Revue bibliographique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 9 (1875), p. 241-266
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1875__9__241_0>

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

BAEYER (J.-J.). — UEBER DIE GRÖSSE UND FIGUR DER ERDE. EINE DENKSCHRIFT ZUR BEGRÜNDUNG EINER MITTEL-EUROPÄISCHEN GRADMESSUNG. — Berlin, 1861.

GENERAL-BERICHT ÜBER DIE MITTEL-EUROPÄISCHE GRADMESSUNG. Rapports annuels de 1863 à 1873. — Berlin, G. Reimer.

LISTING (J.-B.). — UEBER UNSERE JETZIGE KENNTNISS DER GESTALT UND GRÖSSE DER ERDE. — Göttingen, 1872.

Lorsque les astronomes croyaient la Terre sphérique, la mesure de ses dimensions était un problème fort simple, ne présentant qu'une seule inconnue, le rayon de la sphère. Les anciens avaient sur le moyen de le résoudre des idées très-exactes, et, si les résultats qu'ils nous ont transmis semblent discordants, cela tient très-probablement à l'ignorance où nous sommes sur le sens précis du mot *stade* à diverses époques. La circonférence du globe est en effet, suivant Aristote, de 400 000 stades, et de 10 000 seulement suivant Ptolémée ; les observations des astronomes anciens, quoique bien éloignées de la précision des nôtres, ne les exposaient pas à des divergences aussi considérables, et le stade d'Aristote est sans aucun doute plus court que celui de Ptolémée.

La méthode employée par eux est celle dont on fait encore usage aujourd'hui : après avoir choisi deux stations sur un même méridien et mesuré leur distance, on évalue l'angle des deux verticales, égal évidemment à la différence de leurs inclinaisons sur les lignes parallèles, dirigées de chacune d'elles vers une même étoile ou vers le centre du Soleil au moment de leur passage au méridien commun. Ératosthène, Hipparque et Posidonius dans l'antiquité, les astronomes du calife Almamoun au IX^e siècle de notre ère, le médecin Fernel au XVI^e siècle, Snellius, qui, au XVII^e siècle, exécuta les premières triangulations, ont employé avec des précautions inégales cette méthode, adoptée aussi par Picard lorsqu'il fut chargé en 1668, par l'Académie des Sciences de Paris, de rechercher avec la plus grande exactitude la longueur du rayon terrestre.

Une autre méthode, plus simple en apparence, mais soumise, dans la pratique, à de graves difficultés, a été proposée par Kepler et employée par Riccioli : elle est indépendante de toute mesure astronomique. Si l'on cherche deux stations aussi éloignées que possible et telles cependant que de chacune d'elles on puisse apercevoir l'autre, il semble facile de mesurer les angles formés par la ligne qui les joint avec les verticales de ses deux extrémités ; leur différence est l'angle des deux verticales, et le rapport de cet angle à quatre angles droits est égal à celui de la distance des deux stations à la circonférence de la Terre. Il n'est pas nécessaire que les deux stations soient situées sur le même méridien. Les stations choisies par Riccioli étaient la montagne de Paterno, près de Bologne, et le sommet de la tour de Modène, dont les verticales forment un angle de $18'9'',5$. L'erreur commise, due sans doute à l'influence des réfractions, se trouva d'un dixième environ de la valeur cherchée. La même méthode, employée de nouveau en 1833 entre Strasbourg et Durlach, a indiqué entre les verticales de ces deux stations, distantes de 71058 mètres, un angle de 37 minutes, ce qui fournit, pour le quart de la circonférence de la Terre, 10037000 mètres, au lieu de 10000000, que l'on devrait trouver d'après la définition du mètre.

Newton, dans le livre des *Principes*, en adoptant la mesure de Picard comme la plus exacte et la plus sûre, montrait cependant la nécessité de la compléter par d'autres. Notre globe, en effet, animé d'un mouvement de rotation et liquide en grande partie à la surface, ne saurait conserver la forme d'une sphère ; il doit être enflé à l'équateur, l'équilibre des mers l'exige, et Newton n'a pas craint d'ajouter que l'état primitivement fluide de la croûte solide actuelle a dû le soumettre aux mêmes lois. C'est donc comme conséquence de considérations théoriques, pendant longtemps contestées, il est vrai, sur le continent, que l'aplatissement de la Terre a été pour la première fois annoncé aux astronomes. La détermination de ses éléments devenait un problème de Mécanique fort difficile, et qui, aujourd'hui encore, faute de données suffisantes, semble impossible à résoudre avec certitude.

La solution de Newton assignerait à la Terre la forme d'un ellipsoïde de révolution, et à l'aplatissement, rapport de la différence des axes au plus grand d'entre eux, la valeur $\frac{1}{230}$, qui n'est d'ailleurs proposée par lui que comme une première et douteuse approximation ; car, si la théorie lui permettait d'affirmer l'aplatissement aux pôles, de nombreuses et incertaines hypothèses conduisaient seules à en calculer la grandeur; la loi des densités dans l'intérieur de la Terre joue, en effet, un grand rôle dans la solution, et cette loi doit peut-être rester à jamais inconnue.

Huyghens, peu de temps après Newton, affirmait comme lui, et démontrait par des preuves semblables l'aplatissement de la Terre aux pôles, en lui assignant pour valeur $\frac{1}{579}$ seulement; mais les hypothèses sur lesquelles reposent les calculs n'avaient alors déjà, et ne peuvent avoir, aujourd'hui surtout, aucune vraisemblance; il suppose la pesanteur constante sur tous les points intérieurs de la Terre et aussi grande au centre qu'à la surface, tandis que la force d'attraction, cela est aujourd'hui de toute évidence, doit diminuer, quand la profondeur augmente, et s'annuler au centre.

Les mesures prises en France après l'apparition du livre de Newton semblèrent d'abord infirmer les assertions du grand géomètre. Dans un livre intitulé : *Diatribe de figura telluris elliptico-sphæroide,* et imprimé à Strasbourg en 1691, Eisenschmidt affirme que, d'après l'ensemble des mesures connues, les degrés terrestres diminuent quand on s'avance vers le nord, et que, par conséquent, la Terre est allongée, non aplatie dans le sens de son axe. La conséquence semble évidente; elle fut contestée cependant avec une étrange vivacité. Un compatriote de Newton, Keill, dont le nom est mêlé à l'histoire des discussions sur la découverte du Calcul différentiel, écrivait, en 1698, dans un Ouvrage intitulé : *An examination of Doctor Burnet's theory of the Earth* : « Il faut une stupidité et une inattention prodigieuses pour raisonner comme Eisenschmidt ». Cassini, sous une forme moins tranchante, exprimait, en 1701, une opinion conforme à celle de Keill. « En supposant, » dit-il, « comme il est fort vraisemblable, que la diminution de la valeur terrestre d'un degré continue toujours de l'équateur au pôle et en conservant d'ailleurs les hypothèses communes, on voit d'abord qu'un méridien doit être plus petit que l'équateur, et que, par conséquent, la Terre est un globe aplati vers les pôles. »

Cassini, de même que Keill, se trouve, on le voit, d'accord avec Newton, en interprétant mal des observations inexactes; l'erreur de raisonnement est grossière : il n'est pas inutile peut-être d'en indiquer la cause vraisemblable. La longueur du degré, sur la circonférence d'un cercle, augmente avec le rayon du cercle, et, s'il était vrai que les degrés terrestres fussent, près du pôle, plus courts que dans le voisinage de l'équateur, le rayon de courbure du méridien devrait décroître à partir de l'équateur, et le méridien serait allongé vers le pôle. Si Keill et Cassini ont cru le contraire, c'est qu'ils ont confondu le rayon de courbure du méridien avec le rayon terrestre, distance du point considéré au centre de la Terre. Dans une ellipse par exemple, à l'extrémité du grand axe correspondent le plus petit rayon de courbure et le plus grand rayon vecteur; la confusion entre les deux rayons a causé toute la méprise. L'erreur fut rectifiée, et les adversaires de Newton se crurent en droit de triompher. Les observations cependant laissaient subsister de grandes incertitudes, et l'on pouvait de très-bonne foi soutenir l'une et l'autre thèse : les plus sages restaient dans le doute.

