BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Revue bibliographique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 10 (1876), p. 113-141

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1876__10__113_0>

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

CLEBSCH (A.). — Vorlesungen über Geometrie, bearbeitet und herausgegeben von Dr F. Lindemann, mit einem Vorworte von F. Klein. Ersten Bandes, erster Theil. — Leipzig, Teubner, 1875. In-8°, 496 p.

Un prospectus que M. Lindemann a joint à ce premier tome de la première Partie de la publication commencée indique les Cours du regrettable Clebsch qui ont servi de base pour cette première Partie; ils ont eu pour objet : 1° la Géométrie analytique du plan (été 1871); 2° la théorie des courbes algébriques (hiver 1871-1872); 3° la théorie des formes algébriques (été 1872).

Une partie du dernier Cours est déjà publiée par Clebsch lui-même dans sa théorie des formes binaires. Le reste, où, après avoir orienté ses auditeurs sur les propriétés générales des formes ternaires, il traitait d'une seule forme ternaire quadratique ou cubique et des systèmes de deux formes quadratiques, avait un caractère trop exclusivement algébrique pour trouver place sans altérations dans l'Ouvrage actuel. Le but de celui-ci rendait aussi souhaitable un autre ordre que celui des Cours de Clebsch : la partie algébrique devait précéder les parties géométriques qui en contiennent les applications. Ces transpositions ont demandé évidemment beaucoup de transformations de détail; d'autres résultent de l'égard que M. Lindemann a eu aux plus nouveaux progrès de la Science; enfin il ajoute quelques parties entièrement nouvelles.

On voit que M. Lindemann a pris le parti le moins commode, en prenant par ces altérations toute la responsabilité de sa publication et seulement une partie de l'honneur, plus ou moins grande pour les différentes Sections du Livre.

Le parti qu'il a pris est-il le meilleur? Ne connaissant pas les cahiers à sa disposition, nous ne pouvons en juger. Le parti pris a été peut-être le seul possible. Nous avons ici seulement à nous demander si nous trouvons ici un bon et utile Ouvrage, et si cet Ouvrage est digne de porter le nom de Clebsch. Devant donner dans la présente analyse une réponse affirmative à la première de ces questions, il s'ensuivra que la réponse à la seconde sera aussi affirmative si, bien entendu, on retrouve l'esprit de Clebsch dans toutes les altérations et les additions. Aussi à cet égard il me semble, d'après ma connaissance des travaux considérables du géomètre, qu'on a lieu d'être content du Livre. L'unité de plan qui y règne en est le meilleur témoin. Enfin une partie des altérations sont faites avec le concours de l'ami et l'ancien collaborateur de Clebsch, M. Gordan; une partie essentielle des additions traite des recherches de ses habiles élèves MM. Nöther et Brill, et nous supposons que la promesse de M. Klein, de joindre au Livre une Préface, est un témoignage du concours de cet éminent élève et ami de Clebsch à la publication de ses Leçons.

L'Ouvrage dont le premier tome nous occupe ici est un traité analytique des propriétés des figures qui ne sont pas altérées par des projections ou par des transformations semblables, ou bien, si on les considère au point de vue algébrique, des propriétés dont les expressions algébriques ne sont pas altérées par des substitutions linéaires. La matière est donc la même qui occupe principalement les excellents Livres de M. Salmon, mais la manière dont le sujet est traité est bien différente.

Ce qui rend la lecture du Livre de M. Salmon si attrayante et si utile, c'est la *richesse des méthodes*, et la clarté avec laquelle l'auteur sait toujours faire saisir au lecteur ce qui est le plus essentiel dans les méthodes. On voit partout les avantages de la méthode choisie, qui est ordinairement celle qui conduit le plus rapidement aux résultats, souvent celle qui y a conduit originairement.

Clebsch et le publicateur de ses Leçons s'attachent principalement à l'*unité de la démonstration algébrique*. Certainement, ils se servent en beaucoup d'endroits de raisonnements géométriques; mais ils cherchent pourtant à faire observer au lecteur la connexion algébrique qui correspond aux propriétés géométriques, à lui faire comprendre la raison algébrique de toutes les vérités, même de celles qui sont établies géométriquement. Ils déterminent, par exemple, quand il leur est possible, les formes des équations des courbes dont les ordres sont déterminés géométriquement ailleurs, et cherchent en plusieurs endroits, avec un succès notable, à faire suivre à la Géométrie algébrique les chemins qui lui sont marqués par les recherches faites au moyen du principe de correspondance de M. Chasles et des autres principes analogues. En même temps ils ne négligent pas de mettre les résultats obtenus, et même les voies qui y conduisent, sous les yeux du lecteur d'une manière géométrique et palpable.

Les moyens grâce auxquels Clebsch obtient l'unité algébrique de la démonstration sont connus des lecteurs de ses autres travaux; ils sont : 1° une forme très-générale de coordonnées trilinéaires, et 2° une représentation symbolique des formes algébriques avec leurs invariants, leurs covariants, etc.

Les coordonnées ponctuelles $x_1 : x_2 : x_3$ sont les rapports des distances d'un point à trois droites, ces distances étant multipliées par des constantes. Elles ne diffèrent donc pas de celles auxquelles M. Fiedler a donné le nom de *coordonnées projectives*. Les coordonnées tangentielles $u_1 : u_2 : u_3$ se déterminent d'une manière analogue; seulement les constantes ont des valeurs telles que l'équation

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

exprime que le point x se trouve sur la droite u. L'avantage de ces coordonnées sur les coordonnées plückériennes ordinaires consiste en ce qu'une substitution linéaire exprime en général une simple transformation de coordonnées.

La représentation symbolique d'une forme binaire ou ternaire est celle que M. Aronhold a employée le premier et qui se fait par une puissance d'une expression linéaire : pour avoir la forme représentée par le symbole, il faut seulement remplacer les différents produits des puissances des coefficients de l'expression linéaire par les coefficients de la forme. Par ce moyen on obtient de pouvoir exprimer symboliquement toutes les formes invariantes appartenant à la forme donnée par celles d'un système simultané de formes linéaires. Cette représentation symbolique des invariants diffère à plusieurs égards de la représentation symbolique des opérations servant à former des invariants, employée par les géomètres anglais, bien qu'elle résulte d'un développement ultérieur de celle-ci.

La première des quatre Sections du tome paru de l'Ouvrage qui nous occupe a pour titre : *Considérations préliminaires. Séries de points et faisceaux*. Elle contient premièrement un exposé rapide des applications les plus élémentaires des coordonnées orthogonales, ponctuelles et tangentielles. Les mêmes coordonnées sont ensuite appliquées à la déduction du principe de dualité, et des propriétés des séries de points et des faisceaux de droites qui font la base de la Géométrie synthétique de Steiner et de Chasles. On apprend à connaître les Génératrices des coniques dont se servent ces géomètres, les propriétés harmoniques du quadrilatère, etc. A la fin de la Section se trouve l'exposé des systèmes de coordonnées générales dont nous venons de parler. Dans le cours de la Section, l'auteur a trouvé moyen d'introduire les notions indispensables des propriétés des déterminants.

La seconde Section, qui a pour titre : *Les courbes du second ordre et de la seconde classe,* contient les applications aux coniques des coordonnées introduites et des théories développées. On y trouve les déductions algébriques des propriétés projectives principales d'une seule conique et du système de deux coniques, et les représentations algébriques des coniques dégénérées et regardées comme lieux de points ou comme enveloppes, et il est montré comment la notion des propriétés projectives conduit, par l'introduction de la droite à l'infini et des points circulaires à l'infini, aux propriétés métriques des diamètres et des foyers d'une conique et à celles des cercles.

