Bulletin des sciences

mathématiques et astronomiques

Revue des publications périodiques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 9 (1875), p. 199-240

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1875__9__199_0>

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES (1).

T. LXXXI; 1875, 2e semestre (suite).

N° 8. Séance du 23 août 1875.

Le Verrier. — *Comparaison de la théorie de Saturne avec les observations. Masse de Jupiter. Tables du mouvement de Saturne.*

« J'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie les théories analytiques des quatre planètes supérieures : Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune.

» Elles devaient être comparées aux observations, comme l'ont été antérieurement les théories des quatre planètes inférieures : Mercure, Vénus, la Terre et Mars.

» Le travail a été effectué pour Jupiter : j'ai rendu compte à l'Académie du résultat, dans la séance du 12 janvier 1874.

» Les observations de Jupiter faites pendant cent vingt ans, soit à Greenwich, soit à Paris, se sont trouvées représentées avec toute l'exactitude désirable : d'où l'on conclut que Jupiter n'est soumis à aucune action sensible autre que celles qui résultent des planètes connues.

» Le travail correspondant concernant la planète Saturne, que je présente aujourd'hui à l'Académie, a offert quelques légères difficultés de plus.

» N'en exagérons pas l'importance. Pendant les trente-deux années des observations modernes, de 1837 à 1869, l'écart entre la théorie et le calcul reste au-dessous de $2'',5$ d'arc (moins de $0^s,2$ dans les temps des passages observés au méridien), à l'exception des deux années 1839 et 1844, où les écarts atteignent $4'',5$ d'arc ($0^s,3$ sur les temps des passages).

» Dans les observations anciennes seulement, aux temps de

(1) Voir *Bulletin*, t. IX, p. 149.

Maskelyne et de Bradley, on rencontre quelques écarts un peu plus forts.

» Eût-on pu négliger ces minimes quantités? Nous avons pensé que l'Académie verrait avec satisfaction que ses astronomes apportent en ces matières difficiles la plus grande rigueur, et nous avons fait tous nos efforts pour y jeter quelque lumière.

» Dès qu'un écart est signalé entre la théorie et l'observation, quelque faible qu'il soit, la question se pose de savoir s'il vient d'un état incomplet de l'Analyse ou d'une erreur dans l'observation elle-même.

» Lorsque nous dûmes signaler, il y a déjà un grand nombre d'années, le désaccord de la théorie et des observations de Mercure, ces dernières, consistant en des passages de Mercure sur le Soleil, étaient fort exactes, et l'on ne pouvait douter que les variations inexpliquées n'affectassent la planète elle-même. Elles disparaissaient toutes en admettant un mouvement un peu plus rapide du périhélie, explicable par l'action d'une matière cosmique ou par l'action de petits astres plus voisins du Soleil que la planète, astres dont des passages sur le disque du Soleil ont été aperçus par divers astronomes, sans qu'on ait jusqu'ici réussi à les coordonner.

» Mars, à son tour, offrit dans son mouvement des anomalies qu'on faisait aussi disparaître par l'accroissement du mouvement du périhélie, accroissement indispensable, d'où nous pûmes conclure dès lors la nécessité d'augmenter la masse de la Terre, et par conséquent la parallaxe du Soleil.

» La question qui se soulève peut-être aujourd'hui à l'égard de Saturne est délicate, en raison même de la petitesse des écarts, qui rendent beaucoup plus difficile de prononcer sur leur cause.

» Avant tout, était-il possible d'affirmer que, dans la théorie analytique du mouvement de Saturne, théorie compliquée, il n'aurait pas pu se glisser quelque incertitude dans l'un des termes, si nombreux?

» A plusieurs reprises, nous avons fait la vérification de l'ensemble des expressions et, de plus, nous avons comparé tous leurs termes à ceux de la théorie de Jupiter, auxquels ils se relient par des rapports qu'on peut établir.

» Nous ne sommes arrivé ainsi qu'à reconnaître que le nombre de combinaisons de termes qu'il faudrait considérer en toute rigueur dans le second ordre est presque illimité et que beaucoup de très-petits termes du même genre, loin de se détruire les uns les autres, s'ajoutent. On trouve, dans le second ordre, des termes assez sensibles allant jusqu'au septième degré.