L'Académie des Sciences de Paris, après de longues et confuses discussions, eut l'honneur de trancher la question. La Condamine et Bouguer, envoyés par elle au Pérou en 1735, Clairaut et Maupertuis, chargés de mesurer un degré en Laponie, trouvèrent le degré du nord plus grand que celui de l'équateur; la longueur de 57437 toises trouvée à Torneå, et comparée d'abord au degré mesuré en France et égal seulement à 57060 toises, indiquait un aplatissement égal à $\frac{1}{178}$, supérieur par conséquent à la valeur annoncée par Newton, et presque double de celui que nous adoptons aujourd'hui. Le degré du Pérou fut évalué peu de temps après à 56749 toises, et Bouguer, par la comparaison avec les deux autres, fut conduit à la valeur $\frac{1}{179}$ de l'aplatissement, presque égale à la précédente, et comme elle beaucoup trop grande.

Euler, en 1753, discutant, dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin,* les mesures alors connues, savoir : le degré de France, celui de Laponie, celui du Pérou et enfin celui du Cap de Bonne-Espérance, mesuré par La Caille, les trouvait inconciliables avec la forme d'un ellipsoïde de révolution. En cherchant l'erreur commise sur chacun d'eux et capable d'expliquer cette contradiction, il trouve qu'en augmentant un de ces degrés de 84 toises et diminuant d'autant les deux autres, on mettrait tout d'accord; mais cette erreur de 84 toises ne lui paraît pas admissible pour les degrés mesurés par Bouguer et par La Caille. Il s'arrête alors, sans autre motif que la nécessité de rendre les équations compatibles, à ajouter 15 toises au degré du Pérou, 125 à celui de France, en diminuant celui du Cap et celui de Laponie de 43 toises chacun. L'aplatissement, après ces corrections arbitraires, est $\frac{1}{230}$.

Les premiers travaux de triangulation dans l'Inde avaient donné lieu à des anomalies toutes semblables à celles de la première triangulation française. Les degrés mesurés par le major Lambton, au nord du cap Comorin, semblaient diminuer de longueur à mesure que l'on avançait vers le nord; un arc de 1 degré à la latitude de $11^{\circ}59'54'',5$ ayant été trouvé égal à 110691 mètres, on trouva, à la latitude de $12^{\circ}\,32'9''$, 110653 mètres. L'éminent observateur, en continuant ses études, obtint un troisième degré plus court encore et égal à 110625 mètres, semblant indiquer que la presqu'île de l'Inde appartient à un ellipsoïde allongé vers les pôles.

L'action des montagnes ou celle des couches métallifères, situées au-dessous du sol, peut expliquer en partie ces anomalies, qu'il est impossible d'attribuer uniquement à des erreurs persistantes dans des observations d'ailleurs très-concordantes.

Si la surface de la Terre était, conformément à la théorie de Newton, celle d'un ellipsoïde de révolution, la mesure de deux arcs du méridien suffirait pour en déterminer les dimensions. Ils fourniraient, en effet, deux équations entre les deux inconnues qui sont ici les deux axes du sphéroïde. Mais la Terre n'est pas rigoureusement un ellipsoïde; les montagnes et les vallées qui la couvrent ne peuvent même la laisser représenter, cela est de toute évidence, par aucune forme géométriquement définie. Dans les travaux que nous avons à analyser, ces inégalités locales sont supprimées; chaque point de la surface est supposé pour cela abaissé ou élevé sur sa propre verticale et ramené au niveau de la mer. La surface déterminée ou du moins cherchée par les géodésistes est celle dont chaque point pourrait communiquer avec la mer par un canal sans courant et par conséquent sans pente. C'est en tenant compte de ces nivellements que les degrés terrestres ont été mesurés, et il n'y aurait sans cela aucun parti à en tirer.

La Géodésie, on le voit, faisant abstraction des montagnes et des vallées, étudie une surface conventionnelle, lisse et polie, qui seule peut, avec quelque chance de succès, être assimilée à une figure géométriquement définie. Les montagnes cependant, quoique supprimées dans les résultats, conservent sur eux une influence trèsnotable. Les coordonnées géographiques des points où l'on observe sont, en effet, la base des calculs, et la direction de la verticale en chaque point détermine, comme on sait, la latitude ; or le voisinage d'une haute montagne telle que l'Himalaya, l'existence d'un plateau élevé, tel que celui de l'Asie centrale, exercent une influence très-sensible sur la direction du fil à plomb. La déviation due à l'Himalaya a été évaluée à 28 secondes et, conséquence singulière, mais rigoureusement liée aux définitions, si l'Himalaya était mécaniquement supprimé, enlevé par tombereaux et jeté dans la mer, le sol de la presqu'île de l'Inde restant identiquement ce qu'il est, non-seulement les opérations géodésiques assigneraient une forme différente à cette partie du globe, mais nos définitions mêmes conduiraient à changer la forme de ce terrain où pas un brin d'herbe n'aurait été arraché, pas un édifice renversé. Ce résultat, paradoxal en apparence, cesse de rien présenter d'étrange, si l'on veut bien se rappeler que le globe étudié par les géodésistes est un globe fictif, perpendiculaire en chaque point à la direction de la pesanteur, et fort loin, par conséquent, d'être terminé par la surface réelle du sol.

Dans les travaux sur la forme de la Terre, les astronomes souvent, non contents de supprimer les montagnes et les vallées, s'efforcent de corriger les anomalies qui, dans la direction de la verticale, sont dues, soit à leur attraction, soit à la présence de masses plus denses ou de cavités invisibles, soit enfin quelquefois au voisinage d'une mer profonde dont la densité, inférieure à celle du terrain qui pourrait occuper sa place, altère la direction de la verticale.

L'opportunité de ces corrections est une question très-délicate ; elles sont évidemment une dérogation à la définition très-précise qui a été donnée de la forme théorique du globe.

La surface rigoureusement définie que nous cherchons est, en effet, normale aux verticales, telles qu'elles sont, et non telles qu'elles seraient si l'on apportait tel ou tel changement à la disposition des masses terrestres. Ce que l'on nomme *déviation* de la verticale accuse simplement un changement brusque dans la courbure de la surface ; or, si celle-là est aplatie ou bombée en un point, la détermination de cet accident est un des éléments du problème à résoudre. Le problème nouveau, dans lequel on introduit la condition d'obtenir une surface sans *irrégularités*, ne semble plus susceptible d'une définition précise.