Les deux Sections possèdent la simplicité, l'élégance et la clarté que l'on devait attendre d'un auteur comme Clebsch dans un champ qui est si bien préparé, par exemple par les Leçons classiques de Hesse. Cette préparation est mise à profit plus directement en quelques endroits, où cela a pu se faire avec avantage; mais ordinairement l'auteur s'en sert pour s'élever à de nouveaux points de vue. Nous mentionnerons comme exemple le parti tiré dans beaucoup de recherches de l'équation servant à déterminer le rapport anharmonique de deux points donnés et des points où la droite qui les joint rencontre une conique donnée. On voit, du reste, partout que ces deux Sections n'ont pas pour seul but de développer des propriétés des coniques, etc. : on y observe la tendance à préparer ainsi les voies aux théories contenues dans les parties suivantes du Livre. Le lecteur acquiert, par exemple, dès la discussion de la figure composée de deux coniques, la connaissance des invariants et des covariants, et apprend par cet exemple le parti qu'on peut en tirer pour la Géométrie, avant de commencer dans la troisième Section l'étude principale de ces instruments de l'Algèbre moderne.

La troisième Section contient une *Introduction à la théorie des formes algébriques*. Après des remarques préliminaires sur cette création de MM. Cayley et Sylvester, qui doit son origine en partie à la théorie des nombres, en partie aux progrès puissants de la Géométrie, on s'occupe en particulier de la théorie des formes binaires, de leur représentation symbolique et de leur signification géométrique. L'application de la représentation symbolique est montrée par des exemples; mais nous regrettons que l'éditeur n'y ait pas ajouté les énoncés de règles fixes pour le calcul symbolique. En général, ces règles se présentent immédiatement; mais là où, à côté des produits symboliques, il se présente des produits effectifs (par exemple dans la théorie des polaires), il serait bon d'avoir ces règles formulées.

On sait que la signification géométrique de la théorie des formes binaires est une Géométrie sur une droite (ou sur une courbe unicursale); elle tend donc, avec d'autres algorithmes, au même but que les premières Parties de la *Géométrie supérieure* de Chasles ([1]), et elle a la même importance pour la Géométrie plane que celle-ci pour la Géométrie d'espace. On doit à Clebsch un très-beau moyen d'appliquer immédiatement à la Géométrie à deux dimensions les résultats obtenus dans la Géométrie à une dimension. Il consiste en une transformation d'un invariant d'une forme binaire en un contrevariant d'une forme ternaire. Cette transformation, publiée dans le volume 59 du *Journal de Crelle*, est exposée et illustrée par de belles applications dans l'avant-dernier paragraphe de la Section dont nous parlons.

Mais revenons aux formes binaires. La Section contient des recherches spéciales sur les formes du second, du troisième et du quatrième ordre. Clebsch a traité la même matière dans son Ouvrage sur les formes binaires; mais la différence des buts amène une différence de points de vue. Dans le Livre qui nous occupe, il s'agit notamment de montrer la signification géométrique des invariants et covariants que l'on forme. Ils deviennent par cela moins abstraits et, selon nous, plus faciles à saisir pour le lecteur. Dans le Livre cité, on avait un but plus difficile, celui de démontrer que

---

([1]) Aussi le principe de correspondance a trouvé ici sa place naturelle.

les systèmes de formes appartenant à des formes données sont finis, résultat trouvé par M. Gordan. Dans le nouveau Livre, ce théorème sert de guide à la déduction des invariants et covariants, sans être expressément la base des recherches; on peut donc se borner à y renvoyer.

La troisième Section contient encore des discussions sur les formes ternaires. Ces discussions comprennent premièrement la théorie algébrique de la transformation homographique des figures planes, et ensuite la représentation symbolique des formes ternaires et des systèmes invariants qui y appartiennent. Il s'y joint une discussion sur la formation invariante la plus générale d'un système de formes ternaires, qui demande toutefois un emprunt à une Section du second volume du Livre. Nous n'aimons pas ces emprunts, qui rendent aussi les résultats difficiles à comprendre; mais, dans le cas actuel, l'emprunt est sans inconvénient, parce que les seules applications qu'on en fasse dans ce qui suit sont réunies dans une recherche à part, contenant la déduction du système complet des formations invariantes de deux coniques, qui termine la troisième Section. Cette déduction a été communiquée à l'éditeur par M. Gordan.

On possède ainsi d'excellents instruments pour l'étude de la *Théorie générale des courbes algébriques*, qui occupe la dernière Section du volume.

Le premier paragraphe de cette Section contient la théorie des courbes polaires, y compris la détermination de la courbe hessienne et quelques beaux théorèmes sur les polaires exposés par Clebsch dans le 58ᵉ volume du *Journal de Crelle*.

Le deuxième paragraphe contient la théorie des points singuliers. Le point à discuter est pris pour origine des coordonnées, et ensuite on développe, par la règle de Newton et de Cramer, une série servant à exprimer l'une des coordonnées par l'autre. Par ce moyen on distingue et discute les différentes branches passant par le point singulier, tandis que la résolution d'un point singulier quelconque en points doubles et cuspidaux ne peut se faire qu'à la fin du Livre par une application, indiquée par M. Nöther, des transformations de Cremona.

Déjà ce deuxième paragraphe contient une discussion faite, au moyen du système particulier de coordonnées, des propriétés des branches des polaires et de la hessienne qui passent par un point double ou cuspidal. Cette discussion est reprise dans le paragraphe suivant avec des coordonnées générales. Elle se fait alors au moyen des représentations symboliques. Cette discussion conduit aux formules plückériennes auxquelles est jointe l'expression du genre p d'une courbe algébrique. La démonstration complète de la propriété principale de ce nombre, de n'être pas altéré par une transformation birationnelle, est toutefois réservée expressément pour une Section du tome suivant. Certainement, on en trouve déjà dans le présent tome une démonstration préalable au moyen de l'extension du principe de correspondance due à MM. Cayley et Brill; mais cette démonstration, de même que celle d'un théorème plus général qui comprend celui sur l'invariabilité de p, n'est pas complète, parce que ce principe n'est immédiatement applicable qu'à des séries où les points correspondant à un point donné font, avec des points fixes, un système complet de points d'intersection.

Les relations plückériennes et la propriété du nombre p sont appliquées, dans le § IV, à compléter la détermination des nombres plückériens des courbes hessienne [1], steinérienne et cayleyenne d'une courbe donnée, une partie de ces nombres étant trouvés par une déduction directe des équations algébriques dont ils indiquent les degrés, ou du moins d'équations qui y conduisent par des éliminations.

Le reste du tome I^{er} contient des additions que M. Lindemann a faites aux Leçons de Clebsch, et qui sont, nous l'avons dit déjà, entièrement conformes au plan suivi dans l'Ouvrage entier. Ces additions contiennent la génération, due à MM. Chasles et de Jonquières, des courbes d'ordre quelconque par des faisceaux qui se correspondent anharmoniquement; la théorie de la courbe jacobienne de trois courbes fixes ou d'un système; la théorie des caractéristiques; les recherches de MM. Nöther et Brill sur les groupes de points d'une courbe algébrique, toutefois sans que l'auteur trouve assez de place pour exposer complétement les démonstrations de

---

(1) Il nous semble que la notion du genre enlève aussi une difficulté mentionnée dans le Livre. Les auteurs disent (p. 361) qu'on n'a pas encore démontré que la hessienne d'une courbe générale n'a aucun point double. Or trois des nombres plückériens de la courbe steinérienne sont déduits indépendamment de cette circonstance. On peut donc en déduire le genre, qui est egal à celui de la courbe hessienne, et alors on voit sans difficulte que la hessienne est dépourvue de points doubles cuspidaux.

ces deux savants, qui évitent les dénombrements incertains [1]; l'extension du principe de correspondance à une courbe de genre quelconque, trouvée par induction par M. Cayley, et démontrée par M. Brill, qui en établissait en même temps l'étendue et la limitation; les transformations de figures planes qui portent le nom de M. Cremona, qui en a donné le premier une théorie générale.

