BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

R. LIPSCHITZ

Sur la possibilité d'intégrer complètement un système donné d'équations différentielles

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 10 (1876), p. 149-159

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1876__10__149_0>

MÉLANGES.

SUR LA POSSIBILITÉ D'INTÉGRER COMPLÉTEMENT UN SYSTÈME DONNÉ D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES;

PAR M. R. LIPSCHITZ.

Les progrès les plus importants qu'ait réalisés la théorie des équations différentielles simultanées, depuis les travaux de Jacobi, ont leur point de départ dans le développement de la théorie des quantités imaginaires. Pour chaque système d'équations différentielles se pose tout d'abord la question essentielle de savoir s'il est possible de déterminer un système de fonctions de la variable indépendante qui satisfassent aux équations et qui puissent prendre des valeurs données pour une valeur donnée de la variable. Cette question a été approfondie dans le cas où le système d'équations différentielles permet de regarder la variable et les fonctions comme des quantités de la forme $a+b\sqrt{-1}$. Toute fonction d'une quantité imaginaire pouvant, à l'exception de certains points du *champ* (*Gebiet*) de cette fonction, être développée en une série procédant suivant les puissances entières et positives d'une fonction linéaire de cette quantité imaginaire, la question proposée dépend évidemment de celle-ci : est-il possible de trouver des séries, convergentes dans un certain champ laissé à la variable indépendante, qui, substituées aux fonctions inconnues, satisfassent aux équations différentielles. C'est à ce point de vue que l'on a entrepris et mené à bonne fin l'examen de la possibilité de l'intégration complète d'un système d'équations différentielles ayant le caractère que nous avons dit (¹).

Si, au contraire, les expressions qui entrent dans le système d'équations différentielles ne sont données que dans le cas où les éléments de ces expressions sont réels et ne souffrent point une extension immédiate au cas où ces éléments sont imaginaires, on n'est

(¹) WEIERSTRASS : *Sur la théorie des facultés analytiques* (*Journal de Crelle*, 41, 43). — BRIOT et BOUQUET : *Théorie des fonctions doublement périodiques*, p. 49.

plus autorisé à admettre que les fonctions inconnues soient développables en séries, procédant suivant les puissances entières et positives d'expressions linéaires de la variable indépendante. Il faut se placer sur un autre terrain pour établir les conditions de possibilité d'une intégration complète. Aucun travail ayant précisément ce but n'est parvenu à ma connaissance : c'est l'objectif des recherches qui suivent ([1]).

On supposera que le système donné d'équations différentielles, où x est la variable indépendante, et $y^1, y^2, \ldots, y^n$ sont les fonctions inconnues, peut être mis sous la forme suivante :

$$\frac{dy^\alpha}{dx} = f^\alpha(x, y^1, y^2, \ldots, y^n), \tag{1}$$

où α peut prendre les valeurs $1, 2, \ldots n$. Les fonctions f^α sont données pour un ensemble de valeurs des variables $x, y^1, y^2, \ldots, y^n$, ayant entre elles une connexion continue : cet ensemble de valeurs en sera dit le *champ* G. Si $n = 2$, en regardant x, y^1, y^2 comme les coordonnées d'un point de l'espace, on aura une image très-nette de ce qu'il faut entendre par le *champ* G. Pour toutes les valeurs comprises dans ce champ les n fonctions f^α doivent être uniformes, continues, et rester numériquement inférieures à un nombre donné. En outre, elles doivent être telles que, étant donnés deux systèmes de valeurs $x = h$, $y^\alpha = k^\alpha$ et $x = h$, $y^\alpha = l^\alpha$, où la variable indépendante reste la même, l'inégalité

$$\left\{ \begin{array}{l} [f^\alpha(h, k^1, k^2, \ldots, k^n) - f^\alpha(h, l^1, l^2, \ldots, l^n)] \\ \quad < c^{\alpha,1}[k^1 - l^1] + c^{\alpha,2}[k^2 - l^2] + \ldots + c^{\alpha,n}[k^n - l^n] \end{array} \right. \tag{2}$$

soit satisfaite : les quantités $c^{\alpha,\beta}$ sont des constantes positives, et ici, comme dans la suite, le symbole $[w]$ représente la valeur absolue de w. La condition imposée de la continuité exige que, pour deux systèmes de valeurs $x = h, y^\alpha = k^\alpha$ et $x = j, y^\alpha = l^\alpha$, la différence $[f^\alpha(h, k^1, k^2, \ldots, k^n) - f^\alpha(j, l^1, l^2, \ldots, l^n)]$ puisse être rendue aussi petite qu'on le voudra lorsque les différences $[h - j]$, $[k^\alpha - l^\alpha]$ tendent vers zéro : si donc on tient compte de l'inégalité (2), on