Depuis longtemps en France on a signalé la station d'Evaux (Creuse) comme présentant une de ces anomalies ; la verticale y est inclinée de $7''$, 6 sur la direction qu'elle devrait avoir pour la régularité des opérations. A Cowhyte, en Angleterre, l'écart est de 10 secondes ; entre Milan et Parme, cette déviation s'élève à 20 secondes, et, dans le voisinage de Turin, d'habiles observateurs ne l'ont pas évaluée à moins de 48 secondes. Près de Moscou, une différence de 18 secondes a été signalée entre la direction prévue et la direction observée aux deux extrémités d'un arc de 16 minutes. Mais il importe d'insister sur ce point : ces anomalies appartiennent précisément à la surface du globe ; si, par exemple, dans le voisinage de Moscou, on établissait artificiellement un lac au lieu même où elles se produisent, la verticale conserverait la même direction et n'en serait pas moins perpendiculaire à la surface des eaux tranquilles, qui, par définition, représente celle du globe.

Remarquons qu'en poussant jusqu'à ses dernières limites le principe de correction on serait dispensé de tout calcul et de toute observation. On nomme en effet *anomalie* l'écart entre le résultat trouvé et la variation uniforme et régulière à laquelle on s'attend. Mais où la faire commencer? Où finit la continuité qui, en toute rigueur, n'est jamais rompue? Un géomètre assez habile pour apercevoir d'un coup d'œil, dans les résultats de l'observation, l'écart de la forme elliptique, n'aurait-il pas le droit d'y voir une anomalie et de la corriger? Mais n'est-il pas évident qu'en procédant ainsi pour tous les points de la surface, cette forme elliptique, qu'il cherche et qu'il introduit en faisant disparaître tout ce qui s'en écarte, serait le résultat, comme elle a été le principe, de ses calculs, qu'une conclusion nécessaire et prévue rendrait dès lors sans objet.

Les géodésistes, sans aller à cette extrémité, se contentent de rectifier, quelquefois de supprimer les résultats partiels qui accusent une variation brusque et accidentelle dans la courbure, et, tant qu'ils ont pour but, non de discuter la nature de la surface, mais de trouver le meilleur ellipsoïde possible, ils ont raison de procéder ainsi. Cet ellipsoïde, en effet, est une sorte de moyenne, et, dans l'évaluation d'un résultat moyen, il est de règle d'écarter tous les éléments anomaux.

Dans les travaux publiés en Angleterre par l'*Ordinance Survey*, les corrections sont empruntées à d'autres principes, et la détermination directe de la partie de l'attraction, qui dépend du relief du sol autour de chaque station, sert à faire connaître la correction sans préoccupation de la régularité plus ou moins grande des résultats ainsi obtenus. L'opinion des astronomes paraît consacrer cette méthode nouvelle, malgré les difficultés et les incertitudes qu'elle présente. Dans un Rapport adressé, en 1864, par M. Faye, au Bureau des Longitudes, au nom d'une Commission dont faisaient partie MM. Delaunay et Laugier, les principes de ce nouveau mode de correction sont discutés et complétement approuvés. Le procédé, dit le savant rapporteur, s'applique seulement au relief du sol visible au-dessus de l'horizon de chaque station; il abandonne aux études d'ensemble le soin d'apprécier l'influence des grands écarts géographiques. Les Anglais ont obtenu ainsi, pour un grand nombre de stations, des corrections de 0″,54, 0″,90, 4″,55, 3″,57, 2″,08, 0″,47.

La correction nouvelle n'exclut pas, d'ailleurs, la révision générale des résultats obtenus pour faire disparaître les anomalies, et la valeur plus petite de ces corrections nouvelles est le meilleur argument produit en faveur de l'innovation proposée. Si l'on considère, dit M. Faye, les écarts des latitudes corrigées en neuf stations de la triangulation anglaise, on trouve que la somme des carrés de ces écarts est réduite à 17 secondes, tandis qu'elle irait à 43 secondes, si l'on négligeait la correction des actions locales. Ces corrections toutefois laissent, dans certains cas, subsister des résultats assez fortement anomaux pour que, dans l'intérêt de l'harmonie de l'ensemble, on juge nécessaire de les supprimer. C'est ainsi que la station de Cowhyte a été exclue des calculs, sans que le relief du sol qui l'entoure ait pu expliquer l'anomalie considérable qui s'y produit.

Depuis les célèbres expéditions de La Condamine et de Clairaut, les opérations destinées à fournir plus exactement la forme du globe ont été incessantes chez les peuples civilisés. En Italie, les PP. Maire et Boscovich, dans les États Romains, le P. Beccaria, dans les plaines de Turin, exécutèrent, en 1751 et en 1768, deux triangulations réputées excellentes; en Amérique, Mason et Dixon mesurèrent, en 1764, un arc de 1° 28′ 45″ dans l'État de Pensylvanie, et Reuben Barrow enfin, dans l'Inde, en 1790, mesura un arc méridien de 1° 8′; mais la France, qui, en 1735, avait donné l'impulsion, devait, à la fin du XVIII^e siècle, produire un nouveau travail, dont la perfection ne semble avoir été surpassée que par les plus récents progrès de l'art d'observer. Delambre et Méchain, aidés de Laplace et de Borda, mesurèrent, de 1792 à 1799, le grand arc compris entre Dunkerque et Barcelone, qui, continué par Biot et Arago jusqu'aux îles Baléares, est aujourd'hui encore l'un des éléments importants et classiques dans les recherches qui nous occupent.

La première triangulation fut exécutée en Angleterre par le général Roy, en 1783.

En 1801, Svanberg reprenait en Suède la mesure de l'arc choisi par Maupertuis.

Le major Lambton, dans l'Inde, commençait, en 1802, la mesure de l'arc auquel il a travaillé jusqu'en 1822, et qui, au moment de sa mort, continué sous sa direction par le capitaine Everest, comptait déjà plus de 13 degrés; continué, depuis cette époque, par les soins de la Compagnie des Indes d'abord, et du Gouvernement anglais à partir de 1818, il mesure aujourd'hui une amplitude totale de 22 degrés.

La Prusse, en 1802, avait commencé, sous la direction du baron de Zach, directeur de l'Observatoire de Seeberg, la mesure d'un arc de méridien; les travaux furent continués jusqu'en 1806. Malheureusement, dit M. Baeyer, le grand-duc de Weimar avait fait présent à de Zach de deux canons hors de service pour marquer les extrémités de la base. A la nouvelle de la bataille d'Iéna, Gotha qui, jusque-là, avait obtenu des puissances belligérantes le privilége de la neutralité, craignit que les deux canons, enfoncés verticalement et maçonnés dans la terre, ne fussent considérés par le vainqueur comme un matériel de guerre; on les fit précipitamment enlever : le lieu exact de leur position a disparu, et le travail de de Zach est aujourd'hui sans utilité.

Nous rapportons, sans y rien changer, cette étrange anecdote, qui, racontée par M. J.-J. Baeyer, acquiert cependant un caractère complétement officiel.

L'illustre Gauss acceptait, en 1821, la direction de triangulation du Hanovre, qui fut, pour lui, l'occasion de ses admirables travaux sur la théorie des surfaces courbes et de l'invention de l'appareil nommé *héliotrope,* le meilleur et le plus simple des signaux géodésiques. Son ami Schumacher continuait les travaux dans le royaume de Danemark et dans le Holstein.

Soldner et Schwerd en Bavière, Littrow et Carlini en Autriche, l'illustre Bessel dans la Prusse orientale, Plana en Sardaigne, Hansteen en Suède, et le général Nerenbayer en Belgique, poursuivirent presque sans relâche, de 1820 à 1850, la grande œuvre de la triangulation européenne.

