait grand tort de conclure de ces circonstances que des vérités mathématiques dont les commentateurs ne sont plus en état d'établir la démonstration n'aient été qu'incomplétement comprises par leurs prédécesseurs, et qu'elles soient par conséquent des emprunts faits à l'étranger. Chez nous, il est vrai, l'énoncé et la démonstration d'une proposition sont toujours transmis l'un avec l'autre ; il n'en était pas ainsi chez les Hindous, qui n'écrivaient que les énoncés versifiés, les démonstrations se transmettant oralement dans les écoles brahmaniques, ce qui explique comment la tradition a pu s'en perdre.

Représentation des nombres. — Âryabhatta ne semble pas avoir connu le système de position ; mais sa méthode pour représenter les grands nombres offre un exemple remarquable de l'aptitude des Hindous pour inventer des notations abrégées. Il représente par les consonnes de l'alphabet sanscrit les nombres 1, 2, 3, ..., 25, 30, 40, ..., 90, et les voyelles indiquent les puissances de 100 par lesquelles ces nombres doivent être multipliés. Ainsi, *ga* $= 3$, *gi* $= 300$, *gu* $= 30000, \ldots,$ *gô* $= 3.100^8$. On formait ainsi avec les nombres des mots qui pouvaient entrer dans les vers techniques des énoncés. On rencontre aujourd'hui dans le Dekhan des traces d'un système analogue.

On trouve encore dans les Ouvrages postérieurs un système de position, dans lequel les unités sont énoncées en commençant par l'ordre le moins élevé, et où l'on emploie, pour traduire les chiffres, des synonymes désignant des objets de la nature qui ont quelque rapport avec les nombres correspondants à ces chiffres. Ce mode de lecture facilite l'introduction des nombres dans les vers, et sert en même temps de moyen mnémonique pour les retenir.

Art du calcul, Arithmétique. — Les auteurs hindous traitent du calcul en nombres entiers et en fractions : ils désignent ces dernières par leurs deux termes superposés, sans être séparés par un trait; ils donnent diverses méthodes commodes pour l'extraction des racines carrée et cubique. Les calculs se faisant sur de petites tablettes de bois peintes en noir ou en rouge, où l'on trace les chiffres à l'encre blanche au moyen d'un roseau, le manque de place force à effacer les chiffres à mesure qu'ils deviennent inutiles. C'est sur cette nécessité que sont fondés les ingénieux procédés des calculateurs hindous. A la suite des règles du calcul, le Lîlâvati donne comme applications la résolution de divers problèmes. Il contient aussi la théorie des combinaisons, la sommation des progressions arithmétique et géométrique, celle des carrés et des cubes des nombres naturels, etc.

Algèbre. — On la trouve exposée dans le Vîdja-ganita, d'une manière scientifique et indépendante du Livre élémentaire qui le précède. L'addition est indiquée par une simple juxtaposition des signes de quantités; la soustraction par la juxtaposition, en surmontant d'un point le nombre à soustraire; la multiplication en séparant les deux facteurs par une abréviation du nom de cette opération; la division en plaçant le dividende *sous* le diviseur; la racine carrée en faisant précéder la quantité de l'abréviation du mot qui signifie *irrationnel.* Pour représenter l'inconnue, l'auteur emploie les initiales d'un mot signifiant *tantum quantum.* Lorsqu'il y a plusieurs inconnues, on les distingue par les noms de diverses couleurs.

Dans l'Algèbre indienne, on rencontre pour la première fois des quantités absolument négatives, isolées dans un membre de l'équation. Bhâskara connaît parfaitement la double solution de l'équation du second degré, qui avait échappé à Diophante. Diophante opère toujours sur des nombres rationnels, tandis que les Hindous exécutent des transformations sur des expressions entièrement irrationnelles. C'est ce qui leur a permis d'appliquer l'Algèbre à des problèmes géométriques, et de les résoudre d'une manière bien plus simple et plus directe que les Grecs n'auraient pu le faire par leur analyse purement géométrique.

Les Grecs ont bien pu calculer approximativement la valeur d'une irrationnelle géométrique donnée sous forme explicite au moyen de grandeurs connues; mais ils n'ont jamais su dégager une inconnue d'une relation implicite.