» Par là nous avons été conduit à penser que, pour mettre la théorie hors de cause, il conviendrait de considérer la théorie analytique comme une première approximation déjà fort exacte et permettant de recourir aux méthodes d'interpolation, pour obtenir par un seul calcul l'expression complète de chacun des coefficients des séries, en ayant à la fois égard aux termes des différents ordres et des divers degrés.

» Déjà, à l'origine des travaux relatifs à Jupiter et Saturne, nous avions eu l'intention de suivre cette méthode, ainsi que nous l'avons dit dans le Chapitre XVIII; mais nous y avions renoncé, en raison de son extrême complication.

» La nécessité nous y ramenait impérieusement aujourd'hui. Le travail a été effectué et il a pris successivement assez d'étendue pour constituer une seconde théorie de la planète, dans laquelle nous estimons qu'il ne peut rester aucune incertitude.

» J'ai l'honneur de présenter à l'Académie ce travail, dans l'exécution duquel j'ai été puissamment aidé par mon collègue, M. Gaillot. Il sera sans doute nécessaire d'en effectuer la publication avec détails, dans l'intérêt des astronomes qui voudront continuer ces difficiles recherches.

» C'est donc en nous fondant sur une théorie dont l'exactitude n'est pas douteuse que nous avons effectué la comparaison suivante entre le calcul et les observations à notre époque. La comparaison est établie pour deux hypothèses différentes, faites sur la valeur de la masse de Jupiter : dans le premier cas, cette masse est supposée égale à $\frac{1}{1050}$; dans le second cas, à $\frac{1}{1046,77}$, nombre donné par Airy dans les *Mémoires de la Société Astronomique,* tome X, à la suite de ses recherches sur les élongations du quatrième satellite de Jupiter.

	Longitudes héliocentriques de Saturne (calcul—observation). Masse de ♃.		Latitudes héliocentriques de Saturne (calcul—observation).
	$\frac{1}{1050}$	$\frac{1}{1046,77}$	
1837............	+1″,1	+0″,1	+1″,2
1838............	+5,2	+4,2	+0,0
1839............	+5,3	+4,4	+0,3
1840............	+3,5	+2,5	−0,5
1841-42.........	+1,3	+0,7	−0,1
1843-44.........	−4,6	−5,0	+0,5
1845-46.........	−2,1	−2,4	+1,2
1847............	+0,4	+1,5	−1,0
1848-49.........	−0,9	−1,1	−0,3
1850-51.........	−1,9	−2,3	−0,2
1852-53.........	−1,5	−1,7	+0,3
1854............	+0,7	+0,5	−0,1
1855-56.........	+2,7	+2,7	+0,9
1858-60.........	+2,5	+2,8	0,0
1861............	−1,2	−0,9	−0,3
1862............	−1,2	−1,1	0,0
1864............	−0,3	−0,2	0,0
1865............	−0,9	−0,6	−0,1
1866............	−1,9	−1,3	−0,8
1867............	−2,5	−1,5	−0,3
1868............	−2,2	−0,9	−1,3
1869............	−1,6	−0,1	−1,7

Anciennes observations.

1752,7..........	+6″,6	+7″,9	−1″,2
1755,6..........	+7,3	+8,0	−0,8
1758,0..........	+6,8	+7,0	+0,2
1761,0..........	+3,9	+3,8	+2,4
1769,0..........	−9,3	−9,5	−0,8
1774,7..........	−2,3	−2,9	−2,7
1782,6..........	+2,3	+1,1	−6,6
1788,8..........	−4,8	−6,4	+0,1
1792,1..........	−7,2	−8,9	−1,0
1797,0..........	−1,7	−2,7	−1,2
1804,2..........	−0,3	−0,1	+0,1

	Longitudes héliocentriques de Saturne (calcul—observation). Masse de ♃.		Latitudes héliocentriques de Saturne (calcul—observation).
	$\frac{1}{1050}$	$\frac{1}{1046,77}$	
1810,4	$-2'',1$	$-1'',1$	$+2'',7$
1813,7	+2,5	+3,5	+0,1
1818,9	+4,9	+6,0	−1,2
1822,1	+0,7	+1,5	+0,6
1825,9	−7,3	−7,0	+1,6

» Le tableau que nous venons de donner est uniquement basé sur les observations de Greenwich, seul observatoire où les séries s'étendent sans interruption pendant cent vingt ans, depuis 1751 jusqu'à 1869.