La Russie, qui, après un essai resté sans résultat en 1737, avait négligé les travaux géodésiques, les reprenait en 1817 pour ne plus les interrompre. L'arc russe, aujourd'hui, compte $25°20'$ d'amplitude, et treize stations, astronomiquement déterminées avec la plus grande précision. Il n'en existe pas d'aussi considérable à la surface du globe.

Tous ces travaux, très-dignes de confiance, préparaient de grandes difficultés aux théoriciens. Regardant, en effet, la Terre comme un ellipsoïde, il suffisait de 2 degrés mesurés à des latitudes différentes pour en déterminer les dimensions, et l'abondance des données permettait de varier à l'infini les calculs en conduisant à des résultats très-différents. Le colonel Everest, par exemple, à l'occasion de la mesure du grand arc indien, dont la longueur totale est de 22 degrés, a réuni les résultats partiels les plus dignes de confiance, et, les associant deux à deux de manière à former quarante-deux groupes, a trouvé des aplatissements qui varient entre $\frac{1}{192}$ et $\frac{1}{390}$. Schubert, en combinant l'arc prussien avec une partie de l'arc russe, a trouvé un aplatissement égal à $\frac{1}{1450}$, tandis que l'arc anglais, combiné avec le même arc russe, donne $\frac{1}{116}$.

Les astronomes qui, depuis les travaux de Delambre, ont recommencé à plusieurs reprises le travail d'ensemble, sont parvenus cependant à des conclusions presque identiques. Loin de chercher dans des combinaisons isolées des résultats anomaux, ils s'attachent, au contraire, à fondre dans une moyenne tous les résultats connus, en écartant même, au besoin, comme accidentellement inexacts, ceux qui s'écartent notablement du résultat probable.

Delambre avait trouvé en 1800 :

Pour le rayon polaire.............	6355564m
Pour celui de l'équateur..........	6371653

La différence était 19083 mètres et l'aplatissement $\frac{1}{331}$.

Ces chiffres étaient déduits de l'arc français et de l'arc du Pérou. Les travaux exécutés en Espagne par Biot et Arago avaient réduit l'aplatissement à $\frac{1}{308}$; l'astronome suédois Walbeck, en tenant compte des mesures de France, du Pérou et de Laponie, et y adjoignant l'arc mesuré dans l'Inde à cette époque, proposait une correction nouvelle en élevant l'aplatissement à $\frac{1}{302}$; il ajoutait 1243 mètres au rayon polaire et en retranchait, au contraire, 731 à celui de l'équateur.

M. Airy, neuf ans après, en 1830, trouvait :

Pour le rayon polaire............	6356184^{m}
Pour le rayon de l'équateur.......	6377490

ajoutant ainsi 594 mètres au rayon polaire de Walbeck et 351 à celui de l'équateur; l'aplatissement était réduit à $\frac{1}{299}$.

Bessel, enfin, en 1837, s'attachant, comme Airy, à représenter le mieux possible toutes les mesures dignes de confiance, obtenait pour aplatissement $\frac{1}{300,70}$; mais Puissant ayant signalé, quelques années plus tard, en 1840, une erreur de calcul dans la triangulation française, et ajouté par là 67 toises à la distance de Montjoui à Mola, Bessel reprit les calculs, et obtint, pour les deux axes de la Terre, les valeurs suivantes :

Rayon polaire..................	6356078,96
Rayon de l'équateur...........	6377397,16

Il retranchait ainsi 93 mètres seulement au rayon polaire proposé par Airy et 105 à celui de l'équateur.

De telles corrections, quand il s'agit de résultats approchés, sont absolument sans importance, et Encke a pu écrire avec grande vraisemblance qu'aucun changement notable ne sera désormais apporté à ces chiffres; aucun ellipsoïde de révolution ne sera préférable à ceux de Bessel et d'Airy.

Examinons, pour apprécier l'importance des différences proposées, à quelle erreur dans les mesures primitives peut correspondre un accroissement de 1000 mètres pour l'un des axes de la Terre. Supposons, par exemple, que, l'équateur restant le même, on accroisse de 1000 mètres le rayon polaire, et admettons que des observateurs, opérant avec une exactitude parfaite, exécutent sur les deux surfaces les observations géodésiques et astronomiques qui doivent en déterminer les dimensions; il faudra, sur chacuue d'elles, mesurer un arc d'un degré, et cette mesure, d'après nos hypothèses, faite avec une exactitude absolue, accusera dans les latitudes moyennes une différence de 25 mètres environ entre les longueurs qui correspondent aux deux surfaces. 25 mètres sur 25 lieues, telle est l'erreur qui, commise sur l'un des sphéroïdes, aura pour résultat de le faire confondre avec l'autre! En supposant les bases exactement mesurées, l'erreur pourrait résulter d'une seconde en plus ou en moins attribuée à la latitude de l'une des extrémités de l'arc.

Il est bien difficile, même aujourd'hui, de compter sur une telle exactitude.

La précision des mesures astronomiques a toujours été en augmentant.

Ptolémée divisait le degré en six parties seulement, et l'incertitude commençait pour lui avec les angles inférieurs à dix minutes.

Tycho, le plus exact et le plus habile des astronomes de son temps, osait répondre d'une demi-minute, c'est-à-dire de 30 secondes.

Cassini, cent ans après lui, donnait les résultats de ses observations à une minute près seulement.

Picard, en appliquant, en 1669, les lunettes aux observations d'angles, augmenta singulièrement l'exactitude des mesures et leur précision : la latitude de l'Observatoire de Paris a été trouvée par lui de 48°50′10″; Lalande, en 1770, adoptait 48°50′12″; Bouvard, en 1815, 48°50′16″; on s'est arrêté, d'après les mesures de Laugier, à 48°50′11″,8.

Flamsteed, en 1690, attribuait à l'Observatoire de Greenwich une latitude de 52°28′30″; on la trouve aujourd'hui de 52°28′40″.

Arago enfin, en 1808, après avoir pris les plus minutieuses précautions, trouvait pour latitude de Formentera 38°59′56″,02, et Biot, cependant, en 1827, corrigeant par 1060 observations nouvelles le résultat des 4000 observations d'Arago, trouvait 38°59′53″,17, constatant ainsi une erreur de 3 secondes.

Il serait téméraire, on le voit, de considérer comme certaines les valeurs obtenues dans lesquelles figurent des secondes et des fractions de seconde.