M. Lindemann ne se borne pas à exposer ces théories et à les adapter aux autres parties du Livre, ce qui amène déjà de nouveaux points de vue : il les enrichit en même temps, notamment dans le sens algébrique. Il fait par exemple, dans la théorie des caractéristiques, une étude analytique des systèmes élémentaires de coniques et de leurs courbes exceptionnelles, dont il illustre aussi les multiplicités par des figures; et, dans l'exposé de l'extension du principe de correspondance, il donne, du moins dans les cas les plus simples, les développements des équations des courbes servant à déterminer les points de coïncidence. Nous parlerons un peu plus en détail de celles de ses additions personnelles qui nous ont intéressé le plus : elles appartiennent à la théorie des caractéristiques.

Le théorème de M. Chasles qui énonce que le nombre des coniques d'un système de caractéristiques μ et ν qui satisfont à une nouvelle condition [1] s'exprime par la formule $\alpha\mu + \beta\nu$, où α et β dépendent seulement de la nouvelle condition, a été trouvé originairement par une sorte d'induction. Le grand nombre de cas où la loi énoncée s'était confirmée, et le défaut de cas qui y fussent contraires, ne formaient pas toutefois les seules raisons qu'on eût pour l'adopter : elle était en connexion intime avec la circonstance qu'il est toujours possible de déterminer les nombres dont il s'agit par le principe de correspondance, applicable toujours à la détermination des nombres de solutions de questions qui sont exprimables algébriquement. Il semble impossible, en effet, de parvenir par ce principe à des expressions d'une autre forme, les expressions des

(1) *Voir* aux pages 338-341, où il s'agit d'un théorème fondamental de cette théorie, et où l'auteur renvoie, pour la demonstration complète, à un Mémoire de M. Nöther. L'auteur reviendra, du reste, sur les mêmes équations dans la Section du tome II où il traitera des fonctions abeliennes.

(1) Toutes les conditions doivent être exprimables algebriquement.

nombres des seules coniques singulières ayant la même forme. Toutefois ces considérations étaient trop vagues pour constituer une démonstration formelle. Il était donc juste que les géomètres s'intéressassent vivement aux démonstrations ingénieuses de Clebsch et de Halphen, bien que même, en s'éloignant beaucoup des considérations dont nous venons de parler, elles devinssent longues et difficiles à suivre. M. Lindemann a réussi à établir une démonstration algébrique dont la simplicité correspond à celle du théorème et des considérations sur le principe de correspondance qui y ont conduit.

La base de sa démonstration est le lemme suivant, grâce auquel il a égard à toute sorte de représentations algébriques :

« Lorsqu'un système d'équations (entre un nombre quelconque d'inconnues), combiné avec une équation linéaire, conduit à μ solutions, il conduit à μq solutions si on le combine avec une équation du degré q; et ce même résultat aura lieu aussi dans le cas où, à côté de ces solutions, il existe un nombre simplement infini de solutions identiques (¹) de l'équation linéaire et des équations du système donné (²). »

Ce lemme montre que, dans un système de coniques représentées par une équation ponctuelle, il y en a $\gamma\mu$ qui satisfont à une condition donnée, γ étant un nombre dépendant de celle-ci. Or il est impossible de représenter complétement de cette manière les $\lambda\,(=2\nu-\mu)$ coniques infiniment aplaties. Le nombre trouvé peut donc comprendre ces coniques β fois, et le nombre de solutions propres se réduira à $\gamma\mu-\beta\lambda=\alpha\mu+\beta\nu$.

M. Lindemann démontre aussi le théorème trouvé par induction par M. Cremona, sur le nombre de coniques soumises à une condition double et une condition triple. Sa démonstration, qui

(¹) C'est-à-dire indépendantes des coefficients de l'équation linéaire.

(²) Il est essentiel que la démonstration de ce lemme s'applique aussi aux cas où il n'est pas possible de réduire le nombre des équations à celui des quantités qu'elles servent à determiner. On a aussi ailleurs, dans le Livre, égard à cette espèce de détermination, dont les exemples les mieux connus sont les déterminations de groupes de points et de courbes gauches, qui ne sont pas des intersections complètes. Le lemme, qui peut avoir beaucoup d'applications, et même sa première partie, conduisent immédiatement à la démonstration complète du théorème qu'une courbe gauche d'ordre m rencontre une surface d'ordre n en mn points.

diffère de celle de M. Halphen, à un seul des moyens employés près, est aussi très-simple.

Il est très-difficile d'affirmer qu'en des démonstrations de cette espèce il ne reste plus aucun point faible; mais, en tout cas, nous croyons que la voie choisie est bonne, quand même il y aurait dans le détail encore quelque précaution à avoir ou quelque expression à corriger (1).

On trouve aussi des remarques intéressantes, mais qui ne prétendent pas à être complètes, sur les raisons algébriques des différentes propriétés des systèmes de courbes d'ordre supérieur qui se sont présentées à l'application du principe de correspondance.

Je termine cette analyse en faisant remarquer que l'exposition est naturelle, simple et ordinairement facile à suivre, et que le texte est accompagné de renvois bibliographiques. H. Z.

SANDS (Rear-Admiral B.-F.), U. S. N. Superintendent. — ASTRONOMICAL AND METEOROLOGICAL OBSERVATIONS made during the Years 1871 and 1872 at the United-States Naval Observatory. — Washington, 1873-1874, 2 vol. in-4°, 1020-558 p.

Depuis l'année 1845, l'Observatoire de Washington publie régulièrement ses observations dès qu'elles sont réduites. Cette publication, qui forme, pour chacune des dernières années, un volume de 600 à 1000 pages, contient d'ordinaire, indépendamment des observations courantes, un certain nombre d'Appendices. Le premier des deux volumes que nous analysons, publié en 1873, est, sous ce rapport, d'une étendue et d'une importance exceptionnelles.

La première Partie renferme les observations faites en 1871 au cercle méridien, à l'instrument des passages, au mural et à l'équatorial. Chacune des séries d'observations est précédée d'une description détaillée de l'instrument correspondant et des appareils

(1) Nous en avons même trouvé un exemple. L'auteur dit, à la page 405 : « que les nombres γ' et δ ne dependent que de la série R_2, c'est-à-dire de la série ∞^2. » Cette conclusion n'est pas juste, ce que nous ne relevons que pour faire remarquer que la faute est facile à corriger, sans qu'il en résulte aucune conséquence pour les conclusions suivantes.

accessoires, tels que collimateurs, horloges sidérales, chronographes, baromètres, thermomètres, sympiézomètres. On y a joint l'analyse détaillée des procédés d'observations, des grossissements, des intervalles des fils, des dispositions micrométriques. Enfin on a donné le tableau des formules et des constantes que l'on a employées pour le redressement des erreurs de collimation, de niveau et d'azimut ainsi que pour les corrections nécessitées par les erreurs de division, par la flexion des lunettes, etc., etc. Cette première Partie contient en outre les observations météorologiques de 1871.

Le volume est complété par quatre Appendices relatifs surtout à des observations arriérées et dont le titre suffit à indiquer l'importance :

Le premier donne les zones d'étoiles observées au cercle méridien dans les années 1847-1849.

Le deuxième donne le résultat des observations faites au mural et à l'instrument des passages, de 1853 à 1860 inclusivement.

Le troisième contient le Catalogue des étoiles observées de 1845 à 1871.

Le dernier enfin, dû à M. le professeur Nourse, attaché à l'Observatoire, contient l'histoire détaillée de cet établissement depuis son origine, et le recueil de toutes les pièces officielles qui se rapportent à sa construction et à ses progrès. C'est l'analyse de ce Mémoire qui nous paraît devoir intéresser particulièrement nos lecteurs, au moment où l'on s'occupe de développer les établissements astronomiques de la France.

C'est le 23 mars 1810 que l'on trouve, dans la législation américaine, la première trace d'une préoccupation relative à l'Astronomie. Un député, M. Pitkin, expose à la Chambre des représentants la nécessité, pour les États-Unis, d'avoir un méridien indépendant; il donne, dans son Rapport, la longitude approchée de Washington calculée par l'astronome américain Lambert, d'après une occultation d'Alcyone par la Lune, et il demande que ces recherches soient poursuivies et développées. Ce Rapport est renvoyé à une première Commission, puis à une seconde, qui, en janvier 1811, transmet l'affaire au fameux Monroe, alors ministre d'État.