» On a d'ailleurs considéré aussi les observations effectuées à Paris depuis 1837 jusqu'en 1867. Les résultats ne diffèrent pas de ceux de Greenwich, ainsi qu'on peut s'en assurer par le tableau suivant des comparaisons faites entre les séries des deux observatoires.

Excès de la longitude héliocentrique de Saturne déduite des observations de Paris sur la longitude héliocentrique déduite des observations de Greenwich.

1837	$0'',0$	1851	$+0'',8$
1838	+0,2	1852	+2,1
1839	0,0	1853	−0,9
1840	+0,5	1854	+1,4
1841	+0,5	1856	+0,7
1842	−2,0	1858	+0,9
1843	+1,7	1859	+1,6
1844	+0,4	1860	−0,4
1845	−1,2	1861	−1,1
1846	+0,3	1862	−0,4
1847	0,0	1863	−0,1
1848	−0,9	1865	+0,2
1849	+0,5	1866	+0,6
1850	+0,1	1867	−0,2

» L'Académie constatera avec satisfaction la concordance des séries des deux observatoires, vérification qui s'applique également aux observations faites du temps d'Arago et aux observations faites à notre époque. Elle rassurera, au sujet de la précision du rôle de la France en ces matières difficiles, ceux de nos confrères qui ont pu avoir connaissance de tentatives regrettables faites dans le but de déprécier les travaux de notre pays.

» On voit, ainsi que nous l'avons dit, qu'on ne rencontre point d'écart sérieux entre la théorie et l'observation de 1846 à 1869.

» Il n'y aurait d'inquiétant dans les observations nouvelles que le passage assez brusque, en cinq ans, d'un écart de $+4'',4$ en 1839, à un écart de $-5'',0$ en 1844, variation de $9'',9$ en cinq ans, suivant les observations de Greenwich, de $9'',5$, suivant les observations de Paris.

» Les soins donnés à la théorie ne permettent pas de l'en rendre responsable; et d'ailleurs on ne voit pas quels termes ou quel groupe de termes pourraient ainsi troubler rapidement le mouvement en cinq ans, à une époque donnée, tout en respectant la régularité du mouvement pendant les vingt-cinq ans qui ont suivi.

» Nous sommes porté à conclure que l'écart constaté tient non à la théorie, mais aux observations elles-mêmes.

» Mais s'agit-il d'un mouvement réel du centre de gravité de la planète ou s'agit-il d'erreurs dans les observations?

» Nous écartons, comme de droit, tout effet qui serait dû à la présence des satellites.

» Reste la présence de l'anneau, qui ne peut non plus sans doute troubler le mouvement du centre de gravité de la planète, mais qui pourrait influer sur l'exactitude de l'observation?

» W. Struve et son fils, notre éminent confrère, M. Otto Struve, ont constaté une excentricité de l'anneau dont la loi nous est inconnue.

» En mettant encore cette cause de côté, il reste l'influence que les différents aspects de l'anneau doivent avoir sur l'exactitude des observations, suivant que, disparaissant complétement, il laisse voir la planète sous la forme d'un disque entier, ou bien que, se présentant dans sa forme évasée, il couvre de son ombre une partie variable du disque de la planète, laisse voir l'anneau obscur, permettant d'ailleurs quelquefois d'observer les deux bords de l'astre, et dans d'autres circonstances n'en laissant voir qu'un seul.

» Toutes ces circonstances si variées n'ont-elles pas dû apporter dans l'observation des temps des passages de la planète au méridien et produire sur les équations personnelles aux observateurs des perturbations qui, assez notables dans les observations anciennes, comme on en a déjà des exemples pour d'autres planètes, sont allées en diminuant à mesure que le système des observations s'est plus perfectionné, et particulièrement de nos jours.

» L'Académie sait que j'ai profité dernièrement de la présence de M. Struve pour lui demander avis sur ce sujet épineux.