Les résultats acceptés par les astronomes sont choisis, d'ailleurs, non de manière à satisfaire rigoureusement aux observations, mais à amoindrir le plus possible la somme des carrés des erreurs. La discussion des observations du pendule à diverses latitudes confirme d'une manière remarquable le chiffre trouvé par les mesures géodésiques pour l'aplatissement de la Terre. La longueur du pendule qui bat la seconde dépend, en chaque point, de l'intensité de la pesanteur, et, par conséquent, de la répartition des masses à la surface et dans l'intérieur du globe. Clairaut, en supposant la Terre formée de couches elliptiques homogènes, a découvert une relation très-simple entre l'aplatissement et les intensités de la pesanteur à l'équateur et au pôle, et a montré qu'entre ces points extrêmes l'intensité doit varier proportionnellement au carré du sinus de la latitude. Le général Sabine, dans un Ouvrage publié en 1825, a vérifié l'accord de cette loi avec de nombreuses observations. Un pendule battant la seconde à Greenwich, et faisant par conséquent 86400 oscillations en vingt-quatre heures, doit, d'après le théorème de Clairaut, et en supposant l'aplatissement égal à $\frac{1}{288}$, en faire 86263 à l'équateur : l'observation donne 86269. Voici quelques-uns des résultats recueillis par le général Sabine :

	Nombre calculé.	Nombre observé.
Jamaïque.......	86284,8	86285,12
New-York......	86358,66	86357,73
Altona........ ..	86417,02	86417,89
Drontheim......	86442,24	86438,77
Spitzberg.......	86479,90	86483,01

L'accord est certainement des plus satisfaisants et semble, au premier abord, un argument bien considérable en faveur de l'hypothèse de Clairaut et de la forme ellipsoïdale. Un examen plus attentif cependant peut, en partie au moins, ébranler cette confiance, et la petitesse des différences observées, réunie à l'accord des diverses évaluations de l'aplatissement, ne prouve nullement que les méridiens aient réellement la forme elliptique. La méthode des moindres carrés, appliquée en effet à l'ensemble des mesures, ne peut donner qu'une sorte de moyenne, qui doit varier d'autant moins que le nombre des observations augmente davantage et qu'elles sont réparties d'une manière plus variée sur les diverses régions du globe. L'accord des observations du pendule avec la théorie n'est pas plus décisive en faveur de l'hypothèse sur laquelle celle-ci est fondée, et qui consiste à admettre pour la Terre la forme d'un ellipsoïde de révolution formé de couches homogènes ellipsoïdales. La forme des couches, que Clairaut, dans ses démonstrations, suppose elliptiques, est sans influence aucune sur le résultat, et le théorème reste exact, quelle que soit la distribution intérieure, pourvu que la surface, telle que nous l'avons définie, reste la même. La démonstration est facile aujourd'hui, grâce au progrès de la théorie du potentiel, et l'on peut s'étonner que de très-habiles géomètres l'aient rattachée à de longs calculs. La surface de la Terre, telle que nous l'avons définie, coupe en chaque point, à angle droit, la direction du fil à plomb. Il en résulte que le potentiel, relatif à la pesanteur, dans lequel nous comprenons le terme dû à la force centrifuge, est constant à la surface de l'ellipsoïde. Or cette seule condition suffit pour le déterminer pour tous les points extérieurs. Si deux distributions différentes de matière donnent lieu à une même surface de niveau ellipsoïdale, les potentiels, à l'intérieur, pourront être très-différents; ils seront identiques, à l'extérieur, et la pesanteur suivra les mêmes lois, identiquement dans les deux cas, soit à la surface, soit pour les points extérieurs. L'étude des oscillations du pendule ne peut donc rien apprendre sur la variation de la densité à l'intérieur du globe.

La forme de la surface extérieure détermine seule la loi de la pesanteur; en la trouvant en accord presque parfait avec celle qui convient à une surface ellipsoïdale, on est conduit à adopter comme certaine la figure ellipsoïdale proposée par Delambre, Bessel et Airy, dont l'aplatissement diffère peu de $\frac{1}{300}$; mais les écarts qui subsistent, quoique très-petits, sont supérieurs aux erreurs possibles d'observation, et les attractions locales dues à des variations de densité dans le voisinage de la surface contribuent, pour une part inconnue, avec les irrégularités de la forme générale de celle-ci, aux anomalies observées.

Les résultats et les discussions qui précèdent établissent suffisamment que la forme exacte de la Terre n'est pas celle d'un ellipsoïde de révolution, et qu'en cherchant à la représenter par une telle surface il n'est pas possible d'espérer une approximation plus grande que celle qui résulte des travaux de Bessel et d'Airy.

Les limites entre lesquelles ont varié jusqu'ici les évaluations proposées ne peuvent guère faire supposer qu'un changement de quelque importance puisse résulter des recherches ultérieures. M. Listing, en rapportant les éléments successivement proposés, y a joint le tableau des erreurs qui en résulteraient pour le mètre étalon, si on le considère, conformément à la définition primitive, comme la dix-millionième partie du quart du méridien.

		Difference entre le mètre etalon et la dix-millionième partie du quart du meridien.
		mm
1800	Delambre	0,0000
1810	Delambre	0,0268
1819	Walbeck	0,0268
1830	Schmidt	0,0661
1830	Airy	0,0976
1841	Bessel	0,0856
1856	Clarke	0,1620
1861	Clarke	0,1984
1863	Clarke	0,1902
1863	Prult	0,1924
1867	Fischer	0,1714

Le mètre étalon est trop petit; cela semble résulter avec évidence du tableau précédent, et la correction qu'il faudrait lui faire subir paraît comprise entre $\frac{1}{10}$ et $\frac{2}{10}$ de millimètre. Il est bien entendu, d'ailleurs, que l'on ne pourrait pas, sans les plus graves inconvénients, effectuer cette correction, qui devrait alors être indéfiniment renouvelée à chaque nouveau progrès des opérations géodésiques.

L'ellipsoïde de révolution ne pouvant donner qu'une approximation, on a cherché si d'autres surfaces pourraient représenter avec plus d'exactitude la totalité des observations. Les officiers anglais attachés, sous la direction du colonel James, aux travaux de l'*Ordinance Survey*, ont cherché à représenter les observations par une surface de révolution d'une nature fort compliquée, et définie par une relation entre le rayon de courbure de la méridienne et la latitude du point correspondant. En déterminant le mieux possible les coefficients restés indéterminés dans la formule, on est arrivé à représenter toutes les observations (sauf un petit nombre correspondant à des stations anomales) avec une erreur moyenne de $2'',064$, l'erreur correspondant à la forme elliptique ayant pour valeur moyenne $2'',098$. On voit que le changement proposé complique les résultats sans en accroître notablement l'exactitude.

Des travaux plus nombreux ont été entrepris pour substituer à l'ellipsoïde de révolution un ellipsoïde à trois axes inégaux. Cette surface, Jacobi l'a montré, est une des formes possibles d'équilibre pour un fluide homogène tournant uniformément autour d'un axe; mais, comme les densités terrestres sont fort inégales et qu'à aucune époque, sans doute, il n'en a été autrement, cette élégante remarque n'a pu exercer aucune influence sur le choix de la surface préférée sans doute à toutes les autres à cause de sa simplicité. En l'adoptant, toutefois, on accroît la complication du problème, et le nombre des inconnues se trouve doublé. Quoiqu'un ellipsoïde, en effet, soit déterminé par ses trois axes, il faut encore, pour définir celui qui doit représenter la Terre, trouver sur quels méridiens sont placés les sommets de l'ellipse qui remplace l'équateur. En même temps que le nombre des équations, s'accroît la complication de chacune d'elles; bornons-nous à remarquer que, dans cette hypothèse nouvelle, les méridiens ne sont plus des lignes planes. La méridienne, en effet, à la surface de la Terre, est une courbe dont la tangente en chaque point est la projection de l'axe du monde sur le plan horizontal; elle est donc l'intersection de la surface du globe par un cylindre assujetti à lui être normal en chaque point, et dont les génératrices sont parallèles à la ligne des pôles, c'est-à-dire à l'un des axes de l'ellipsoïde. La base d'un tel cylindre sur le plan de l'équateur est une courbe parabolique dont l'équation est de la forme

$$y = Cx^m.$$

La constante m, qui se réduit à l'unité dans le cas de l'ellipsoïde de révolution, en diffère fort peu dans le cas qui nous occupe. Les méridiens, on le voit par cette équation, se réunissent tous au pôle; mais, circonstance singulière, au lieu de s'y couper sous des angles proportionnels aux arcs qui séparent leurs traces sur l'équateur, ils y sont tous tangents à la même section principale, à l'exception, toutefois, de l'un d'entre eux qui coïncide avec l'autre section. Leur courbure est, d'ailleurs, infinie en ce point, et ils se séparent rapidement pour suivre de très-près les intersections de la surface avec les plans passant par l'axe.