Au bout de dix-huit mois, en juillet 1812, Monroe fait connaître son avis à la Chambre; il étend l'idée de Lambert, et conclut à la nécessité d'élever en Amérique un grand Observatoire. Un Rapport favorable du Dr Mitchell est suivi d'un vote conforme. Malheureusement, le texte du bill disparaît dans l'incendie du Capitole de 1814. Le projet est cependant renvoyé à une Commission des deux Chambres réunies; mais, par un nouveau contre-temps, les préoccupations de la guerre le font oublier jusqu'en 1815. A la paix, l'affaire est reprise; mais le gouvernement ajourne toute décision, sous prétexte que le bill n'a été voté que par la Chambre des représentants et n'a pas été soumis au Sénat.

Ce n'est qu'en novembre 1818 que Lambert, un peu découragé, revient à la charge, mais en réduisant considérablement ses prétentions; il ne demande plus qu'un Observatoire soit construit immédiatement; il se contente de faire présenter par le député Nelson un troisième Mémoire réclamant des observations supplémentaires pour arriver à une détermination rigoureuse de la longitude de Washington par rapport à celle de Greenwich. Grâce à de nouvelles lenteurs, il n'obtient gain de cause qu'au bout de trois ans. Enfin, en 1821, il est chargé par le Président de faire lui-même les observations nécessaires : il détermine, à l'aide de bons instruments venus d'Europe, de nombreux passages de la Lune au méridien; il profite de l'éclipse de Soleil du 27 août, et, après avoir fait et refait les calculs et les avoir soumis à l'examen des savants d'Amérique et d'Europe, il fixe enfin la longitude du Capitole à $76^{\circ}\,55'\,10'',05$. Le Président transmet ce travail au Congrès, en renouvelant la demande d'un Observatoire. Une Commission est nommée et fait son Rapport, mais ce Rapport reste enfoui dans les cartons : on n'a pu en retrouver la trace; il a probablement disparu dans l'incendie de la bibliothèque du Congrès, en 1851.

On voit que quinze années d'efforts étaient restées inutiles. En 1825, on put reprendre quelque espoir. Le premier message du Président Adams faisait ressortir, dans un magnifique langage, la nécessité de l'instruction supérieure et de la Science pour la grandeur d'un peuple; il demandait instamment la fondation d'une puissante Université nationale, et, comme conséquence, la création d'un Observatoire de premier ordre : « Il n'existe pas », disait-il, « un seul établissement astronomique sur toute la surface de l'Amérique, tandis que l'Europe en compte 130, pour une étendue beaucoup moindre. » Le major-général Matcomb, chef du génie, déposa, le

18 mars 1826, sur cette partie du message, un Rapport détaillé qui montrait, pour la première fois, une étude sérieuse de la question. Ce Rapport était accompagné d'une lettre du major Kearney, qui proposait un plan général fondé sur l'examen approfondi des Observatoires les plus parfaits, ceux de Greenwich, de Wilna, de Berlin, de Poulkova, de Dublin, etc. Le projet, après deux lectures, fut renvoyé à une Commission des deux Chambres; mais il fut enterré à son tour sous l'indifférence des représentants, et l'on n'en retrouve plus aucune trace dans la suite des débats législatifs.

Cette indifférence persista sous les successeurs d'Adams. A part deux nouvelles tentatives aussi infructueuses que les précédentes, faites en 1830 et en 1835, il n'y a plus rien à signaler jusqu'à la session de 1841-1842.

Mais, tandis que la question s'agitait ainsi vainement devant les assemblées politiques, un véritable Observatoire se fondait silencieusement avec les origines les plus modestes.

L'influence du lieutenant Goldsborough, aujourd'hui contre-amiral, avait fait décréter, en 1830, la création à Washington d'un dépôt de cartes et d'instruments. M. Goldsborough réunit dans un local provisoire des chronomètres, des sextants, des théodolites qu'il fit venir de New-York. Il y ajouta plus tard un instrument des passages du prix de 40 guinées, dont il se servit pour quelques observations courantes.

M. Goldsborough fut remplacé, en 1833, par le lieutenant Wilkes qui transporta l'établissement sur la colline du Capitole. Ce marin, passionné pour l'Astronomie, établit à ses frais des instruments de Troughton; mais il n'y eut pas d'observations régulières jusqu'en 1838, époque à laquelle M. Wilkes partit pour acheter en Europe des instruments destinés à un voyage d'exploration. Pendant ce voyage, son ami Gillis à Washington et M. Bond à Boston firent des observations correspondantes de culminations lunaires; ils y joignirent des observations magnétiques et météorologiques.

A mesure que le travail avançait, l'insuffisance de l'établissement, les défauts de l'instrument des passages, etc., devenaient plus manifestes, et plus urgente aussi la nécessité de construire un Observatoire régulier. Cet Observatoire devint en effet, sous le nom modeste de Dépôt permanent, l'objet d'une demande de crédit de [illegible] 000 dollars. Une visite de la Commission à l'établissement suffit à convaincre les plus sceptiques, et un petit événement astronomique, l'observation de la comète d'Encke, faite par M. Gillis à l'aide d'une faible lunette de 3 $\frac{1}{2}$ pouces, entraîna enfin le vote du Congrès. Peut-être quelques-uns des votants furent-ils décidés par l'intérêt qu'ils portaient aux questions météorologiques. On trouve, en effet, dans le Rapport du Secrétaire de la Marine, cette phrase mémorable à tous égards : « *Si la théorie du professeur Espy est exacte, le moment n'est pas éloigné où l'on pourra prédire l'heure précise de l'arrivée d'une tempête.* »

Ce vote important eut lieu dans la session de 1841-1842, c'est-à-dire dans la session même où le même Congrès rejetait une nouvelle proposition d'Adams, relative à la construction d'un établissement officiellement décoré du nom d'Observatoire. Adams, en effet, n'avait jamais interrompu ses efforts. Il les avait redoublés lorsqu'il fut porté à la présidence de la Commission chargée de régler l'emploi du fameux legs Smithson. Il proposa alors d'en affecter les sept premières annuités à la création d'un Observatoire, à l'achat d'instruments et de livres, à un fonds d'appointements pour des astronomes, à l'entretien de chaires qui ne fussent « ni des sinécures, ni des fauteuils de moines ». Il voulait un monument sans rival et qui surpassât même les splendeurs de Poulkova. Son Rapport, dans lequel la passion scientifique se mêle incessamment aux idées religieuses, est un véritable modèle d'éloquence. Cependant ses demandes ne furent pas définitivement adoptées; mais les débats dont elles furent l'objet ne restèrent pas sans influence sur le vote du dépôt d'instruments qui allait devenir un véritable Observatoire.

Le 23 novembre 1843, en effet, le lieutenant Gillis proposa au Département de la Marine un plan mûrement examiné par nombre de savants d'Amérique et d'Europe. Un bill du Congrès autorisa le Président à élever, *sous son vrai nom,* l'Observatoire sur un terrain public du district de Colombie placé sur la rive sud du Potomac. Ce terrain avait joué un rôle dans l'histoire des États-Unis. En 1755, le général Braddock y avait campé dans sa marche contre le fort Duquesne. Plus tard, en 1795, Washington avait proposé de l'affecter à une Université nationale. Plus tard encore, en 1813 et 1814, il avait été occupé par une partie de l'armée américaine dans la défense de la ville contre le général Ross et l'amiral Cockburn.

En février 1845, Mason fit un Rapport au Sénat sur les constructions qui venaient d'être achevées d'après les plans de Gillis. Ces constructions répondaient à tous les besoins de la Science moderne. Les instruments méridiens en particulier avaient été installés avec soin; ils reposaient sur un massif de maçonnerie de 6 pieds de profondeur. L'Observatoire possédait :

Un réfracteur astronomique;

Une lunette méridienne;

Une lunette de premier vertical;

Un cercle mural;

Un chercheur de comètes;

Des instruments magnétiques;

Des instruments météorologiques;

Enfin divers petits instruments provenant de l'ancien dépôt.