([1]) L'auteur ne connaît pas evidemment les travaux de Cauchy, qui ont été résumés d'une manière incomplète par M. l'abbé Moigno, dans son *Traité de Calcul intégral*, et ceux de Coriolis, dans le *Journal de Liouville*.

voit que cette condition revient à supposer qu'on puisse prendre la différence $[h - j]$ assez petite pour que l'inégalité

$$(3) \qquad [f^\alpha(h, l^1, l^2, \ldots, l^n) - f^\alpha(j, l^1, l^2, \ldots, l^n)] < \sigma$$

soit satisfaite, quelque petite que soit la quantité σ.

Le système (1) sera complétement intégré si l'on détermine un système de fonctions $y^1, y^2, \ldots, y^n$ satisfaisant aux équations (1), et qui, pour $x = x_0$, satisfassent aux équations

$$(1^\alpha) \qquad y^\alpha = y^\alpha_0.$$

Le système de valeurs $(x_0, y^1_0, y^2_0, \ldots, y^n_0)$ doit être situé dans l'intérieur du champ G, à une distance finie des limites de ce champ, en sorte que l'on puisse déterminer des quantités positives a_0, b^α_0, telles que les systèmes de valeurs satisfaisant aux inégalités

$$[x - x_0] \leqq a_0, \quad [y^\alpha - y^\alpha_0] \leqq b^\alpha_0$$

soient compris dans l'intérieur de G; par suite, il existera des constantes positives finies c^α_0 telles que, pour ces mêmes valeurs, on ait constamment

$$(4) \qquad [f^\alpha] < c^\alpha.$$

Si l'on détermine la quantité positive A_0 de façon à avoir

$$(4^\alpha) \qquad A_0 c^\alpha_0 < b^\alpha_0, \quad A_0 < a_0,$$

le champ déterminé par les inégalités

$$(4^\beta) \qquad [x - x_0] \leqq A_0, \quad [y^\alpha - y^\alpha_0] \leqq b^\alpha_0$$

sera situé entièrement à l'intérieur de G : nous l'appellerons H_0.

Sous ces conditions, il existe toujours un système unique de n fonctions $y^1, y^2, \ldots, y^n$, satisfaisant aux équations différentielles (1), variant d'une façon continue à l'intérieur du champ H_0 quand la variable x parcourt le chemin qui va de $x_0 - A_0$ à $x_0 + A_0$, satisfaisant enfin aux équations $y^\alpha = y^\alpha_0$ pour la valeur de x, $x = x_0$.

Pour la démonstration de ce théorème, il suffit de considérer le mouvement de la variable x depuis x_0 jusqu'à $x_0 + A$, car le mouvement de x_0 à $x_0 - A$ peut être traité d'une façon tout à fait semblable. Imaginons donc entre x_0 et $x_0 + A$ une suite de valeurs intermédiaires $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$, telles que

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_p = x_0 + \mathrm{A},$$

et déterminons n quantités y η_1^α par les n équations suivantes :

$$(5) \qquad \eta_1^\alpha - y_0^\alpha = f^\alpha(x_0, y_0^1, y_0^2, \ldots, y_0^n)(x_1 - x_0).$$