M. Schubert, en appliquant la méthode des moindres carrés, a cherché à accorder l'hypothèse d'un ellipsoïde à trois axes inégaux avec l'ensemble des observations connues. Huit arcs ont servi de base à ses calculs, et il a trouvé pour axes :

$$6378555^{\text{m}},$$
$$6377837,$$
$$6356719,$$

le plus petit étant, bien entendu, dirigé vers le pôle. Le plus grand des deux axes équatoriaux correspond au méridien qui passe par Arkhangel et par la mer Rouge ; le plus petit, au méridien qui traverse la mer du Japon et coupe la Nouvelle-Hollande par le milieu. La différence de 718 mètres entre les deux axes est tellement petite, qu'il est difficile d'y attacher une importance sérieuse.

Le capitaine Clarke, en 1860, reprenant les calculs avec des données plus nombreuses, trouvait pour les trois axes :

$$6378375^{\text{m}},$$
$$6376916,$$
$$6356171,$$

le méridien qui passe par le grand axe de l'équateur étant, suivant lui, celui de Copenhague. Six ans plus tard, enfin, par une discussion nouvelle avec exclusion de certaines stations anomales, le colonel Clarke trouvait entre les deux axes de l'équateur une différence de 1946 mètres, dix fois moindre environ que l'excès de chacun d'eux sur l'axe polaire. Une si petite inégalité est tellement près de se confondre avec les erreurs possibles d'observation, que les astronomes n'y ont accordé aucune confiance, et les savants auteurs des travaux qui y ont conduit ont eux-mêmes renoncé à les introduire dans leurs recherches ultérieures.

Nous pouvons, dès à présent, regarder comme certain que la Terre, étudiée avec l'exactitude minutieuse que comportent les instruments et les méthodes actuelles, ne peut être rigoureusement assimilée ni à un ellipsoïde de révolution ni à un ellipsoïde à trois axes inégaux, et il faut renoncer, pour les études ultérieures, à ce système de moyennes qui atténue et masque les écarts de la loi régulière : ce sont eux qu'il faut aujourd'hui signaler et mettre en relief.

La surface de la Terre est-elle de révolution? C'est par l'étude des parallèles bien plus encore que par celle des méridiens qu'on doit résoudre une telle question. Si la surface, telle que nous l'avons définie, est de révolution, à des différences égales de longitude correspondent, sur un même parallèle, des longueurs égales, et la pesanteur doit, en tous les points de ce parallèle, conserver une valeur constante.

La première mesure d'un arc de parallèle a été entreprise, en 1734, sur le parallèle de Paris, par Cassini et Maraldi.

En 1740, Cassini, de Thury et La Caille mesuraient un arc de près de 2 degrés entre Saint-Clair, près de Cette, et le mont Sainte-Victoire, dans le voisinage d'Aix.

Les résultats de ces premiers essais présentent de telles irrégularités, qu'on a dû les écarter dans les études ultérieures.

La première mesure digne de confiance, dans le sens des parallèles, est celle d'un arc du 45^e parallèle, qui, traversant la France à partir de l'embouchure de la Gironde, passe près de Turin et de Milan pour se terminer à Fiume.

L'un des résultats saillants de ce grand travail est la constatation d'une différence de $49'',55$ entre l'azimut calculé et l'azimut observé du signal placé sur le mont Cenis, indiquant dans ces régions une déviation considérable de la verticale et une grande inégalité dans la figure de la Terre. Entre Turin et Milan se produit une autre anomalie, et la différence des longitudes surpasse de 30 secondes celle qui correspondrait à une figure régulière du globe. En partageant l'arc compris entre Marennes et Padoue en six parties, correspondant à des différences égales de longitude, leurs longueurs, au lieu d'être égales, comme il le faudrait, sur une surface de révolution, varient entre 77792 mètres qui est le plus petit, et 77985 mètres.

Un second arc de parallèle a été mesuré entre Brest, Paris et Strasbourg; mais les déterminations astronomiques, au jugement de Puissant, méritent peu de confiance; elles ont été reprises, il y a une dizaine d'années et étendues vers Munich et vers Vienne, en employant, pour la détermination des différences de longitude, la méthode plus précise et plus sûre des signaux télégraphiques.

En Angleterre, l'arc compris entre Greenwich et la station de Valentia en Irlande a été mesuré par M. Airy.

Mais le plus considérable des travaux entrepris dans cette voie est, jusqu'ici, la mesure du parallèle russe exécutée sous la direction de M. Struve, et qui a donné lieu au premier projet d'une union des Gouvernements européens pour l'accomplissement d'un travail d'ensemble. Une chaîne non interrompue de triangles, disait à l'Académie le maréchal Vaillant, le jour où M. Struve présentait son grand travail, existe aujourd'hui depuis le bord de l'océan Atlantique jusqu'au rivage de la mer Caspienne, de Brest jusqu'à Astrakhan, traversant la France, la Belgique, la Prusse et la Russie. Il importe qu'on utilise cette chaîne pour le calcul d'un arc de parallèle qui n'embrassera pas moins de 55 degrés en longitude.

Telle était, en effet, l'entreprise pour laquelle M. Struve avait mission de réclamer le concours du Gouvernement français.

Ces grands travaux sont aujourd'hui en voie d'exécution, et une association permanente des astronomes européens qui, au moment où nous écrivons ces lignes, tient à Dresde sa douzième réunion, s'assemble chaque année pour discuter les méthodes et l'ordre des opérations à entreprendre, en confiant à une Commission permanente le soin de centraliser les résultats pour préparer le travail d'ensemble.

La publication, très-importante pour l'avenir de la Science, régulièrement faite par la Commission centrale, a pour titre : *General-Bericht über die mittel-europäische Gradmessung*. Les fascicules se succèdent sans interruption depuis 1863; celui de 1873, qui est le onzième, a été récemment publié.

De tels documents sont peu susceptibles d'analyse : nous nous bornerons à en indiquer le cadre uniformément adopté.

Les Rapports adressés par les représentants de chaque nation sont reproduits dans leurs traits principaux et réunis par ordre alphabétique. Dans chaque fascicule se trouvent les résumés envoyés par le duché de Bade, la Bavière, la Belgique, le Danemark, la France, le Hanovre, la Hesse-Cassel, la Hesse-Darmstadt, l'Italie, le Mecklembourg, les Pays-Bas, la Prusse, l'Autriche, la Pologne, la Russie, la Suède et la Norvége, la Suisse, le Wurtemberg, et depuis 1866 enfin, l'Espagne et le Portugal.

La négligence ou les empêchements d'un ou de plusieurs correspondants ne retardent jamais la publication : leur travail est renvoyé à l'année suivante.

