BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

FALK

Sommation de quelques séries

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 10 (1876), p. 204-208

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1876__10__204_0>

MÉLANGES.

SOMMATION DE QUELQUES SÉRIES;

Par M. FALK.

Les séries suivantes peuvent se sommer par les opérations algébriques les plus élémentaires.

Nous prenons comme point de départ la formule connue

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{n}{n+1}$$

ou

$$(1)\qquad \mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=n}\frac{1}{i(i+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

De l'identité évidente

$$\frac{i}{(i+1)(i+2)(i+3)}=\frac{3}{2}\,\frac{1}{(i+2)(i+3)}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{(i+1)(i+2)},$$

on tire, en égalant entre elles les sommes des deux membres pour $i=1, 2,\ldots, n$,

$$\mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=n}\frac{i}{(i+1)(i+2)(i+3)}=\frac{3}{2}\left[\mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=n+2}\frac{1}{i(i+1)}-\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}\right]$$
$$-\frac{1}{2}\left[\mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=n+1}\frac{1}{i(i+1)}-\frac{1}{1.2}\right],$$

ou nous avons changé i en $i-2$ et en $i-1$ dans les sommes du second membre. De cette formule on déduit, en vertu de l'équation (1),

$$(2)\qquad \mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=n} \frac{i}{(i+1)(i+2)(i+3)} = \frac{1}{2^2}\,\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}.$$

Les équations (1) et (2) sont comprises, pour $k=0$ et $k=1$, dans la formule

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=n} \frac{i(i+1)\ldots(i+k-1)}{(i+k)(i+k+1)\ldots(i+2k+1)} \\ &\quad = \frac{1}{(k+1)^2}\,\frac{n(n+1)\ldots(n+k)}{(n+k+1)(n+k+2)\ldots(n+2k+1)}, \end{aligned}\right.$$

dont nous établirons la généralité pour toutes les valeurs entières et positives de k, en démontrant qu'elle subsiste pour $k+1$ si elle est vraie pour $k-1$ et k.

En effet, de l'identité évidente [1]

$$\begin{aligned} &\mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=n} \frac{i(i+1)\ldots(i+k)}{(i+k+1)\ldots(i+2k+3)} \\ &\quad = -\frac{k^2(2k+3)}{(k+2)^2(2k+1)} \mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=n} \frac{(i+2)\ldots(i+k)}{(i+k+1)\ldots(i+2k+1)} \\ &\qquad + \frac{(2k+2)(2k+3)}{(k+2)^2} \mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=n} \frac{(i+2)\ldots(i+k+1)}{(i+k+2)\ldots(i+2k+3)} \\ &\qquad - \frac{(2k+2)[2(k+1)^2-1]}{(k+2)^2(2k+1)} \mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=n} \frac{(i+1)\ldots(i+k)}{(i+k+1)\ldots(i+2k+2)}, \end{aligned}$$

[1] Cette identité devient évidente, en omettant les signes de sommation et faisant les réductions dans le second membre.

on tire

$$
\begin{aligned}
\overset{i=n}{\underset{i=1}{\mathrm{S}}}\frac{i(i+1)\ldots(i+k)}{(i+k+1)\ldots(i+2k+3)}
&= -\frac{k^2(2k+3)}{(k+2)^2(2k+3)}\overset{i=n+2}{\underset{i=1}{\mathrm{S}}}\frac{i(i+1)\ldots(i+k-2)}{(i+k-1)\ldots(i+2k-1)}\\
&\quad+\frac{(2k+2)(2k+3)}{(k+2)^2}\overset{i=n+2}{\underset{i=1}{\mathrm{S}}}\frac{i(i+1)\ldots(i+k-1)}{(i+k)\ldots(i+2k-1)}\\
&\quad-\frac{(2k+2)[2(k+1)^2-1]}{(k+2)^2(2k+1)}\overset{i=n+1}{\underset{i=1}{\mathrm{S}}}\frac{i(i+1)\ldots(i+k-1)}{(i+k)\ldots(i+2k+1)};
\end{aligned}
$$

car les termes qui devraient être retranchés des sommes dans le second membre se détruisent mutuellement. Puisque la formule (3) est supposée vraie pour $k-1$ et k, le second membre devient

$$
\begin{aligned}
&-\frac{k^2(2k+3)}{(k+2)^2(2k+1)}\,\frac{1}{k^2}\,\frac{(n+2)\ldots(n+k+1)}{(n+k+2)\ldots(n+2k+1)}\\
&+\frac{(2k+2)(2k+3)}{(k+2)^2}\,\frac{1}{(k+1)^2}\,\frac{(n+2)\ldots(n+k+2)}{(n+k+3)\ldots(n+2k+3)}\\
&-\frac{(2k+2)[2(k+1)^2-1]}{(k+2)^2(2k+1)}\,\frac{1}{(k+1)^2}\,\frac{(n+1)\ldots(n+k+1)}{(n+k+2)\ldots(n+2k+2)}.
\end{aligned}
$$

En réduisant cette expression, on conclut de l'équation précédente la formule

$$
\overset{i=n}{\underset{i=1}{\mathrm{S}}}\frac{i(i+1)\ldots(i+k)}{(i+k+1)\ldots(i+2k+3)}=\frac{1}{(k+2)^2}\,\frac{n(n+1)\ldots(n+k+1)}{(n+k+2)\ldots(n+2k+3)},
$$

laquelle démontre la généralité de l'équation (3), puisqu'elle se déduit de celle-ci en changeant k en $k+1$.