La séparation infranchissable qui existait chez les Grecs entre les nombres et les grandeurs continues n'est jamais entrée dans l'esprit des Hindous. Si la science indienne perdait ainsi sous le rapport de la rigueur, elle acquérait par contre une liberté d'allures et une hardiesse qui ont fait des savants brahmanes les vrais fondateurs de l'Algèbre.

Sous le rapport du calcul algébrique appliqué aux équations déterminées, ils n'ont guère été plus loin que Diophante. Ils ont résolu l'équation du second degré et quelques équations de degré supérieur facilement transformables en équations résolubles par radicaux; mais leurs découvertes les plus importantes sont celles qu'ils ont faites en Analyse indéterminée.

Analyse indéterminée. — Le champ des recherches des Hindous sur cette branche des Mathématiques embrasse entièrement celui des travaux de Diophante; mais chez eux les problèmes résolus par des artifices ingénieux et singuliers forment l'exception; la plupart des solutions reposent sur des principes déterminés, applicables à des groupes entiers de problèmes. L'Analyse indéterminée des Hindous diffère encore de celle de Diophante en ce qu'elle considère comme condition essentielle que les solutions soient données en nombres *entiers*, et c'est à ce point de vue qu'elle traite de la solution générale des équations indéterminées du premier et du second degré.

Depuis Âryabhatta, les Hindous connaissent une méthode pour la résolution en nombres entiers de l'équation $ax + by = c$. Cette méthode diffère peu de celle que l'on attribue faussement à Diophante, et qui a été donnée pour la première fois, en Europe, par son commentateur Bachet de Meziriac, en 1624. Cette classe de problèmes, tout à fait inconnus des Grecs, a sans doute eu son origine dans des problèmes chronologiques et astrologiques, tels qu'en fournit la théorie du calendrier.

Des équations du premier degré, les Hindous ont passé à la résolution de l'équation $ax + by + c = xy$; ils connaissaient déjà la méthode donnée par Euler dans son *Algèbre*.

Quant aux équations indéterminées du second degré, ils savaient les ramener, dans tous les cas, à la forme $ay^2 + s = x^2$. Ils ne se sont pas contentés, comme Diophante, de résoudre cette équation dans quelques cas particuliers, en nombres rationnels; ils ont créé une méthode *générale* pour résoudre en nombres *entiers* l'équation $ay^2 + 1 = x^2$, si importante encore aujourd'hui dans la théorie des formes quadratiques. Cette méthode, appelée par eux *méthode cyclique*, est incontestablement la plus brillante de leurs découvertes, et l'on peut même dire que c'est ce qui a été fait de plus beau en théorie des nombres jusqu'au temps de Lagrange, qui a inventé de nouveau ce procédé dans son Mémoire de 1769.

Ainsi les Hindous étaient à une époque très-ancienne en possession de connaissances algébriques très-développées, comprenant presque tout le contenu du Livre de Diophante. Il est à supposer que ces connaissances se sont transmises, au moins en partie, aux Grecs d'Alexandrie, qui les ont cultivées comme curiosités mathématiques, et que Diophante les a rassemblées dans son Ouvrage en les exposant sous une forme en harmonie avec l'esprit hellénique, et en y ajoutant ses propres recherches. Mais ce rameau arraché à l'arbre de la science indienne et transplanté sur un sol étranger n'a pu y prendre racine, et, après avoir poussé quelques feuilles, a péri sans laisser de traces.

Principes de la Géométrie des Hindous. — La Géométrie indienne, bien inférieure à leur Algèbre, offre un caractère tout différent de la Géométrie d'Euclide. On n'y trouve ni définitions, ni axiomes, ni séries de démonstrations enchaînées par une logique rigoureuse. Chaque proposition se présente isolée, comme un fait. Pas d'autre démonstration que la raison d'évidence. La seule proposition auxiliaire dont il soit fait usage est celle du carré de l'hypoténuse. Les moyens de conviction reposent sur deux principes : le principe de coïncidence et de symétrie, et le principe de similitude. Aussi la Géométrie constructive a-t-elle été peu cultivée; les recherches ont plutôt porté sur la Géométrie de mesure.