Ces équations coïncideraient avec le système donné d'équations différentielles (1), si l'on y remplaçait dans le premier membre dx et dy^α par les quantités finies $x_1 - x_0$, $\eta_1^\alpha - y_0^\alpha$, et dans le second x, y^α par x_0, y_0^α. En vertu des inégalités (4) et (4^α), les équations (5) entraînent les inégalités

$$[\eta_1^\alpha - y_0^\alpha] < c_0^\alpha(x_1 - x_0) < b^\alpha{}_0,$$

et par suite, le système de valeurs $(x_1, \eta_1^1, \eta_1^2, \ldots, \eta_1^n)$ est situé dans le champ H_0. On peut, de la même manière, former une suite de systèmes de valeurs $(x_{a+1}, \eta_{a+1}^1, \eta_{a+1}^2, \ldots, \eta_{a+1}^n)$ en faisant successivement $a = 1, 2, \ldots, p-1$ dans l'équation

$$(5^\alpha) \qquad \eta_{a+1}^\alpha - \eta_a^\alpha = f(x_a, \eta_a^1, \eta_a^2, \ldots, \eta_a^n)(x_{a+1} - x_a).$$

Tous ces systèmes de valeurs resteront certainement compris dans le champ H_0. Poursuivons maintenant le partage de l'intervalle en intercalant entre x_a et x_{a+1} les quantités croissant en nombre égal à $q_a - 1$.

$$x_{a,1}, x_{a,2}, \ldots, x_{a,q_a-1} < x_{a,q_a} = x_{a+1,0} = x_{a+1}.$$

On obtiendra par ce nouveau partage de l'étendue qui va de x_0 à $x_0 + \mathrm{A}_0$ une nouvelle suite de systèmes de valeurs, commençant par $(x_0, y_0^1, y_0^2, \ldots, y_0^n)$ et qui seront tous compris dans le domaine H_0 : cette nouvelle suite de valeurs $(x_{a,\mu_a}, \eta_{a,\mu_a}^1, \eta_{a,\mu_a}^2, \ldots, \eta_{a,\mu_a}^n)$ s'obtient en remplaçant, dans l'équation

$$(6) \qquad \eta_{a,\mu_a+1}^\alpha - \eta_{a,\mu_a}^\alpha = f^\alpha\left(x_{a,\mu_a}, \eta_{a,\mu_a}^1, \eta_{a,\mu_a}^2, \ldots, \eta_{a,\mu_a}^n\right)\left(x_{a,\mu_a+1} - x_{a,\mu_a}\right),$$

a par $0, 1, 2, \ldots, p-1$, μ_a par les nombres $0, 1, 2, \ldots, q_a - 1$, et en prenant enfin

$$\eta_{a,0}^\alpha = y_0^\alpha, \quad \eta_{a,q_a}^\alpha = \eta_{a+1,0}^\alpha.$$

Il s'agit maintenant d'établir que, en regardant les premières quantités $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ comme fixes, en faisant croître indéfiniment les nombres q_a et décroître indéfiniment, d'après une loi quelconque, les intervalles $x_{a,\mu_a+1} - x_{a,\mu_a}$, les valeurs

$$\eta^\alpha_{a+1,0} = y^\alpha_{a+1},$$

qui correspondent à la valeur $x = x_{a+1}$ de la variable indépendante, convergent vers une limite fixe, indépendante de la loi de croissance du nombre q_a et de la loi de décroissance des intervalles secondaires dans lesquels on a divisé les intervalles entre les quantités $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x_p$. Cette démonstration expose que, sous les conditions énoncées plus haut, il est toujours possible de choisir les quantités fixes $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$, de façon que la valeur absolue des différences $y^\alpha_{a+1} - \eta^\alpha_{a+1}$ reste, quel que soit a, plus petite qu'une quantité σ, aussi petite qu'on le voudra.

Si, dans l'équation (6), on fait successivement $\mu_a = 0, 1, 2, \ldots \mu_a$, et que l'on ajoute, on obtiendra l'équation

$$(7)\quad \eta^\alpha_{a,\mu_a+1} - \eta^\alpha_{a,0} = \sum_{\mu'_a=0}^{\mu'_a=\mu_a} f\left(x_{a,\mu'_a}, \eta^1_{a,\mu'_a}, \eta^2_{a,\mu'_a}, \ldots, \eta^n_{a,\mu'_a}\right)\left(x_{a,\mu'_a+1} - x_{a,\mu_a}\right),$$

qui donne, au moyen de l'inégalité (4),

$$\left[\eta^\alpha_{a,\mu_a+1} - \eta^\alpha_{a,0}\right] < c^\alpha_0\,(x_{a,\mu_a+1} - x_{a,0}) < c^\alpha_0\,(x_{a+1} - x_a).$$