La France, représentée pour la première fois cette année dans les réunions annuelles, n'est pas restée en dehors de l'œuvre commune. On lit dans le Rapport de 1863 :

« *France.* — Le Gouvernement français, reconnaissant l'importance scientifique de la mesure des degrés européens (*mittel-europäische Gradmessung*), a ordonné une opération grandiose qui doit s'étendre sur la France entière. La direction en est confiée à l'illustre auteur de la découverte de Neptune, directeur de l'Observatoire de Paris. La triangulation française est terminée, et M. Le Verrier se propose de déterminer de nouveau très-exactement les différences de longitude par l'emploi du télégraphe électrique, en s'occupant particulièrement des stations capitales (*Haupt-Stationen*) de Marennes, Clermont-Ferrand et le mont Cenis, situées sur le parallèle moyen. »

Dans les Rapports de 1864 et de 1865, la Commission se plaint de n'avoir reçu aucune Communication de la France et regrette particulièrement l'interruption des travaux commencés pour la détermination des différences de longitude entre Paris, Vienne et Dresde. En 1866, faute de documents directement envoyés au comité, la Commission centrale a reproduit, par extrait, un compte rendu publié par M. Villarceau sur l'histoire des travaux géodésiques en France. C'est par l'envoi de ces publications que le Bureau central est également informé, en 1868, des travaux accomplis en France.

Le colonel Ibañez, membre de l'Académie des Sciences de Madrid et délégué de l'Espagne, a communiqué, le 9 avril 1866, un Mémoire écrit en français, et l'on peut voir que la science, au delà des Pyrénées, est loin d'être aussi délaissée qu'on s'est plu trop souvent à le répéter :

« Le grand canevas, dont les sommets sont actuellement marqués sur le terrain, se compose », dit M. Ibañez, « de neuf chaînes de triangles dont quatre prennent la direction des méridiens de Salamanque, de Madrid, de Pampelune et de Lérida; trois autres s'étendent dans le sens des parallèles de Palencia, de Madrid et de Badajoz; enfin les deux dernières suivent le littoral. Sur l'une de celles-ci s'appuient les triangles qui doivent relier les îles Baléares au continent. Cette triangulation se rattache à celle du Portugal et aux triangles français des Pyrénées et de la méridienne de Dunkerque; mais, un grand nombre de points de cette méridienne sur le territoire espagnol ayant malheureusement disparu, on est obligé de reprendre ce travail depuis la frontière jusqu'à l'île de Formentera, et l'on est dans l'intention d'y apporter les soins les plus minutieux; le nombre des sommets est de près de deux cent quatre-vingts; les observations définitives sont déjà faites à cent soixante stations, sans compter soixante-dix autres stations choisies dans l'intérieur des quadrilatères formés par les chaînes principales et dans l'île de Mayorque. L'Observatoire de Madrid a déterminé les longitudes et les latitudes de dix-sept capitales de province dont la position est également rattachée aux sommets des grands triangles, ainsi que l'azimut d'un des côtés. »

Un nouveau Rapport adressé en 1869 montre le progrès de l'opération et la persévérance de l'Espagne dans son concours à l'œuvre commune. Les résultats des calculs y sont comparés à la mesure directe de cinq côtés, et la petitesse des différences montre à la fois l'habileté des observateurs et la perfection des instruments. Les plus importants d'entre eux, et notamment l'appareil à mesurer les bases, sont construits à Paris par Brunner; les théodolites, construits par Ertel, donnent la seconde exacte. Les observations, au moment où ce Rapport était adressé (1869), étaient terminées en deux cent-deux stations.

Un nouveau Rapport des délégués espagnols rend compte des travaux exécutés en 1870, 1871 et 1872. Dans le courant de l'année 1871, on avait terminé les observations pour vingt-cinq stations de premier ordre, mais les observateurs étaient encore sur le terrain, et l'on pouvait compter, avant la fin de la campagne, sur une dizaine de stations nouvelles. Le Rapport de 1871 apprend, en effet, que le nombre des stations terminées en 1871 s'élève à trente-sept; treize nouvelles l'ont été en 1872. Les calculs ont été terminés pour soixante-seize stations; une double ligne de nivellements de précision a été établie entre Alicante et Madrid, sur une longueur de 529 kilomètres; elle comprend trente repères permanents en bronze et quatre cent cinquante secondaires, y compris les petits embranchements qui la relient à plusieurs sommets géodésiques.

La somme employée pour les travaux géodésiques en Espagne a été de 150 000 francs, et un crédit de 230 000 francs a été accordé par l'Assemblée nationale pour les travaux de l'année 1873.

Le Rapport de 1873 n'est malheureusement pas parvenu au Congrès, et l'on n'en comprend que trop les causes probables.

L'Italie, de même que l'Espagne et plus activement encore, apporte chaque année un contingent abondant de documents précis exactement discutés et calculés.

La science italienne, en 1863, venait de perdre deux de ses représentants les plus illustres, Carlini et Plana, et le premier Rapport de l'Association rappelle en quelques lignes les services rendus par ces deux vétérans de la Géodésie.

Dès l'année suivante, en 1864, le colonel Ricci adressait à la Conférence internationale un Rapport détaillé sur les travaux de Géodésie exécutés en Italie, et l'éminent directeur de l'Observatoire de Milan, M. Schiaparelli, trace le programme de ceux qui devront servir à la mesure de trois arcs de méridien et de trois arcs de parallèle. Chaque Rapport, depuis cette époque, contient le compte rendu des travaux accomplis dans l'année précédente; celui de 1871 donne le réseau complet des triangles qui couvrent la Sicile et les provinces méridionales de la Péninsule avec jonction à l'île de Lissa, par laquelle le réseau se joindra aisément à celui de la Dalmatie.

On voit, par le Rapport de 1873, que l'activité des savant italiens ne s'est nullement ralentie, et leurs travaux devront, dans le cours de 1874, se relier, par la mesure d'une base commune près d'Udine, à celui des États autrichiens.

Il serait superflu d'indiquer successivement la part de chaque nation dans l'œuvre commune; toutes semblent tenir à honneur d'y apporter leur contingent, et la France, nous le savons, sans avoir, jusqu'ici, envoyé de Rapports, accumule des matériaux dont le nombre, aussi bien que l'exactitude, ne laisseront subsister aucun reproche.

L'Europe entière, d'ici à peu d'années, sera donc recouverte par un réseau continu de triangles dont les mesures géodésiques, reliant les sommets, font connaître directement tous les angles. La mesure directe d'un grand nombre de bases permet de calculer, en se réservant de nombreuses vérifications, les coordonnées géographiques de chaque station, en contrôlant, par des mesures directes, celles que fournit le calcul, quand on suppose à la Terre la forme d'un ellipsoïde de révolution.

Ces calculs sont fort compliqués, et la Géodésie, poussée à ce degré de rigueur et de précision, exige l'intervention de la science la plus élevée.

Lorsqu'on veut étudier un terrain de quelques hectares, les formules employées sont celles de la Trigonométrie rectiligne; la courbure de la Terre étant négligeable, les problèmes à résoudre sont élémentaires et comparativement très-faciles. Dans les triangulations qui s'étendent à l'ensemble d'une contrée, la courbure de la Terre transforme les triangles rectilignes en triangles sphériques, mais les formules sont simplifiées par cette circonstance que les côtés sont tous de petites fractions de la circonférence. Quoique les rayons visuels qui réunissent les sommets soient rectilignes, il faut bien remarquer que le triangle sphérique est réellement celui que l'on considère et qu'il faut calculer. Et d'abord, la mesure de la base, par laquelle doit commencer toute opération géodésique, donne évidemment la ligne la plus courte entre les deux stations choisies, c'est-à-dire un grand cercle, si l'on veut considérer la Terre comme sphérique. Lorsqu'on vient ensuite à mesurer les angles, supposons trois stations A, B, C; lorsqu'on se place en A pour viser B et C successivement, l'angle que l'on mesure n'est pas celui des deux lignes droites AB et AC, mais celui des deux plans verticaux passant par ces deux lignes et par la verticale en A: c'est ce qu'on nomme l'*angle réduit à l'horizon;* or ces deux plans sont ceux des grands cercles AB, AC, et leur angle est celui du triangle sphérique BAC.