Calcul du triangle et du quadrilatère. — La proposition fondamentale du carré de l'hypoténuse se démontre en construisant le triangle rectangle sur chacun des quatre côtés du carré de son hypoténuse et à l'intérieur de ce carré. En transposant ensuite les diverses parties de la figure ainsi formée, on en forme la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit. L'auteur du Vîdjaganita trace la figure, en ajoutant ce simple mot : « Vois! »

Brahmagupta donne l'expression de la surface du triangle au moyen des trois côtés. Hankel indique des raisons qui portent à croire que cette formule n'a pas été empruntée à Héron d'Alexandrie, mais qu'elle a été découverte par les Hindous, indépendamment des Grecs.

M. Chasles a cru trouver chez Brahmagupta une théorie complète du quadrilatère inscrit, comprenant le théorème de Ptolémée et l'expression donnée par Snellius pour l'aire de ce quadrilatère en fonction de ses côtés. Hankel montre que l'auteur indien n'a traité en réalité que le cas où ce quadrilatère a ses diagonales perpendiculaires entre elles et celui où il les a égales entre elles (trapèze isoscèle), et il appuie son assertion sur les méthodes de construction de ces quadrilatères indiquées à la fin du Traité de Brahmagupta.

Quadrature du cercle et Trigonométrie. — Les Hindous connaissaient bien les théorèmes nécessaires pour le calcul du cercle, de ses cordes, des polygones réguliers inscrits, etc., et ils étaient arrivés ainsi à des valeurs très-approchées du rapport de la circonférence au diamètre. On trouve chez eux, pour ce rapport, les valeurs $\sqrt{10}$; $\frac{22}{7}$; $3,1416 = \frac{3927}{1250}$. Ils passaient du côté du polygone inscrit de n côtés à celui du polygone de $2n$ côtés au moyen de la formule $s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$.

La Trigonométrie des Hindous différait beaucoup de celle des Grecs. Ils ne calculaient pas au moyen des cordes, mais au moyen des sinus et des sinus verses. A l'aide des bissections d'angles et du calcul des sinus des compléments, ils avaient construit, par un procédé théoriquement très-simple, une Table de sinus procédant suivant l'intervalle de $3°25'$. Les sinus étaient exprimés en parties d'arc; ainsi $\sin 90°$ était représenté par l'arc égal au rayon $(3438')$, et $\sin 3°25'$ par $225'$, de sorte que cet arc pouvait être confondu avec son sinus. Entre les sinus de trois arcs consécutifs a, b, c de cette Table, ils remarquèrent la relation

$$\sin c - \sin b = (\sin b - \sin a) - \frac{\sin b}{225},$$

qui pouvait servir à reconstruire facilement la table. Bhâskara donne des valeurs encore plus approchées

$$\sin 3°45' = \frac{100}{1529}, \quad \cos 3°25' = \frac{466}{467},$$

en erreur d'un dix-millionième seulement. Pour leurs calculs astronomiques, les Hindous connaissaient la formule du triangle rectangle $\sin h \sin d = \sin a$; mais le plus souvent ils ramenaient très-adroitement le calcul des triangles sphériques à celui des triangles rectilignes.

Les Hindous ont fait preuve d'une grande habileté pour l'établissement des formules d'approximation. Bien que ces formules rappellent souvent celles de Héron, cependant la ressemblance n'est pas poussée assez loin pour qu'on soit forcé d'admettre un emprunt. En général, rien ne justifie jusqu'à présent la supposition que les Hindous n'aient pas eux-mêmes créé leur science, et qu'ils l'aient reçue des Grecs.

Hankel termine son Chapitre sur les Mathématiques des Hindous par un parallèle intéressant entre le génie de ce peuple et le génie grec, dont les caractères divers apparaissent de la manière la plus frappante dans leurs travaux mathématiques. Nos lecteurs nous sauront gré de donner ici la traduction de ce passage, qui répond d'avance aux attaques dirigées récemment contre la science indienne :

« Si la tâche de l'historien est surtout, par la peinture des divers peuples et des diverses époques, d'élargir si bien nos idées, que nous ne soyons plus tentés de prendre, par étroitesse de vues, les choses de telle ou telle époque, de tel ou tel peuple pour l'état absolument normal; si la tâche spéciale de l'historien des Mathématiques est, selon moi, de dissiper le préjugé qui porte à croire à l'existence d'un seul mode d'évolution historique, d'une seule forme de développement scientifique de cette science, le Chapitre que nous terminons en ce moment doit être un des plus instructifs.