Cette inégalité exprime que le système de valeurs $(x_{a,\mu_a}, \eta^1_{a,\mu_a}, \eta^2_{a,\mu_a}, \ldots, \eta^n_{a,\mu_a})$ reste, si on laisse fixe l'indice a et si l'on fait prendre à l'indice μ_a toutes les valeurs entre o et $q_a - 1$, compris dans un champ K_0 dont les limites relatives à chacune des $n+1$ variables peuvent être rendues aussi étroites qu'on le veut, en prenant la différence $x_{a+1} - x_a$ suffisamment petite. Puisque, par hypothèse, la fonction f^α reste continue dans le champ H_0, la différence $x_{a+1} - x_a$ peut toujours être prise suffisamment petite pour que dans le champ K_0 la différence entre deux valeurs de cette fonction soit plus petite qu'une quantité λ, aussi petite qu'on le veut. Supposons que la différence $x_{a+1} - x_a$ ait été ainsi déterminée, le nombre p étant pris lui-même suffisamment grand et soit ε^α_a une fraction proprement dite positive ou négative; l'équation (7) donnera, pour $\mu_a = q_a - 1$,

$$(8)\qquad y^\alpha_{a+1} - y^\alpha_a = \left[f^\alpha(x_a, y^1_a, y^2_a, \ldots, y^n_a) + \varepsilon^\alpha_a\,\lambda\right](x_{a+1} - x_a).$$

De cette équation retranchant l'équation (5^α), il vient

$$(9)\quad \left\{ \begin{array}{l} y^\alpha_{a+1} - \eta^\alpha_{a+1} = y^\alpha_a - \eta^\alpha_a \\ \quad + [f^\alpha(x_a, y^1_a, y^2_a, \ldots, y^n_a) - f^\alpha(x_a, \eta^1_a, \eta^2_a, \ldots, \eta^n_a) + \varepsilon^\alpha_a \lambda](x_{a+1} - x_a); \end{array} \right.$$

mais, à cause de (2), on aura

$$\begin{aligned} &[f^\alpha(x_a, y^1_a, y^2_a, \ldots, y^n_a) - f^\alpha(x_a, \eta^1_a, \eta^2_a, \ldots, \eta^n_a)] \\ &\quad < c^{\alpha,1}[y^1_a - \eta^1_a] + c^{\alpha,2}[y^2_a - \eta^2_a] + \ldots + c^{\alpha,n}[y^n_a - \eta^n_a]. \end{aligned}$$

Si donc on pose

$$(10)\qquad [y^\alpha_a - \eta^\alpha_a] = z^\alpha_a,$$

les équations (9) donnent la suite d'inégalités

$$(11)\qquad z^\alpha_{a+1} < z^\alpha_a + (c^{\alpha,1} z^1_a + c^{\alpha,2} z^2_a + \ldots + c^{\alpha,n} z^n_a + \lambda)(x_{a+1} - x_a).$$

On a en outre

$$(11^\alpha)\qquad z^\alpha_a = 0.$$

Maintenant il est clair que, si l'on forme une suite de quantités u^α_a, au moyen des équations

$$(12)\quad \left\{ \begin{array}{l} u^\alpha_{a+1} - u^\alpha_a = (c^{\alpha,1} u^1_a + c^{\alpha,2} u_a + \ldots + c^{\alpha,n} u^n_a + \lambda)(x_{a+1} - x_a), \\ u^\alpha_a = 0, \end{array} \right.$$

où l'indice a prend les valeurs de zéro à $p - 1$, on aura constamment

$$(13)\qquad z^\alpha_{a+1} < u^\alpha_{a+1}.$$

Or nous avons besoin, pour notre démonstration, de montrer que, en prenant λ suffisamment petit, les quantités z^α_{a+1} restent aussi petites qu'on le voudra : notre but sera atteint si nous prouvons la même chose pour les quantités u^α_{a+1} ou pour des quantités plus grandes.