Le premier directeur officiel de l'Observatoire fut l'illustre Maury, qui resta à sa tête de 1844 à 1861, c'est-à-dire jusqu'au moment où il prit le parti du Sud contre le Nord.

Dès l'année 1846, Maury réclamait des agrandissements; il faisait remarquer que les zones de Bessel et le Catalogue des étoiles doubles de Struve ne dépassaient pas le 15e degré de latitude australe. La position de Washington lui permettait d'étendre le travail à 15 degrés plus au sud. Maury proposait donc d'entreprendre cette extension, en commençant par les régions célestes les plus australes : on indiquerait la couleur, la position et la grandeur de chaque étoile; mais, comme il aurait fallu un siècle avec les moyens actuels, il était nécessaire de les augmenter considérablement. En attendant, l'Observatoire entreprit le Catalogue des étoiles au-dessus des 9-10e grandeurs, en affectant à ce travail trois de ses instruments fondamentaux.

Ces recherches furent continuées jusqu'en 1849; mais les calculateurs se trouvèrent bientôt en retard sur les observateurs, de sorte que la première partie des résultats ne fut publiée qu'en 1860; une autre vient de l'être dans le volume même que nous analysons; la dernière partie est sous presse (1872).

Cependant le premier volume des publications de l'Observatoire parut en 1846; il renfermait les observations courantes de 1845. Il fut bientôt suivi du second volume, dans lequel on trouve, indépendamment du travail courant, un Mémoire relatif à l'identification de Neptune avec une étoile du Catalogue de Lalande de 1795. Aussitôt après la découverte de Neptune, un astronome de l'Observatoire, Walker, avait entrepris de rectifier les éléments de son orbite en profitant des anciennes observations dans lesquelles cette planète aurait pu être inscrite comme étoile télescopique. A cette fin, il releva, dans le Catalogue de Lalande, une liste de quatorze étoiles très-voisines des positions que Neptune avait pu occuper en 1795, et il donna cette liste à son collègue Hubbart, chargé de l'équatorial. Celui-ci s'aperçut bientôt qu'une de ces étoiles avait disparu; en admettant qu'elle marquât une ancienne position de la planète, Walker parvint le premier à calculer une orbite très-approchée et à construire une éphéméride deux ans à l'avance.

Il n'y a rien de particulier à dire sur les observations de 1847 à 1850.

Au reste, l'Astronomie était devenue graduellement, sous l'influence des idées de Maury, une occupation secondaire de l'Observatoire. Le directeur et la plupart de ses aides étaient absorbés par le travail des cartes des vents et des courants. Dès le premier volume des Annales, relatif au travail de 1845, une part importante est faite à l'exposition des théories atmosphériques. En 1846, 1847 et 1848, un nombre toujours croissant de navires est occupé aux observations des vents, des courants, du baromètre et du thermomètre. De 1849 à 1861, le corps entier de la Marine est employé à ce travail d'ensemble. On sait, du reste, quels ont été les admirables résultats de ces gigantesques recherches, et l'astronome le plus détaché des choses de la terre ne saurait se plaindre de voir consacrées à cet objet unique toutes les ressources d'un grand établissement scientifique. Les travaux d'Astronomie pure ne sont pas cependant absolument interrompus. C'est ainsi que Ferguson découvre trois planètes, Euphrosyne, Virginie et Écho, tandis que le professeur Yarnall construit un Catalogue de 10 000 étoiles. Ce Catalogue est actuellement sous presse.

Le successeur de Maury fut le lieutenant Gillis, l'un des fondateurs de l'Observatoire. Gillis reprit les idées qui avaient présidé à l'origine des travaux. Dans l'introduction du volume relatif à 1861, il donne le détail des observations arriérées, et il prend les mesures nécessaires pour en effectuer promptement la réduction et la publication. Ce même volume contient en supplément une discussion de Newcomb qui fixe la longitude de Washington à $5^h 8^m 11^s,6$ O. de Greenwich, ainsi que des dessins représentant la comète II, 1862, à sa phase la plus brillante, et la planète Mars à son opposition.

On trouve dans le volume suivant une recherche de la parallaxe solaire par les oppositions de Mars, et de nouveaux éléments de Némausa. Le volume est complété par un ensemble de 11 000 observations de toute nature, parmi lesquelles on remarque des mesures différentielles de 39 étoiles des Pléiades.

Gillis mourut subitement le 9 février 1865, le jour même où l'on obtenait à Washington la parallaxe solaire par la comparaison des observations simultanées faites à 2000 lieues de distance, au Chili et aux États-Unis, dans les deux Observatoires dont il était le principal auteur. Il avait, depuis deux ans, insisté fortement sur la nécessité de réformer les instruments trop faibles de l'Observatoire ; sur 75 petites planètes alors connues, les trois quarts étaient pour eux hors de portée. Aussi Gillis avait-il demandé et obtenu un cercle méridien beaucoup plus puissant que les anciennes lunettes. Ce cercle ne fut installé qu'après sa mort, par son successeur, le contre-amiral Davis.

Pendant les deux années de sa direction, de 1865 à 1867, Davis s'occupa surtout de la réduction des observations météorologiques faites depuis 1842, et des travaux de nivellement nécessaires pour les plans du canal ou des chemins de fer interocéaniques. Le volume qu'il publia en 1865 contient en outre une recherche de la distance du Soleil.

Depuis le 8 mai 1867, la direction de l'Observatoire est confiée au contre-amiral Sands qui, continuant les efforts de ses prédécesseurs, en a fait un des premiers Observatoires du monde. Le cercle méridien dont nous venons de parler a été installé dans une nouvelle salle d'observation dont les parois, de fer étamé d'un pouce d'épaisseur, sont protégées des rayons du Soleil par une légère armature de bois, d'où résulte une grande égalité de température. Bien d'autres perfectionnements ont été introduits dans l'outillage ancien; mais le progrès de beaucoup le plus considérable a été la construction d'un réfracteur de 26 pouces anglais d'ouverture, le plus puissant peut-être des instruments astronomiques connus. Ce télescope, objet d'un crédit de 50000 dollars, indépendamment d'une tour et d'un dôme appropriés à son usage, a été construit par M. Alvan Clarck. Il est à monture équatoriale allemande, marchant à l'aide d'un mouvement d'horlogerie, très-facile à mouvoir, et conservant néanmoins un équilibre parfait dans toutes les positions; il est armé de cercles divisés, lus chacun par deux microscopes, à la seconde pour les mesures d'ascension droite, au $\frac{1}{10}$ de minute d'arc pour celles de déclinaison; il est muni, en outre, d'un grand nombre d'oculaires et de cercles micrométriques, d'un micromètre filaire, d'un micromètre à double image d'Airy et d'un spectroscope. L'objectif, terminé en 1872, paraît excellent.

En même temps que l'Observatoire augmente ses richesses en instruments et en livres, ses Annales prennent une importance croissante. Dans les volumes publiés de 1867 à 1871, on trouve, indépendamment du travail régulier d'observation et de la construction des Catalogues, un grand nombre de déterminations de longitudes, une étude de la pluie météorique du 14 novembre 1867, une discussion du cyclone des 29 et 30 octobre de la même année, un travail de M. Hall sur les étoiles de la Crèche, le commencement de la révision des Tables de la Lune par M. Newcomb, avec une nouvelle méthode pour le calcul des perturbations produites par les planètes, un grand nombre d'observations d'astéroïdes et de comètes, des calculs d'orbites, une série de mesures relatives au Compagnon de Sirius, etc., etc.