» Accoutumés dès le jeune âge à la forme rigoureuse de la Géométrie des Grecs, remplis de vénération pour la littérature classique de ce peuple, nous avons grandi dans la croyance que cette forme est absolument nécessaire, qu'elle est la seule scientifique, et nous remarquons à peine que non-seulement la forme, mais aussi l'esprit de notre Arithmétique et de notre Algèbre, et même de tout l'ensemble des Mathématiques modernes, diffère complétement de la forme et de l'esprit de l'antique Géométrie. Le lecteur n'aura pas manqué de reconnaître combien l'esprit de la Science moderne touche de près à celui qui se révèle dans les Mathématiques des Hindous; la suite de ce Livre fera voir à quel point, d'après le témoignage même de l'histoire, le développement des peuples modernes a subi, par l'intermédiaire des Arabes, l'influence du génie de l'Inde. Dans ces circonstances, les Mathématiques de nos congénères des bords du Gange acquièrent un haut intérêt, que nous justifierons en résumant encore une fois, comme conclusion, les dispositions caractéristiques de ce peuple.

» Parmi ces particularités de l'esprit hindou, on remarquera d'abord la prépondérance de l'intuition immédiate dans le développement de la Géométrie, ce qui forme un contraste singulier avec la construction des propositions par l'intermédiaire des notions abstraites chez les Grecs. Nous nous sommes déjà prononcé sur les avantages et les défauts de ces deux tendances, et nous nous contenterons d'ajouter une observation : de même que la méthode euclidienne n'est pas devenue par l'effet du hasard la méthode des mathématiciens grecs, de même cette méthode intuitive des Brahmanes ne s'appliquait pas seulement à la Géométrie, mais avait une portée plus générale. La Métaphysique des Brahmanes, leur Cosmologie, leur Théologie n'étaient pas, comme la Philosophie des Grecs, le produit d'une activité réflective, analysant les images perçues, pour en former des concepts, et cherchant, par la combinaison logique et systématique de ceux-ci, à parvenir à la connaissance de la vérité ; leur méthode est bien plutôt celle de l'intuition immédiate, de l'entière concentration de l'esprit sur une pensée pour la creuser, de l'absorption mystique dans les idées les plus sublimes, alors que l'esprit, s'oubliant lui-même, croit voir les pensées qui rayonnent de ce centre se grouper suivant leurs rapports essentiels, en un ensemble unique et harmonieux. Peut-être me sera-t-il encore permis, pour montrer comment la méthode géométrique des Hindous se rattache par des fils invisibles à la constitution générale de leur intelligence, de rappeler que celui des philosophes allemands qui s'est senti le plus fortement attiré vers la Métaphysique des anciens Brahmanes, Schopenhauer, a été un des premiers qui soit entré en lutte contre la méthode euclidienne, et qui, sans avoir connaissance de la Géométrie indienne, a proposé un développement intuitif identique au fond avec celui des Hindous.

» Tout élément intellectuel singulier appelant son contraste, nous rencontrons chez les Hindous, à côté de cette tendance vers l'intuition immédiate et sensible, une aptitude très-prononcée pour les parties *les plus abstraites* des Mathématiques, aptitude que nous avons déjà admirée dans leur Arithmétique, leur Algèbre, et surtout leur Analyse indéterminée. Cette aptitude se rattache étroitement à un *sentiment du nombre,* de tous temps particulier à ces peuples, qui se montre jusque dans leurs rêveries cosmologiques et théologiques par de fantastiques combinaisons de nombres, mais qui, dans l'invention du système de la numération décimale de position, a porté des fruits au profit de tout le genre humain. Ce sentiment est aussi caractéristique chez les Hindous que l'est celui de la forme étendue chez les Grecs ; ici le règne de la forme a été aussi exclusif que chez les Hindous le règne du nombre. Si les peuples de l'Europe moderne ont appris à concilier ces contrastes, il n'en est pas moins incontestable que les méthodes des géomètres classiques de la Grèce sont beaucoup moins en harmonie avec notre esprit que l'application des théorèmes abstraits de l'Algèbre aux figures géométriques qui ne sont pas accessibles à l'intuition directe ; notre tendance est plutôt celle des Hindous que celle des Grecs.