Soit c une quantité positive supérieure à la plus grande des n^2 constantes $c^{\alpha,\beta}$: si l'on détermine les quantités v^α_a par les équations

$$(12^\alpha)\quad \left\{ \begin{array}{l} v^\alpha_{a+1} - v^\alpha_a = [c(v^1_a + v^2_a + \ldots + v^n_a) + \lambda](x_{a+1} - x_a), \\ v^\alpha_0 = 0, \end{array} \right.$$

on aura évidemment, pour $\alpha = 1, 2, \ldots, p-1$,

$$(13^\alpha)\qquad u^\alpha_{a+} < v^\alpha_{a+1}.$$

Maintenant la première équation (12^α) donne

$$v^1_{a+1} - v^1_a = v^2_{a+1} - v^2_a = \ldots = v^n_{a+1} - v^n_a,$$

et, en vertu de la deuxième, on a

$$v^1_a = v^2_a = \ldots = v^n_a.$$

La première équation (3) peut donc s'écrire

$$v^\alpha_{a+1} - v^\alpha_a = (ncv^\alpha_a + \lambda)(x_{a+1} - x_a)$$

ou

$$v^\alpha_{a+1} + \frac{\lambda}{nc} = \left(v^\alpha_a + \frac{\lambda}{nc}\right)[1 + nc(x_{a+1} - x_a)];$$

on a donc

$$(14)\qquad \left\{ \begin{aligned} v^\alpha_{a+1} = -\frac{\lambda}{nc} + \frac{\lambda}{nc}&[1 + nc(x_1 - x_0)] \\ &\times [1 + nc(x_2 - x_1)]\ldots[1 + nc(x_{a+1} - x_a)]. \end{aligned}\right.$$

Or le produit

$$[1 + nc(x_1 - x_0)][1 + nc(x_2 - x_1)]\ldots[1 + nc(x_{a+1} + x_a)],$$

où nc est positif, a lui-même une valeur positive inférieure à $e^{nc(x_{a+1} - x_0)}$; on a donc

$$v^\alpha_{a+1} < -\frac{\lambda}{nc} + \frac{\lambda}{nc} e^{nc(x_{a+1} - x_0)}.$$

La comparaison de cette inégalité avec les inégalités (13) et (13^α) donne

$$(15)\qquad [y^\alpha_{a+1} - \eta^\alpha_{a+1}] = z^\alpha_{a+1} < \frac{-1 + e^{nc(x_{a+1} - x_0)}}{nc}\lambda < \frac{-1 + e^{ncA_0}}{nc}\lambda,$$

et, puisque le facteur

$$\frac{-1 + e^{ncA_0}}{nc}$$

a une valeur finie, on en conclut que la différence $[y^\alpha_{a+1} - \eta^\alpha_{a+1}]$ peut être rendue aussi petite qu'on le voudra; car λ est une quantité aussi petite qu'on le veut, ne dépendant que du choix des intervalles $x_1-x_0, x_2-x_1, \ldots, x_p-x_{p-1}$. Les différences $[y^\alpha_{a+1}-\eta^\alpha_{a+1}]$ pouvant être prises aussi petites qu'on le veut, les quantités y^α_{a+1}, qui correspondent à la valeur fixe $x=x_{a+1}$ de la variable, convergent vers une limite déterminée, indépendante de la loi de croissance du nombre q_a et de la loi de décroissance des nouveaux intervalles. Ces valeurs limites, en vertu des équations (8), définissent un système de solutions des équations différentielles, système pour lequel les fonctions y^α se réduisent à y^α_0 quand $x=x_0$. L'existence d'un système de solutions satisfaisant aux conditions imposées est donc établie, et la première partie de notre programme est remplie.

Qu'il n'existe pas d'autre solution du système (1) satisfaisant aux conditions énoncées, on le voit comme il suit : soit $y^\alpha = Y^\alpha$ une telle solution, l'intervalle de x_0 à x_0+A, auquel on peut encore se borner, peut être partagé, par l'introduction des quantités x_1, $x_2, \ldots, x_{p-1}$, en intervalles pour lesquels, ε^α_a étant une fraction proprement dite, positive ou négative, et λ une quantité aussi petite qu'on voudra, on aura les équations

$$(16)\qquad Y^\alpha_{a+1}-Y^\alpha_a=[f^\alpha(x_a, Y^1_a, Y^2_a,\ldots,Y^n_a)+\varepsilon^\alpha_a\lambda](x_{a+1}-x_a),$$