En outre, les astronomes prennent une part de plus en plus active aux expéditions lointaines qui se sont multipliées dans ces dernières années. Lors de l'éclipse totale de Soleil du 7 août 1869, ils se rendent les uns dans l'Iowa, les autres dans le Tennessee. L'année suivante, le 22 décembre 1870, des commissions viennent observer une nouvelle éclipse totale visible en Europe. M. Newcomb s'installe près de Gibraltar, tandis que MM. Hall, Harkness et Eastman choisissent la station de Syracuse. Ce sont ces expéditions américaines qui, les premières, ont constaté la présence de trois raies brillantes dans le spectre de la couronne et établi par là la réalité de ce phénomène; on sait que cette observation a été plus tard confirmée par M. Janssen. Enfin, grâce à la libéralité du Congrès qui comprend de plus en plus l'importance des études scientifiques, un crédit de 150000 dollars est affecté à l'observation du passage de Vénus, et l'on décide, en 1872, l'organisation de huit stations qui doivent surtout employer les procédés photographiques. On choisit, au nord, le Japon, la Chine et les îles voisines; au sud, la Nouvelle-Zélande, les îles Chatam, la Tasmanie et peut-être Kerguelen. Chaque station doit se composer d'un astronome, d'un adjoint et de plusieurs aides photographes.

On voit, d'après ce résumé historique, que, parti des plus humbles origines et se développant peu à peu, grâce à la persévérance de ses directeurs et à l'esprit de plus en plus libéral des législatures américaines, l'Observatoire de Washington marche aujourd'hui de pair avec les plus grands Observatoires de l'ancien continent.

G. L.

GÜNTHER (Dr Siegmund), Privatdocent am Königl. Polytechnikum zu München — Lehrbuch der Determinanten-Theorie für Studirende. — Erlangen, 1875, Ed. Besold. 1 vol. in-8°, VIII-237 p.

En Allemagne, comme en Italie, en Angleterre et en France, divers Ouvrages ont été consacrés à la théorie des déterminants. Parmi ces derniers, l'un des plus récents vient d'être publié par M. le Dr S. Günther sous le titre que nous venons d'indiquer.

Il se divise en neuf Chapitres, dont nous allons donner l'analyse.

Chapitre I. — Ce Chapitre, un des plus importants, renferme l'*aperçu historique* des progrès de cette théorie. Nous ne pouvons en présenter ici qu'un résumé rapide, attendu que dans les Chapitres suivants de nombreux articles sont encore consacrés à cet intéressant sujet.

1. Invention de l'Algèbre par Viète. Première application de l'Algèbre. Première conception d'une notation symbolique venue à l'esprit de Leibnitz.
2. Débuts de Leibnitz dans cette voie. Remarque de Leibnitz sur l'harmonie des symboles. Règle de résolution d'un système d'équations linéaires. Discussion entre Leibnitz et le marquis de l'Hospital.
3. Recherches de Cramer. Notation proposée. Sa méthode pour trois équations linéaires, étendue à un nombre n quelconque. Recherches d'Euler sur les fractions continues. Notation spéciale.
4. Recherches de Bézout sur le problème de l'élimination, proposé par Euler, et sur le degré de l'équation finale (1764).

5. Première notation des déterminants, due à Vandermonde (1771), permettant de formuler la décomposition d'un déterminant d'ordre n en n déterminants d'ordre $(n-1)$, affectés alternativement du signe $+$ et du signe $-$. Résolution, à l'aide des mêmes symboles, des systèmes linéaires. — Le problème de jeu d'échecs, connu sous le nom de *Course du cavalier*, a donné à Vandermonde l'idée d'un déterminant cubique.
6. Recherches de Laplace (1772).
7. Caractères spécifiques des méthodes de Laplace et de Lagrange.
8. Recherches des analystes allemands (Hindenburg, Rothe, Hauber).
9. Notation de Gauss.
10. Travaux de Cauchy. Mention des travaux les plus récents.

Chapitre II. — *Propriétés générales des déterminants.*

1. Définition des déterminants. Exemples.
2. Transformations des indices qui laissent les déterminants invariables.
3. Remplacement de deux éléments l'un par l'autre.
4. Permutation de deux lignes ou colonnes.
5. Principes de la théorie des *déterminants mineurs.*
6. Règle générale des indices pour les permutations de lignes.
7. Multiplication d'un déterminant par un autre. Notation.
8. Décomposition d'un déterminant en une somme algébrique.
9. Proposition de Studnička : un déterminant est identiquement nul, lorsque le rapport des différences des éléments correspondants de deux groupes de deux lignes ou colonnes est constant.
10. Expression numérique d'un déterminant au moyen de ses éléments.
11. Solution du problème suivant, déjà étudié par Gauss et divers mathématiciens : sur un échiquier donné, composé de 64 cases, placer 8 reines de manière qu'aucune ne soit en prise par les sept autres.
12. Premier sous-déterminant, ou déterminant partiel. Déterminant mineur.
13, 14, 15. Exposé de la théorie des déterminants partiels d'ordre supérieur.
16. Développement d'un déterminant au moyen des éléments d'une diagonale, de la forme $a_{ii}+x$, en polynôme ordonné suivant les puissances de x.
17. Proposition de Jacobi sur la décomposition générale d'un déterminant.
18. Théorème de Laplace.
19. Application.
20. Multiplication de deux déterminants. Règle de Cauchy : le produit de deux déterminants de même degré est un déterminant du même degré.
21. Application à un exemple.
22. Généralisation de la règle de Cauchy. Règle de Jacobi.
23, 24. Différentielle d'un déterminant.
25. Définition de la matrice d'un déterminant.

CHAPITRE III. — *Étude de déterminants d'une forme particulière.*

1. Cauchy, le premier, a remarqué la forme symbolique de déterminant pour exprimer le *produit des différences,* autrement dit, le *terme connu de l'équation aux différences.*
2. Développement de cette théorie, d'après Baltzer et Nägelsbach.
3. Notion du *déterminant adjoint.*
4. Expression de ses *mineurs,* formulée par Borchardt.
5. Exemple à l'appui.
6, 7. Formation et application des déterminants symétriques.
8, 9. *Déterminant orthosymétrique.* Règles de formation.
10. Expression d'un certain déterminant orthosymétrique formé avec les coefficients du binôme.
11. *Déterminants doublement orthosymétriques.*
12. *Déterminant symétral à diagonale creuse* (Zehfuss, Bessel, Baltzer). Cette fonction a été appelée *déterminant gauche symétrique* par les Français, *determinante gobbo* par les Italiens. Démonstration de Stern.
13. *Demi-déterminant*, fonction de Pfaff. Cas particulier.
14. *Déterminant symétral à diagonale pleine.*

CHAPITRE IV. — *Déterminants cubiques.*

1. Première notion des *déterminants cubiques,* attribués à Vandermonde. Recherches de Somof, de Zehfuss et des savants italiens.
2. Méthode de calcul des membres isolés.
3. Transformations qui modifient les déterminants cubiques ou qui les laissent invariables. Propriétés analogues à celles des déterminants ordinaires.
4. Déterminants mineurs cubiques.
5. Leur décomposition en sommes de déterminants cubiques.
6. Analogue du théorème de Laplace.
7. Généralités sur les déterminants d'ordre supérieur. — Cette partie de l'Algèbre supérieure a été étudiée et, pour ainsi dire, fondée par Zehfuss.

CHAPITRE V. — *Problème de l'élimination.*

1. Déterminant d'un système (Jacobi).
2, 3. Discussion des cas d'indétermination et d'impossibilité des équations générales. Condition de coexistence des équations homogènes.
4. Solution donnée par Hankel, au moyen de la méthode de Leibnitz et de Cramer, à une question sur le calcul des quantités complexes proposée par Gauss.
5. Élégante méthode de Nägelsbach pour le calcul des nombres de Bernoulli, le nombre B_{2h-1} est le quotient d'un déterminant par $3.5.7\ldots(2h+1).2^{2h-1}$.

6. Recherches de Fürstenau sur la résolution des équations du degré supérieur.
7. Suites récurrentes. Définition et caractère de ces suites. Méthode de Lieblein.
8. Méthode de Fiedler pour exprimer, sous forme de déterminant, la somme des puissances semblables des racines d'une équation.
9. Notion et définition du *discriminant*.
10. *Méthode dialytique* de Sylvester pour l'élimination d'une même inconnue entre deux équations algébriques quelconques de degrés m et n. Application à deux exemples.