» C'est avec regret que nous voyons le brillant esprit de la Grèce, doué d'un si haut talent mathématique, s'éteindre et disparaître ; mais cette synthèse rigoureusement logique et procédant par constructions, avec les restrictions qu'elle s'était elle-même imposées dans ses recherches sur les grandeurs étendues, avait déjà donné tout ce qu'elle pouvait donner. Ce n'est pas fortuitement que, après l'extinction de l'activité productrice en Grèce, un peuple aussi richement doué, mais dans une autre direction, le peuple des Aryas de l'Inde vint occuper à son tour le premier rang dans le domaine des Mathématiques. Il accomplit, pour notre science, qui, tout en utilisant toutes les aptitudes nationales particulières, n'en poursuit pas moins un but cosmopolite, la mission historique de rejeter en arrière cette forme spéciale, qui, dans l'antiquité mathématique, sous des conditions spéciales de la vie intellectuelle, avait été une forteresse de la vérité, mais qui, pour d'autres peuples naïfs, nouvellement entrés dans la période de développement, était devenue une barrière presque infranchissable ; et alors, fixant ses regards en avant, il établit la domination du *nombre pur* dans la Science. C'est là que commence le moyen âge des Mathématiques, pendant lequel cette domination ne s'affirme pas seulement au dehors par le premier et le principal rang donné à l'Arithmétique et à l'Algèbre parmi les Sciences mathématiques et par le vigoureux développement de ces deux branches, tandis qu'une place mesquine était à peine accordée à la Géométrie; mais encore elle s'affirme au dedans par l'application du calcul algébrique aux relations géométriques. Toutefois la contradiction qui existe dans cette comparaison directe du nombre pur avec la grandeur continue resta cachée au moyen âge; sa constatation et sa résolution par l'idée de la grandeur numérique continue et de l'infiniment petit constituent le trait caractéristique des Mathématiques modernes. »

Dans le Chapitre suivant, Hankel traite de l'histoire des Mathématiques chez les Arabes. Une traduction italienne de ce Chapitre a paru en 1872 dans le *Bullettino di Bibliografia* de M. le prince Boncompagni (¹). L'auteur y fait preuve de la même exactitude d'informations, de la même sûreté de jugement, du même talent d'exposition que dans les Chapitres précédents. Seulement il a trouvé moins d'occasions de montrer l'originalité de son esprit, sans doute parce que le sujet avait été l'occasion de travaux plus récents et plus approfondis que les sujets traités jusque-là. Ne voulant pas allonger à l'excès cette Notice, déjà trop étendue, nous nous contenterons de renvoyer, pour l'indication des matières de ce Chapitre, à l'article qui a paru dans le *Bulletin* en 1873 (¹), et nous nous occuperons du Chapitre qui vient ensuite, et qui a pour titre : « *Mathématiques des Romains* ».

En passant de la science des Grecs, des Hindous, des Arabes à celle des Romains, la chute est grande. Ce peuple, parmi tous ceux dont la civilisation a jeté un brillant éclat, est peut-être le seul qui n'ait absolument rien fait pour les Sciences mathématiques.

Leur calcul pratique se faisait au moyen d'un système de fractions duodécimales et sexagésimales (*minutiæ*), donnant lieu à

(¹) Voir *Bulletin*, t. VI, p. 254.

des opérations très-compliquées. Il nous est resté un Traité de ce calcul, dû à l'Aquitain Victorius.

La tendance juridique de l'esprit romain a dû faire attacher une grande importance à la délimitation et à la mesure des champs. Aussi possédons-nous de nombreux écrits sur l'arpentage, dus aux *gromatici* de la fin de l'empire d'Occident, Sextus Julius Frontinus, Marcus Junius Nipsus, Balbus, Hyginus, etc., auxquels il faut joindre les écrits du dernier savant romain Boèce (mort en 524), et même ceux du pape Sylvestre II (Gerbert), de la fin du x[e] siècle.

Rien n'est plus pauvre pour le fond, ni plus défectueux dans la forme que cette sorte de Pandectes géométriques où sont colligés ces divers Traités, que l'on dirait plus vieux de mille ans que la Géométrie des Grecs.