» M. Struve, parti pour Leyde, m'écrit qu'il a mis la question en discussion dans le congrès astronomique qui s'y réunissait. Il va revenir à Paris et reprendra la parole.

» Quoi qu'il en soit, les Tables du mouvement de Saturne, fondées sur la comparaison de la théorie avec les observations, sont prêtes aujourd'hui. Elles vont être imprimées pour être mises à la disposition des astronomes.

» Nous demandons la permission de renvoyer à la prochaine séance ce que nous avons à dire au sujet de la masse de Jupiter, le sujet étant délicat et demandant quelques explications particulières. »

Chasles (M.). — *Théorèmes dans lesquels entre une condition d'égalité de deux segments rectilignes.*

§ II. — On considère trois courbes d'ordre et de classe quelconques.

« X *a*. *Le lieu d'un point x pris sur la tangente d'un point θ d'une courbe* U^n, *et dont la distance à un point* P *est égale à la distance du point θ à un point* O, *est une courbe de l'ordre* $2(m+n)$.

» X *b*. *Le lieu d'un point x d'où l'on mène à deux courbes* U^n, $U^{n''}$ *deux tangentes, dont la seconde est égale à la distance du point de contact de la première à un point* O, *est une courbe de l'ordre* $2(mn''+nm''+nn'')$.

» X *c*. *Le lieu d'un point x pris sur la tangente d'un point θ d'une courbe* U^n, *et dont la distance à un point* O *est égale à une tangente $\theta\theta'$ menée du point θ à une autre courbe* $U^{n'}$, *est une courbe d'ordre* $2(mm'+mn'+nn')$.

» X *d*. *Le lieu d'un point x d'où l'on mène à deux courbes* U^n, $U^{n'}$ *deux tangentes $x\theta$, $x\theta'$, dont la seconde est égale à une tan-*

gente $\theta\theta''$ menée du point de contact θ de la première à une courbe $U^{n''}$, *est une courbe de l'ordre*

$$2\,[mn'(m''+n'')+nn''(m'+n')].$$

$$\left.\begin{array}{lll} x, & nn''(2m'+2n') & u \\ u, & n'(2m''+2n'')m & x \end{array}\right| .\ \text{Donc, etc.}$$

C'est-à-dire : D'un point x on mène n tangentes $x\theta$ de U^n; puis, des n points de contact, nn'' tangentes $\theta\theta'$ de $U^{n''}$; les tangentes de $U^{n'}$, de même longueur que ces nn'' tangentes, ont leurs extrémités sur nn'' courbes d'ordre $(2m'+2n')$; elles ont donc $nn''(2m'+2n')$ extrémités u sur L. D'un point u on mène n' tangentes $u\theta'$ de $U^{n'}$; les tangentes de $U^{n''}$, de même longueur, ont $n'(2m''+2n'')m$ extrémités θ sur U^n; les tangentes en ces points θ coupent L en $n'(2m''+2n'')m$ points x Donc, etc.

» La courbe a, à l'infini, deux points multiples d'ordre $nn'n''$ aux deux points circulaires; m points multiples d'ordre $2n'n''$ aux m points de U^n; m' points multiples d'ordre $2nn''$ aux m' points de $U^{n'}$, et $m''m$ points multiples d'ordre $2n'$ appartenant aux tangentes de U^n aux $m''m$ points de cette courbe situés sur les tangentes des m'' points de $U^{n''}$ à l'infini.

» XI *a*. *Le lieu d'un point x d'où l'on mène à une courbe* $U^{n'}$ *une tangente, dont un segment intercepté entre ce point et une courbe* U_m *soit égal à la distance du point de contact de la tangente à un point* O, *est une courbe de l'ordre* $2m(m'+2n')$.

» La courbe a, à l'infini, deux points multiples d'ordre mn' aux deux points circulaires; m points multiples d'ordre $2n'$ aux m points de U^n, et m' points multiples d'ordre $2m$ aux m' points de $U^{n'}$.