Lorsque, poussant plus loin l'approximation, on veut introduire l'hypothèse d'une surface ellipsoïdale, les triangles considérés à la surface du globe peuvent être considérés, sans erreur appréciable, comme formés par les lignes géodésiques, c'est-à-dire par les lignes de longueur minimum réunissant leurs sommets. Les lignes ne sont pas planes et ne se confondent pas, par conséquent, avec les intersections de la surface par un plan vertical. L'angle du triangle diffère donc, si l'on veut parler en toute rigueur, de l'angle réduit à l'horizon fourni par le théodolite; mais la différence est trop petite pour que, malgré l'extrême précision des observations, il soit utile d'en tenir compte. Considérons en effet à la surface de la Terre un triangle ABC formé par trois lignes *géodésiques,* c'est-à-dire par les lignes les plus courtes qui, sur la surface de l'ellipsoïde, puissent réunir les points ABC. Les côtés de ce triangle ont en chaque point, d'après un théorème bien connu, leur plan osculateur normal à la surface de la Terre et par conséquent vertical. Les deux plans dont l'inclinaison mesure rigoureusement l'angle en A sont donc les plans osculateurs des lignes AB, AC, en leur point d'intersection A; or, à l'un de ces plans, nous substituons le plan vertical qui passe par la ligne AB et qui en diffère nécessairement, car le plan osculateur en A, tangent à la courbe AB, s'en éloigne à partir du point de contact A et ne peut la couper en un second point B; mais, d'après un théorème connu, la distance de ce point B au plan osculateur en A est du *troisième ordre,* c'est-à-dire proportionnelle au cube de l'arc AB; si l'on désigne cet arc par σ, par ρ son rayon de courbure, et par r le rayon de torsion ou de seconde courbure, évidemment très-grand dans le cas actuel, l'angle est mesuré par $\frac{\sigma^2}{6r\rho}$.

ρ diffère peu du rayon de la Terre, le calcul de r serait long et difficile; mais nous pouvons aisément trouver son ordre de grandeur; la courbure $\frac{1}{r}$ est nulle, en effet, quand l'ellipsoïde devient une sphère, puisque les lignes géodésiques sont planes; son expression générale doit donc contenir l'aplatissement en facteur, et l'on peut représenter r par $300\,\alpha\rho$, α désignant un nombre inconnu dont nous n'avons aucune raison pour supposer la valeur très-petite. Or, en prenant pour σ vingt-cinq lieues, on trouve que $\frac{\sigma^2}{6.300\rho^2}$ représente environ trois centièmes de seconde : tel est l'ordre de l'erreur commise.

Les promoteurs de la grande triangulation européenne n'ont pas manqué d'étudier cette cause d'erreur. Désireux de pousser l'exactitude jusqu'aux dernières limites, ils ont laborieusement cherché l'expression de ces petites corrections. Gauss, le premier, dans ses recherches de haute Géodésie, avait calculé les coordonnées de l'extrémité d'un arc géodésique dont la direction est connue ainsi que le point de départ, et Jacobi, dans trois articles des *Astronomische Nachrichten*, avait élégamment appliqué à ce problème la théorie des fonctions elliptiques. Hansen et M. Baeyer, dans ces derniers temps, ont repris la question au point de vue surtout des applications pratiques à la surface de la Terre, et leurs solutions, quoique fort différentes, ont donné lieu à de vives discussions de priorité, sur lesquelles nous n'avons pas à insister.

Quel sera, dans l'avenir, le résultat de tant d'efforts? D'excellentes observations, systématiquement ordonnées et choisies de manière à se contrôler les unes les autres, seront pour les géomètres un moyen assuré de juger avec certitude toute théorie proposée sur la figure du globe : mais le temps est loin encore, cela semble bien probable, où la loi des anomalies et des irrégularités nous sera revélée. Si la surface n'est soumise, en toute rigueur, à aucune loi géométrique, il resterait, après avoir déterminé la forme approchée, à assigner, pour chaque point, la distance à l'ellipsoïde moyen qui représente le mieux l'ensemble des observations. On doit aussi, en chaque point de la surface, rechercher la direction des lignes de plus grande et de moindre courbure et la grandeur des deux rayons. Les mesures géodésiques pourront conduire un jour à de telles déterminations; mais, si nombreuses et si exactes qu'elles soient, elles laisseront aux géomètres un problème des plus difficiles, qui certainement aujourd'hui dépasse de bien loin les ressources de la Science, et nous pouvons, après soixante ans de travaux incessants et dignes des plus grands éloges, répéter les paroles que Delambre écrivait en 1806 : « Les deux questions de la grandeur et de la » figure de la Terre, qui exercent depuis longtemps les astronomes » et les géomètres, paraissent de nature à n'être jamais épuisées. ».

J. Bertrand [1].

[1] Article extrait du *Journal des Savants* (novembre 1874).

RENSHAW (S.-A.) — THE CONE AND ITS SECTIONS TREATED GEOMETRICALLY. — London, 1875. 1 vol. in-4°, 148 p., 110 fig.

L'auteur s'est proposé d'écrire un Ouvrage élémentaire sur les sections coniques, en revenant à la marche suivie par Apollonius, qui déduit leurs propriétés de leur génération comme sections du cône scalène. L'exposition est purement géométrique; mais M. Renshaw ne se borne pas à reproduire les propositions connues des anciens : il a fait entrer dans son Traité les théories ajoutées par les modernes, autant qu'elles se prêtent à l'emploi des procédés élémentaires de la Géométrie. Ainsi l'Ouvrage se termine par des Chapitres sur la quadrature des sections coniques, sur leur courbure, sur le rapport anharmonique et ses applications aux sections coniques, etc. Chaque Chapitre est suivi d'un recueil de questions proposées comme exercices.

M. Renshaw a fait, dans son livre, un usage très-important des propriétés du *cercle générateur* ou *auxiliaire*, défini par la construction suivante : Soient XX' la directrice d'une section conique, F son foyer, A son sommet; d'un point quelconque S du plan, comme centre, on décrit un cercle dont le rayon soit à la distance de S à XX', comme la distance du sommet A au foyer F est à la distance du même sommet à XX'. Ce cercle sera le cercle générateur. « La liaison de ce cercle avec les sections coniques », dit Walker dans son *Traité des Coniques*, publié en 1794, « est si intime que les démonstrations se réduisent souvent à transporter aux coniques les diverses propriétés de ce cercle. »

L'exécution typographique de l'Ouvrage contribue beaucoup à en faciliter la lecture. Les nombreuses figures qu'il renferme ont été exécutées en se préoccupant plutôt de la clarté que de l'élégance du dessin. Les unes sont intercalées dans le texte, les autres sont distribuées dans vingt-deux planches à la fin du volume.

Nous croyons devoir recommander ce Traité comme pouvant rendre de grands services dans l'enseignement synthétique de la théorie des courbes du second ordre.