Le contenu de cette collection se divise en deux Parties : l'une consacrée au calcul du contenu des figures, l'autre aux mesures à prendre sur le terrain. Les calculs se rapportent seulement aux figures les plus simples. Il n'y est fait que très-peu d'usage du théorème de Pythagore ; on y emploie quelques formules de Héron, entre autres celle qui donne la surface d'un triangle au moyen des trois côtés ; mais à côté de cela, chez les mêmes écrivains qui tirent de la formule de Héron la valeur $\frac{13}{30}a^2$ pour l'aire du triangle équilatéral de côté a, nous trouvons pour la même aire la formule $\frac{1}{2}(a^2+a)$, formule non homogène qui dépend nécessairement de l'unité de longueur, et qui ne pourrait guère s'expliquer si elle ne semblait pas provenir d'une confusion entre les nombres *polygonaux* et les valeurs numériques des aires des polygones réguliers. Les *gromatici* se servent, pour l'aire d'un *quadrilatère quelconque*, de la formule égyptienne $\frac{a+b}{2}\,\frac{c+d}{2}$, qui est évidemment fausse dans le cas général.

Sur le terrain, les arpenteurs romains faisaient surtout usage de la chaîne, qui leur suffisait pour mesurer les côtés d'un polygone, d'où ils concluaient la surface, comme nous venons de le voir pour le quadrilatère. Dans les mesures des distances de points inaccessibles, qui exigeaient le tracé de perpendiculaires, ils employaient un instrument appelé *stella* ou *groma* (d'où le nom de *gromatici*), équivalent à peu près à notre équerre d'arpenteur, et ils ramenaient, comme au temps de Thalès, ces mesures de distances à la construction de triangles égaux, au lieu de faire usage, comme Héron, de triangles semblables.

Cette géométrie si grossière et si défectueuse ne peut se rattacher qu'à celle des anciens Égyptiens, telle qu'elle nous est connue par le papyrus de Rhind. Les Romains n'ont pas su s'approprier les perfectionnements que Héron avait apportés à la science égyptienne.

Au point de vue des Mathématiques théoriques, l'esprit romain est bien caractérisé par ce passage de Cicéron : « *In summo honore apud Græcos Geometria fuit; itaque nihil mathematicis illustrius : at nos ratiocinandi metiendique utilitate hujus artis terminavimus modum* (1). » Le nom de *mathematicus* devint bientôt à Rome le synonyme de devin ou d'astrologue.

Les seuls auteurs latins qui se soient quelque peu occupés de la théorie sont Boèce, dont la *Géométrie* se compose d'extraits d'Euclide, où les démonstrations sont omises, et Martianus Capella, qui a composé un poème didactique (2) où il parle des Mathématiques pour expliquer les termes techniques des géomètres grecs. On peut mettre dans la même catégorie les *Institutiones divinarum et sæcularium litterarum* de Cassiodore. C'est chez ces auteurs que le moyen âge a puisé toutes ses connaissances mathématiques.

Le Chapitre consacré au moyen âge se divise en deux Parties, l'une embrassant la période qui va jusqu'au commencement du XII^e^ siècle, l'autre la période qui se termine au milieu du XV^e^.

Les barbares, qui devaient fonder un nouveau monde sur les ruines de l'empire déchu, ne connurent d'abord d'autre culture scientifique que le peu que leur avaient légué les Romains. Après Martianus Capella, dont le poème était considéré comme le trésor de toute sagesse, vint le Livre encore plus insignifiant de l'évêque Isidore de Séville (1), qui fut longtemps l'oracle de la Science. Du continent, la culture scientifique passa dans les cloîtres de l'Irlande

---

(1) *Tuscul.* I, t. II, 5.

(2) *Nuptiæ Philologiæ et Mercurii.*

(1) *Origines sive etymologiæ.*

et de la Grande-Bretagne ; c'est de là que sortirent Bède le Vénérable et Alcuin, le précepteur de Charlemagne.