11, 12. Élimination entre plus de deux équations. Exemples. Détermination des racines imaginaires.

13. Élimination entre deux équations de même degré. Application au cinquième degré.
14. Exposé de la méthode d'élimination de m inconnues entre m équations dont une est quadratique, les $(m-1)$ autres étant linéaires, problème traité et résolu par Versluys. La résultante est du degré $(2m-1)$. — Gundelfinger a, dernièrement, résolu la question pour deux équations quadratiques et $(m-2)$ équations linéaires.

CHAPITRE VI. — *Déterminants des fractions.*

1. La possibilité de la représentation des fractions continues sous forme de quotient de deux déterminants paraît avoir été remarquée d'abord par Ramus; puis Spottiswoode et Heine y furent aussi conduits. Ce même sujet vient d'être repris par Thiele et G. Bauer.
2. Formation du numérateur et du dénominateur.
3. Détermination du nombre de termes du numérateur et du dénominateur. Application.
4. Proposition fondamentale sur les fractions continues. Démonstration par les déterminants.
5. Cas particuliers.
6. Fractions continues à termes périodiques.
7. Transformation d'un rapport de déterminant en fraction continue.
8. Conversion d'une série en fractions continues. Exemple.
9. Autre exemple tiré de Nachreiner.
10. Fractions continues ascendantes. — Bien que déjà découvertes par l'Arabe Al Kasadi et connues aussi du plus grand mathématicien du moyen âge, Léonard Fibonaci, elles sont restées entièrement inaperçues jusque dans ces derniers temps. Druckenmüller, Heis, Kunze, et tout récemment Lembkes, ont entrepris des recherches à ce sujet.

CHAPITRE VII. — *Applications géométriques.*

1, 2. Surface d'un triangle rectiligne en fonction des coordonnées des sommets ou des longueurs des côtés.

3. Volume du tétraèdre en fonction des coordonnées des sommets.

4. Détermination des axes principaux d'une surface du second ordre. Méthode de Bauer (*voir* Salmon, *Alg. sup.*, p. 29). Réalité des racines de l'équation en S (notation française).

5. Intersection d'une conique par une droite. Condition de tangence. (Voir *Nouv. Ann.*, 2e série, t. VIII, p. 106.)

CHAPITRE VIII. — *Déterminants fonctionnels.*

1. Définition du *déterminant fonctionnel* ou *jacobien*.
2. Applications.
3. Cas des fonctions implicites et des fonctions composées.
4. Transformation d'une intégrale multiple. Applications diverses. Attraction d'une sphère sur un point intérieur.
5. Méthode de Baltzer pour établir la formule de Gauss $\frac{\Delta'}{\Delta}$, qui indique la *mesure de courbure* d'une surface en un point M.
6. Emploi des déterminants fonctionnels dans la Géométrie à n dimensions.
7. Définition du hessien.
8. Son expression pour les fonctions homogènes.
9. Sa signification géométrique. Application.
10. Emploi du hessien dans la recherche de la courbure d'une surface. Définition de la surface de Hesse ou hessienne. Application aux surfaces développables.

CHAPITRE IX. — *Substitutions linéaires.*

1. Principe des substitutions. Définition du *module*. Application à trois équations de plans.
2. *Substitutions orthogonales*. *Déterminant unimodulaire* de Sylvester.
3. Conception et définition des *invariants* et des *covariants* d'après Clebsch.
4. Applications. Exemples d'invariant et de covariant. Définition du covariant simultané (Cayley et Gordan).
5. Théorie des formes bilinéaires de Weierstrass.
6. Application aux lignes complexes et aux coordonnées plückériennes.

En résumé, l'Ouvrage du Dr Günther se distingue, comme on le voit, par le grand nombre et la variété des applications nouvelles et toutes récentes des déterminants.

Tout en conservant la forme de précis à l'usage des étudiants, il sera susceptible encore de quelques développements, surtout en ce qui concerne l'application des déterminants aux formes algébriques, question traitée plus en détail, dans les Leçons de G. Salmon, que la théorie des déterminants eux-mêmes.

Il serait très-désirable, de toute manière, que l'Ouvrage du Dr Günther, plus à portée des commençants, fût, comme ceux de Baltzer et de G. Salmon, traduit dans notre langue. Une aussi utile publication ne manquerait pas d'être accueillie avec la plus grande faveur. H. B.

HOEFER (F.). — Histoire des Mathématiques, depuis leurs origines jusqu'au commencement du xix^e siècle. — Paris, Hachette, 1874. 1 vol. grand in-8°, 602 p. Prix : 4 fr.

Le *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques* a pris pour tâche de signaler à ses lecteurs les livres qui peuvent rendre des services à la Science, et il a généralement gardé le silence sur les ouvrages auxquels il n'aurait eu que des critiques à adresser. Nous croyons cependant devoir nous départir aujourd'hui de cette réserve à propos d'une publication dont l'auteur, connu depuis longtemps par de nombreux et utiles travaux d'histoire scientifique, et plus à portée que la plupart de nos compatriotes de consulter les documents parus à l'étranger, se présente en invoquant le patronage d'un nom vénéré du monde savant, et faisant admettre son Livre dans une Collection historique qui renferme tant d'excellents volumes. Joignons à cela l'accueil favorable que ce Livre a trouvé dans des recueils périodiques estimés et répandus, et par-dessus tout le manque absolu, en France, d'ouvrages élémentaires récents sur l'histoire des Mathématiques. Toutes ces circonstances réunies, en favorisant dans notre pays la diffusion de cet Ouvrage, en font presque un livre dangereux, à cause des graves erreurs qu'il tend à propager dans la partie du public qui n'est pas à portée d'en contrôler les assertions, et à cause aussi de la défaveur qui rejaillirait sur la science française, si le pays des Chasles, des J.-J.-E. Sédillot père, des Th.-H. Martin semblait accepter M. Hoefer comme son représentant actuel dans l'histoire des Sciences exactes.

Lorsque parut, en 1738, la première édition des *Éléments de la Philosophie de Newton*, tout le monde sait quelle fut la fureur de Voltaire contre l'éditeur, qui avait ajouté au titre ces mots : « Mis à la portée de tout le monde. » Il en est, à notre avis, de l'Histoire des Mathématiques comme des théories de la Philosophie naturelle. Pour la lire, comme pour l'écrire, il faut remplir à un certain degré les conditions que Platon imposait, dit-on, à ceux qui sollicitaient l'entrée de son école. Nous ne pouvons donc admettre comme praticable le dessein qu'expose M. Hoefer dans son Avant-propos, « de mettre, par les leçons de l'histoire, les sciences les plus difficiles en apparence à la portée de tous les esprits ». Selon lui, si cela n'a pas été fait plus tôt, la faute en est à la « routine », dont il ne cesse, dans tout le cours de son Livre, de gourmander sévèrement les adhérents. Nous craignons qu'il n'ait quelquefois confondu la routine avec la science sérieuse, celle qui n'a pas de « chemin royal », et quoique l'absence de préjugés lui semble la condition la plus favorable pour saisir le véritable esprit des sciences et les réinventer au besoin, nous persistons à préférer sous ce rapport la bonhomie d'un Ampère à l'astuce d'un chef de tribu sauvage des montagnes Rocheuses.

Dans son Livre I^{er}, intitulé : « Les Origines des Mathématiques », M. Hoefer s'applique surtout à montrer comment les Mathématiques *pourraient* être inventées par tout homme de bon sens, et comment elles *ont dû être* inventées. Il préfère généralement la métaphysique à l'érudition, bien que celle-ci soit pour l'Histoire ce que l'expérience est pour les Sciences physiques.