où les valeurs $y^\alpha = Y^\alpha_a$ correspondent à la valeur $x=x_a$ de la variable indépendante, et où l'on a, par hypothèse, $Y^\alpha_0=y^\alpha_0$. Cette suite d'équations est une conséquence immédiate des deux hypothèses en vertu desquelles le système donné des fonctions $y^\alpha=Y^\alpha$ satisfait aux équations différentielles (1), et varie continûment quand la variable x va de x_0 à x_0+A. Si, par les équations (5) et (5 *bis*), on forme les quantités η^α_a d'après les valeurs $x_0, x_1, \ldots,$ x_{p-1}, on reconnaît que les différences

$$[Y^\alpha_{a+1}-\eta^\alpha_{a+1}]$$

doivent se comporter comme les différences

$$[y^\alpha_{a+1}-\eta^\alpha_{a+1}]:$$

car l'équation (16) se déduit de l'équation (8) en y remplaçant y^α_a par Y^α_a et y^α_{a+1} par Y^α_{a+1}, et l'on a en outre $Y^\alpha_0=y^\alpha_0$: il en résulte que les différences $[Y^\alpha_{a+1}-\eta^\alpha_{a+1}]$ peuvent être rendues, comme les différences $[y^\alpha_{a+1}-\eta^\alpha_{a+1}]$, aussi petites qu'on le veut; or, à cause de l'inégalité

$$[Y^\alpha_{a-1} - y^\alpha_{a+1}] \leqq [Y^\alpha_{a+1} - \eta^\alpha_{a+1}] + [y^\alpha_{a+1} - \eta^\alpha_{a+1}],$$

la différence $[Y^\alpha_{a-1} - y^\alpha_{a+1}]$ peut évidemment être rendue aussi petite qu'on le veut; par conséquent le système donné Y^α_a des fonctions Y^α_a ne peut différer du système des fonctions y^α_a, obtenues par le partage des premiers intervalles en nouveaux intervalles que l'on fait décroître indéfiniment. Notre démonstration se trouve ainsi entièrement complétée.

Il y a lieu de faire quelques remarques sur les conditions imposées aux fonctions f^α. Nous avons supposé qu'en donnant un accroissement suffisamment petit à la variable indépendante et en gardant les mêmes valeurs pour les y, on pouvait satisfaire à la condition de continuité

$$(3) \qquad [f^\alpha(h, l^1, l^2, \ldots, l^n) - f^\alpha(j, l^1, l^2, \ldots, l^n)] < \sigma,$$

σ pouvant être pris aussi petit qu'on le voudra; en outre, nous avons imposé, pour ce qui est des variations des quantités y, les conditions d'une nature spéciale, définies par les inégalités

$$(2) \qquad \begin{cases} [f^\alpha(h, k^1, k^2, \ldots, k^n) - f^\alpha(h, l^1, l^2, \ldots, l^n) \\ \quad < c^{\alpha,1}(k^1 - l^1) + c^{\alpha,2}(k^2 - l^2) + \ldots + c^{\alpha,n}(k^n - l^n)]. \end{cases}$$

Notre démonstration suppose essentiellement que ces conditions soient satisfaites. Pour s'en convaincre, on peut se borner au cas d'une seule équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Si, au lieu de l'inégalité (2), on suppose seulement que l'on ait

$$(2^\star) \qquad [f(h, k) - f(h, l)] < c\,[h - l]^\delta,$$

où δ est une quantité positive plus petite que 1, les raisonnements, calqués sur ceux que nous avons faits, conduiraient à remplacer l'inégalité (11) par la suivante:

$$(11^\star) \qquad z_{a+1} < z_a + (c z^\delta_a + \lambda)(x_{a+1} - x_a),$$

en prenant encore $z_0 = 0$.