L'art du calcul étant nécessaire pour l'établissement du calendrier et la fixation des fêtes, chaque couvent d'hommes ou de femmes fut tenu d'avoir au moins une personne connaissant la pratique de cet art. On calculait rarement sur le papier, plus souvent avec les doigts ; il n'est pas encore question de l'abaque ou planchette à calcul. On ne se donnait pas la peine d'apprendre par cœur la Table de multiplication, les méthodes de multiplication et de division employées à cette époque ne supposant pas la connaissance de cette Table. Seuls, les hommes qui voulaient approfondir l'art du calcul possédaient cette Table par écrit. Les plus avancés apprenaient l'usage des *minutiæ* des Romains.

La Géométrie était encore plus négligée que l'Arithmétique ; à peine mentionne-t-on, à l'époque carlovingienne, quelques préceptes pour la mesure des figures simples, extraits des ouvrages des arpenteurs romains.

Le premier réveil scientifique date de l'École fondée par Gerbert, né à Aurillac dans la première moitié du x^e siècle et qui devint pape sous le nom de Sylvestre II. Cet homme, si remarquable parmi ses contemporains, et qui mérita le nom de *reparator studiorum*, fit pour la Science tout ce qu'il était possible de faire à son époque.

Ses connaissances astronomiques, bornées à la construction des sphères armillaires, des globes célestes et des cadrans solaires, étonnèrent tellement ses contemporains que la légende les attribua à des intelligences avec le diable. Il employa tous ses efforts à se procurer des copies des ouvrages anciens, et il retrouva ainsi pour la première fois la Géométrie de Boèce, découverte qui fut le point de départ des Mathématiques du moyen âge.

Le premier écrit mathématique digne de ce nom qu'ait produit cette époque est une lettre de Gerbert à Adalbold, évêque d'Utrecht, dans laquelle il explique pourquoi la surface d'un triangle, calculée « géométriquement » comme le produit de la base par la moitié de la hauteur, ne conduit pas au même nombre que la règle « arithmétique », c'est-à-dire la formule $\frac{1}{2}a(a+1)$ des *gromatici;* cela tient à ce que cette dernière exprime la somme de tous les petits carrés dans lesquels le triangle se décompose, bien que des parties de ces carrés sortent du triangle. C'est à partir de ce temps que l'on commença à penser en Mathématiques. L'Arithmétique de Boèce, recommandée vivement par Gerbert, réalisa un progrès notable relativement à ce que l'on connaissait alors.

Pendant la période qui commence à Gerbert (fin du x^e siècle) et se prolonge pendant le xi^e siècle et les premières années du xii^e, il s'était manifesté un progrès réel, bien que peu éclatant. On avait diligemment rassemblé le peu de connaissances transmises par les Romains, et pour la première fois on avait écrit des Traités sur les Mathématiques, Traités connus seulement par les indications des chroniqueurs, et dont ceux, en petit nombre, qui n'ont pas péri, gisent oubliés dans la poussière des bibliothèques, sans que l'on ait vraiment à regretter cet oubli. On n'en doit pas moins reconnaître les efforts faits à cette époque où les moyens d'étude étaient si pauvres, et où la science si imparfaite des seuls maîtres que l'on pût consulter était enveloppée de tant de difficultés, comme, par exemple, le calcul des fractions chez les Romains.

C'est vers ce temps que fut introduit en Occident l'usage de l'*abaque* à colonnes. Hankel expose, dans un Chapitre des plus intéressants, la méthode employée, du x^e au xii^e siècle, pour exécuter la division au moyen de l'abaque. Cette méthode satisfaisait aux conditions suivantes, qui avaient alors leur importance : 1° restreindre autant que possible l'emploi de la Table de multiplication, et ainsi n'avoir jamais à exécuter de tête la division d'un nombre de deux chiffres par un nombre d'un chiffre ; 2° éviter autant que possible les soustractions, et les remplacer par des additions ; 3° effectuer l'opération par un procédé complétement mécanique et sans aucun tâtonnement.

Hankel s'occupe ensuite de l'origine de l'abaque et des caractères numériques employés par les abacistes. La ressemblance de ces caractères avec les chiffres ghobâr des Arabes occidentaux est incontestable. Cependant les Arabes ne connaissaient pas l'abaque, non plus que la règle de la division enseignée par Gerbert ; d'autre part, jamais les abacistes n'ont fait usage de ces caractères pour écrire les nombres dans le texte de leurs Traités sur l'abaque. Il y a donc, pour expliquer l'origine des chiffres employés concurremment par les abacistes et par les Arabes, une difficulté que l'on a essayé de lever en admettant l'hypothèse de l'origine alexandrine de ces chiffres. Hankel discute cette hypothèse, qui ne lui semble pas admissible. Il serait plutôt disposé à croire que Gerbert aurait reçu ces chiffres indirectement des Arabes. Toutefois la question est encore loin d'être élucidée.