Le Livre II traite des Mathématiques dans l'antiquité. Nous y relèverons surtout les attaques de l'auteur contre la science des Hindous, qui selon lui n'ont été que des plagiaires et des mystificateurs, dont toute la science ancienne a été dérobée aux Grecs, et qui n'ont eu qu'à traduire en vers sanscrits les formules découvertes par Euler, pour les présenter ensuite aux Européens comme d'antiques produits de la science indienne. C'eussent été, dans tous les cas, des mystificateurs bien pénétrants, pour des gens qui ont abandonné depuis si longtemps la culture des sciences, et dès lors il n'y aurait plus rien d'étonnant à ce que leurs ancêtres, à l'époque de leur activité intellectuelle, eussent fait par eux-mêmes les découvertes qu'on leur attribue. On sait d'ailleurs que de nos jours les Hindous sont le peuple le mieux doué pour le calcul numérique. Il suffit enfin de lire les Notes de l'*Aperçu historique* et les fragments écrits par Hankel pour concevoir de la science indienne une opinion toute différente de celle que M. Hoefer a cru devoir emprunter à M. Sédillot fils.

Le Livre III a pour titre : « Les Mathématiques chez les Grecs ». Une partie considérable de ce Livre est consacrée à Pythagore et à ses idées mystiques sur les nombres. Nous trouvons dans cet exposé quelques faits mêlés à beaucoup de conjectures et à de trop fréquentes inadvertances. Ainsi l'auteur considère les nombres 2, 4, 16 comme formant une *progression géométrique* dont le produit des extrêmes est égal au carré du terme moyen, et il en est de même, selon lui, de la suite $a^0, a^2, a^4, a^8, \ldots, a^{2^n}$. Qu'est-ce que « considérer tous les changements du monde comme les *différentielles* d'une seule et même intégrale »? On a peine à concevoir un pareil langage dans une Histoire des Mathématiques. Nous pourrions remplir des pages entières de citations analogues. Ainsi selon l'auteur (p. 118), « le produit de deux nombres non carrés, ou *non réductibles à des carrés* (?) n'est jamais un carré, *lors même* qu'un des facteurs serait un carré », etc., etc.

C'est surtout à propos de Platon que M. Hoefer se livre tout entier aux considérations métaphysiques. Sous ce rapport, son Ouvrage est peut-être utile aux lecteurs du *Timée*. Seulement l'incorrection habituelle de l'expression rend assez pénible l'étude de cette partie du Livre.

Dans le Livre suivant, l'auteur passe à Euclide et à ses successeurs jusqu'à la fin de l'École d'Alexandrie.

Le Livre V, sous le titre de : « Période de transformation », comprend la fin des écoles grecques et les travaux des Romains et des Arabes, en revenant encore sur les Hindous à propos de l'origine de nos chiffres, quelque bien établie que semble être la solution généralement adoptée de cette question. Il passe ensuite aux auteurs du moyen âge, en oubliant, bien entendu, de parler du plus éminent géomètre français de cette époque, Nicole Oresme, auquel les étrangers ont seuls jusqu'ici rendu justice. Au moment où la voix d'un illustre astronome s'élève au sein de l'Académie des Sciences pour réclamer une place plus large en faveur des savants de notre pays, nous ne saurions trop déplorer cet oubli d'une de nos gloires nationales, dont nos bibliothèques possèdent des manuscrits encore inédits et extrêmement précieux pour l'histoire de la Science et de la langue française.

Le dernier Livre, qui occupe presque la moitié du volume, est consacré aux temps modernes. La partie biographique y est beaucoup plus développée que la partie technique. Celle-ci laisse souvent beaucoup à désirer, témoin le passage suivant relatif aux travaux d'Huyghens sur les développées : « Ces courbes ont des propriétés particulières appréciées par les géomètres. Dans le cercle, la développée est un point, car tous les rayons concourent au centre. Dans l'ellipse, la développée est une courbe à quatre points (*sic*), et qui, malgré la complication de son équation, est parfaitement rectifiable ; elle est égale à quatre fois le demi-paramètre du petit axe... En appliquant le calcul à la développée de la parabole ordinaire, il (Huyghens) trouva que cette développée est une des paraboles cubiques, à savoir celle dont l'équation est $a^2 x = y^3$ (*sic*). »

M. Hoefer a une passion, souvent malheureuse, pour les étymologies. C'est ainsi qu'il fait dériver *lemme* de λέμμα (pellicule), *rhythme* de ἀριθμός, *sanscrit* de *sanctum scriptum*, *Alkharezmi* de Khorassan, etc., etc.

Nous terminerons cette analyse en exprimant le désir de voir bientôt paraître dans notre langue un ouvrage sur l'Histoire des Mathématiques, écrit par un mathématicien avec tout le soin que réclame une tâche aussi difficile, et s'adressant, non à *tout le monde,* mais à ceux qui ont intérêt à connaître cette histoire et que leurs études mettent à même de la comprendre. J. H.

HERPIN (A.), ancien professeur de Mathématiques et de Cosmographie, etc. — DICTIONNAIRE ASTRONOMIQUE, *ou Exposé, par ordre alphabétique, des principes fondamentaux et des lois générales de la Mécanique universelle*, etc., etc. — Paris, J. Baudry, 1875. 1 vol. in-8°, 560 p., 7 pl. Prix : 12 fr.

Nous ne venons pas ici faire l'analyse d'une compilation stérile qui n'a pu exiger, de la part de son auteur, une préparation spéciale aux études astronomiques, ni une connaissance approfondie des formules mathématiques, ni surtout, pour employer ses propres expressions, un « travail pénible, opiniâtre et assidu ».

On ne peut donner le titre de *Dictionnaire astronomique* à un Ouvrage où l'on cherche en vain les mots suivants : collimation, passages, appulse, grossissement, lunette, télescope, catalogue, éphéméride, satellite, inégalités séculaires, alizé, problème de Kepler, sextant, etc.

L'auteur a copié, mot à mot, dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* (année 1871), les pages 60 à 68, 71 à 74, etc., relatives aux grandes marées, à la détermination des hauteurs par les observations barométriques, aux corrections des levers et couchers du Soleil et de la Lune, etc., de sorte que certains tableaux, qui ne conviennent qu'à l'année 1871, se trouvent reproduits dans un Ouvrage édité en 1875!

Il en est de même des articles et tableaux suivants, copiés textuellement dans l'explication et l'usage des éphémérides de la *Connaissance des Temps* pour 1871. Parallaxe horizontale équatoriale de la Lune, coordonnées du Soleil, calcul de l'occultation pour un lieu quelconque, etc.

Nulle part nous n'avons trouvé l'indication de la source de ces extraits beaucoup trop nombreux. Cependant il aurait été juste de dire au moins à quels Recueils avaient été empruntés ces articles, ainsi que les démonstrations et autres formules insérées dans ce Livre.

L'Ouvrage renferme aussi quelques Notices biographiques, mais ces Notices n'ont exigé aucune recherche originale. Il suffit pour s'en convaincre de lire les articles sur Kepler, Cassini, etc. Il n'est pas fait mention des noms célèbres de Römer, d'Anaxagore, de Démocrite, etc., ni de la plupart des astronomes, membres ou correspondants de l'Institut de France.

Les instruments ne sont pas décrits ou le sont à peine. Ainsi, il y a deux lignes pour le chronomètre, six pour le cercle mural, quatre pour l'équatorial, etc. Aucune figure n'accompagne ces descriptions plus que sommaires.

Un livre tel que ce *Dictionnaire astronomique* n'est pas au niveau de la Science, et tout démontre que son auteur n'est rien moins qu'astronome et que mathématicien.

Nous avons tenu, néanmoins, à mettre le public en garde contre quelques-unes de ces productions incolores qui ont la prétention de vulgariser la Science, mais qui ne peuvent que nuire au progrès.

Le *Dictionnaire astronomique* de M. A. Herpin ne saurait même être comparé à aucun des Traités classiques de Cosmographie, de MM. Delaunay, Briot, Garcet, Guilmin, Faye, etc. Ce n'est pas en copiant servilement des pages entières de l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*, de la *Connaissance des Temps*, et d'autres Recueils plus ou moins nombreux, qu'on peut arriver à faire un Livre utile, sérieux et susceptible de rendre de véritables services à la Science.

H. B.