Pour obtenir une autre série, retranchons le premier membre de l'équation (3) de l'expression que l'on obtient au moyen de cette même quantité, en y changeant i en $i+1$ et k en $k-1$. De cette manière on trouve l'identité

$$\underset{i=1}{\overset{i=n}{\mathrm{S}}} \frac{(i+1)\ldots(i+k-1)}{(i+k)\ldots(i+2k)} - \underset{i=1}{\overset{i=n}{\mathrm{S}}} \frac{i(i+1)\ldots(i+k-1)}{(i+k)\ldots(i+2k+1)}$$
$$= (2k+1) \underset{i=1}{\overset{i=n}{\mathrm{S}}} \frac{(i+1)\ldots(i+k-1)}{(i+k)\ldots(i+2k+1)}.$$

En résolvant cette équation par rapport à la somme du second membre et en même temps changeant i en $i-1$ dans deux des sommes, on obtient aisément (nous écrivons aussi $n-1$ à la place de n)

$$\underset{i=1}{\overset{i=n}{\mathrm{S}}} \frac{i(i+1)\ldots(i+k-2)}{(i+k-1)\ldots(i+2k)}$$
$$= \frac{1}{2k+1} \left[\underset{i=1}{\overset{i=n}{\mathrm{S}}} \frac{i(i+1)\ldots(i+k-2)}{(i+k-1)\ldots(i+2k-1)} \right.$$
$$\left. - \underset{i=1}{\overset{i=n-1}{\mathrm{S}}} \frac{i(i+1)\ldots(i+k-1)}{(i+k)\ldots(i+2k+1)} \right],$$

puisque les termes qui devraient être retranchés de ces deux sommes se détruisent mutuellement. Substituant maintenant dans cette identité les valeurs des sommes du second membre obtenues à l'aide de l'équation (3) et réduisant, on obtient sans difficulté la formule

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &\underset{i=1}{\overset{i=n}{\mathrm{S}}} \frac{i(i+1)\ldots(i+k-2)}{(i+k-1)\ldots(i+2k)} \\ &\quad = \frac{1}{k^2(k+1)^2} \frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)[n-1+(k+1)^2]}{(n+k)(n+k+1)\ldots(n+2k)}. \end{aligned} \right.$$

En traitant le premier membre de cette formule d'une manière analogue à celle que nous venons d'appliquer au premier membre de l'équation (3), on obtiendra une nouvelle formule de sommation, et ainsi de suite. Nous nous dispensons de développer ces calculs, qui n'offrent aucune difficulté au lecteur, à l'exception de leur longueur; mais nous y reviendrons tout à l'heure dans un cas plus simple et plus intéressant.

Puisque les seconds membres des équations (3) et (4) tendent vers des valeurs limites finies et déterminées pour $n = \infty$, les séries dans leurs premiers membres seront convergentes si l'on y fait $n = \infty$. On obtient donc, en changeant k en $k-1$ dans la formule (3), pour $n = \infty$, les formules

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1.2\ldots(k-1)}{k(k+1)\ldots 2k} + \frac{2.3\ldots k}{(k+1)\ldots(2k+1)} \\ &\qquad + \frac{3.4\ldots(k+1)}{(k+2)\ldots(2k+2)} + \ldots = \frac{1}{k^2}, \end{aligned} \right.$$

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1.2\ldots(k-1)}{k(k+1)\ldots(2k+1)} + \frac{2.3\ldots k}{(k+1)\ldots(2k+2)} \\ &\qquad + \frac{3.4\ldots(k+1)}{(k+2)\ldots(2k+3)} + \ldots = \frac{1}{k^2(k+1)^2}. \end{aligned} \right.$$

On tire aisément de l'équation (6), de même que nous avons déduit l'équation (4) de (3), la formule

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1.2\ldots(k-1)}{k(k+1)\ldots(2k+2)} + \frac{2.3\ldots k}{(k+1)\ldots(2k+3)} \\ &\qquad + \frac{3.4\ldots(k+1)}{(k+2)\ldots(2k+4)} + \ldots = \frac{1.2}{k^2(k+1)^2(k+2)^2}. \end{aligned} \right.$$

Les formules (6) et (7) sont comprises, pour $r = 1$ et $r = 2$, dans la formule

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1.2\ldots(k-1)}{k(k+1)\ldots(2k+r)} + \frac{2.3\ldots k}{(k+1)\ldots(2k+r+1)} \\ &\qquad + \frac{3.4\ldots(k+1)}{(k+2)\ldots(2k+r+2)} + \ldots \\ &= \frac{1.2.3\ldots r}{k^2(k+1)^2(k+2)^2\ldots(k+r)^2}, \end{aligned} \right.$$

laquelle se démontre aisément de r à $r+1$.

En employant la notation connue

$$\Gamma(m) = 1.2\ldots(m-1),$$

la formule (8) peut s'écrire

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma(1)}\frac{\Gamma(k)^2}{\Gamma(2k+r+1)} + \frac{1}{\Gamma(2)}\frac{\Gamma(k+1)^2}{\Gamma(2k+r+2)} \\ &\qquad + \frac{1}{\Gamma(3)}\frac{\Gamma(k+2)^2}{\Gamma(2k+r+3)} + \ldots = \frac{\Gamma(r+1)\Gamma(k)^2}{\Gamma(k+r+1)^2}. \end{aligned}$$