Dans la seconde période du moyen âge, du commencement du XII^e siècle au milieu du XV^e, on s'occupa d'abord de traduire les Ouvrages arabes. On peut citer parmi les traducteurs Platon de Tivoli, Athelard de Bath, Gérard de Crémone, Campanus, etc., qui ont fait connaître pour la première fois les écrits d'Al Battânî (Albategnius), de Mohammed ben Mûsâ al Khowârezmi, le *Liber trium fratrum*, etc., ainsi que les *Éléments* d'Euclide, les *Sphériques* de Théodose, et d'autres Ouvrages grecs retraduits de l'arabe. C'est aussi l'époque de l'empereur Frédéric II et d'Alphonse X de Castille, si célèbres l'un et l'autre par la protection qu'ils accordèrent aux sciences.

Dans la dernière moitié du XII^e siècle naquit à Pise le plus grand génie mathématique du moyen âge, Léonard, surnommé Fibonacci, qui non-seulement introduisit en Europe la numération indienne et l'Algèbre des Arabes, mais qui y joignit ses propres découvertes. Ses Ouvrages, étonnants pour l'époque à laquelle ils ont été écrits, ont été publiés pour la première fois par M. le prince Boncompagni (1).

Après la mort de Léonard de Pise, ses découvertes furent oubliées, et les Mathématiques retombèrent dans l'état de barbarie. On remarque seulement quelques esprits éminents qui, dans un milieu plus favorable, auraient pu s'illustrer par d'importants travaux, mais dont l'action est restée à peu près stérile. En tête de tous il faut citer Nicole Oresme, qui, le premier, a indiqué l'usage des exposants fractionnaires, et qui était sur la voie de la grande conception de Descartes, la représentation de la marche d'une fonction par les ordonnées d'une courbe. Bien que Hankel n'apprécie peut-être pas assez haut les mérites d'Oresme, il donne cependant avec détail l'analyse de ses travaux, ce qu'aucun auteur français n'a pris jusqu'ici la peine de faire.

(1) *Scritti di Leonardo Pisano, matematico del secolo decimoterzo*. Roma, 1857-1862. 2 vol. in-4°.

Après avoir tracé un tableau rapide de la Science dans ces siècles stériles, absorbés par l'étude de la Philosophie scolastique, Hankel consacre quelques pages à l'étude des Mathématiques dans les Universités au moyen âge. La plus célèbre de toutes, l'Université de Paris, s'occupa très-peu de Géométrie. On n'y connaissait Euclide que par l'extrait insignifiant que contient la Géométrie de Boèce. A l'Université de Prague, fondée en 1384, les Sciences étaient un peu mieux traitées. En Italie, la Science dans les Universités était surtout représentée par l'Astrologie.

En 1494 parut enfin la *Summa* de Luca Pacioli, où était résumé tout ce que l'on savait de son temps sur l'Algèbre. Douze ans plus tard naissait, à Brescia, Nicolò Tartaglia, à qui l'on doit la découverte de la résolution de l'équation du troisième degré, bien que ce problème eût été traité déjà par Scipion Ferro, qui était mort sans publier ses résultats. Hankel raconte la vie si tourmentée de Tartaglia et ses démêlés avec Cardan. Il donne l'histoire de la résolution de l'équation du quatrième degré, due à Ferrari, et non à Bombelli, comme on l'a souvent répété. Il signale les premières indications de l'emploi des quantités négatives et imaginaires. Il passe en revue les travaux de Harriot, dont l'importance a été singulièrement exagérée par son compatriote Wallis, et il termine par l'analyse des découvertes de Viète.

Tel est le résumé bien incomplet du remarquable volume dont nous avons cherché à rendre compte. Nous espérons que ce que nous venons de dire suffira pour engager tous ceux qui s'intéressent à la Science à lire le Livre de Hankel, et pour en faire désirer une traduction dans notre langue.

J. H.