Pour savoir si les quantités z_{a+1} peuvent être, pour une valeur de λ suffisamment petite, rendues aussi petites qu'on le voudra, on formera le système d'équations

$$(12^*) \qquad u_{a+1} - u_a = (cu_a^\delta + \lambda)(x_{a+1} - x_a), \quad u_0 = 0,$$

et l'on aura encore

$$(13^*) \qquad z_{a+1} < u_{a+1};$$

il faudra ensuite chercher si, pour une valeur suffisamment petite de λ, les quantités u_a peuvent être ou non rendues aussi petites qu'on le voudra. Dans le premier cas, on arriverait à la même conclusion; mais, dans le second cas (et nous allons voir que c'est à celui-là que nous avons affaire), notre démonstration s'écroule. On a supposé les intervalles $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_p - x_{p-1}$ assez petits pour que, dans un champ K_a où la différence des valeurs de x est inférieure à $x_{a+1} - x_a$ et la différence des valeurs de y inférieure à $c_a(x_{a+1} - x_a)$, la différence de deux valeurs de $f(x, y)$ soit inférieure à la quantité donnée λ.

Les intervalles $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_p - x_{p-1}$ étant choisis pour qu'il en soit ainsi, rien n'empêche de les subdiviser en intervalles plus petits; la condition posée restera remplie; en poussant la subdivision assez loin et désignant par u_a la valeur correspondante à x_a, on voit que les équations (12^*) peuvent être remplacées, avec une approximation aussi grande qu'on le voudra, par l'équation

$$x_a - x_0 = \int_0^{u_a} \frac{du}{cu^\delta + \lambda},$$

d'où

$$x_a - x_0 < \int_0^{u_a} \frac{du}{cu^\delta} = \frac{1}{c(-\delta+1)} u_a^{-\delta+1},$$

$$u_a > (-\delta+1)\, c\, (x_a - x_0)^{\frac{1}{-\delta+1}};$$

lors donc que l'on donne λ, on ne peut nullement rendre u_a aussi petit qu'on le veut; les inégalités (13^*) ne peuvent donc conduire à une limite convenable des quantités z_{a+1}.

Il est clair que les inégalités (8) sont toujours satisfaites lorsque les fonctions f^α, pour toutes les valeurs du champ G, ont des dérivées partielles du premier ordre uniformes, finies et continues par rapport aux n variables y^α : car alors la différence

$$f^\alpha(h, k^1, k^2, \ldots, k^n) - f^\alpha(h, l^1, l^2, \ldots, l^n)$$

peut, d'après le théorème de Taylor, être mise sous une forme qui met ces inégalités en évidence. Par contre, de ces inégalités supposées vraies on ne peut rien conclure sur la nature des dérivées partielles.

Dans le cas où les fonctions f^α ne contiennent pas les variables y^α, les fonctions restent uniformes, finies et continues par rapport à x; notre analyse montre que l'intégrale $\int_{x_0}^{x} f^\alpha(\xi)\,d\xi$ a un sens déterminé et que la dérivée de cette fonction, prise pour une valeur de la variable égale à la limite supérieure de l'intégrale, est égale à $f(x)$. Le Mémoire posthume de Riemann, sur la représentation d'une fonction par une série trigonométrique, a mis en lumière ce fait, que l'existence de l'intégrale définie dépend d'une condition plus générale que la continuité : l'intégrale $\int_{x_0}^{x_0+A} f^\alpha(\xi)\,d\xi$ existera si la fonction $f^\alpha(x)$ reste finie quand x varie de x_0 à $x_0 + A$, et si, en partageant l'intervalle de x_0 à $x_0 + A$ en intervalles indéfiniment décroissants $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ..., la grandeur totale des intervalles pour lesquels l'oscillation de la fonction $f^\alpha(x)$ reste inférieure à une quantité donnée σ, aussi petite qu'on le voudra, peut être rendue aussi petite qu'on le voudra si ces conditions sont remplies, et si x est une quantité comprise entre x_0 et $x_0 + A$, il est clair que l'intégrale $\int_{x_0}^{x} f^\alpha(\xi)\,d\xi$ existera; mais, à ce qu'il me paraît, ces conditions n'entraînent nullement cette conséquence, que la dérivée de cette intégrale, prise pour une valeur de la variable égale à la limite supérieure de l'intégrale, soit égale à $f^\alpha(x)$: aussi ai-je cru devoir conserver la condition de la continuité des fonctions $f^\alpha(x)$ pour ce qui est de l'étude de l'intégration des équations différentielles $\frac{dy^\alpha}{dx} = f^\alpha(x)$.