» XI *b*. *Le lieu d'un point x d'où l'on mène à une courbe* $U^{n'}$ *une tangente $x\theta$, dont un segment xa intercepté entre le point x et une courbe* U_m *soit égal à une tangente menée du point de contact θ à une autre courbe* $U^{n''}$, *est une courbe de l'ordre*

$$2m(m'm''+m'n''+2n'n''').$$

$$\left.\begin{array}{lll} x, & n'mn''2 & u \\ u, & 2(m'm''+m'n''+n'n'')m & x \end{array}\right|\ 2m(m'\ {}''+m'n''+2n'n'').$$

» La courbe a, à l'infini, deux points multiples d'ordre $mn'n''$ aux deux points circulaires; m points multiples d'ordre $2n'n''$ aux m points de U_m, m' points multiples d'ordre $2mn''$ aux m' points de $U^{n'}$, et $m''m'$ points multiples d'ordre $2m$, sur les tangentes de $U^{n'}$ en ses $m''m'$ points d'intersection par les tangentes des m'' points de $U^{n''}$ à l'infini.

» XII. *Le lieu d'un point x d'où l'on mène à une courbe $U^{n'}$ une tangente $x\theta$ égale à la distance de ce point x à un des points a où une tangente $\theta\theta'$ menée à une courbe $U^{n''}$ rencontre U_m est une courbe de l'ordre $mn''(3m'+n')$.*

» Établissant la correspondance entre deux points a, α de U_m, supposée unicursale, on pose

$$\begin{array}{lll|l} a, & n''m'2m & \alpha & \\ \alpha, & (2m'+n')n''m & a & \end{array}\; mn''(4m'+n').$$

C'est-à-dire : d'un point a de U_m on mène n'' tangentes $a\theta'$ de $U^{n''}$ qui coupent $U^{n'}$ en $n''m'$ points θ; les tangentes en ces points coupent L en $n''m'$ points x; le cercle décrit de chaque point x, d'un rayon égal à $x\theta$, coupe U_m en $2\,m$ points α, ce qui fait $2mn''m'$ points α. D'un point α on mène $(2m''+n')$ droites αx égales, chacune, à une tangente $x\theta$ (théorème III a) : les $(2m'+n')n''$ tangentes $\theta\theta'$ menées des points θ coupent U_m en $(2m'+n')\,n''m$ points a. Il y a donc $mn''(4m'+n')$ coïncidences de a et α.

» Il y a $mm'n''$ solutions étrangères dues aux mm' points d'intersection de U_m et $U^{n'}$ pris pour le point a de U_m. Il reste $mn''(3m'+n')$. Donc, etc.

» Les points de la courbe situés à l'infini sont : 1° $mn''m'$ points dus aux m points a de U_m situés à l'infini; 2° mn' points multiples d'ordre n'', sur les tangentes de $U^{n'}$ en ses mm' points d'intersection avec U_m; 3° m' points multiples d'ordre $n''m$ aux m' points de $U^{n'}$ à l'infini; 4° $n'n''$ points multiples d'ordre m sur les $n'n''$ tangentes communes à $U^{n'}$ et $U^{n''}$.

» XIII. *De chaque point a d'une courbe U_m on mène deux tangentes $a\theta$, $a\theta'$ à deux courbes $U^{n'}$, $U^{n''}$, et sur la première on prend un point x dont la distance au point de contact θ' de la seconde soit égale à cette tangente $a\theta'$: le lieu de ces points x est une courbe de l'ordre $mn'(m''+3n'')$.*

$$\begin{array}{lll|l} x, & n'mn''2 & u & \\ u, & (m''+2n'')mn'\ (\mathrm{IV}\,a) & x & \end{array}\; mn'(m''+4n'').$$

» Il y a $mn'n''$ solutions étrangères dues aux m points x de L situés sur U_m Il reste $mn'(m''+3n'')$. Donc, etc.

» XIV. *Le lieu d'un point x d'où l'on mène à une courbe $U^{n'}$ une tangente $x\theta$, égale à un segment aa' compris sur cette droite entre deux courbes U_m, U_{m_1}, est une courbe de l'ordre $2mm_1(m'+2n')$.*

$$\left.\begin{array}{lll} x, & n'mm_1 2 & u \\ u, & 2m(m'+2n')m_1 & x \end{array}\right| 2mm_1(m'+3n').$$

» Il y a $2mm_1n'$ solutions étrangères dues aux points x de L situés sur les tangentes de $U^{n'}$ issues des deux points circulaires de l'infini. Il reste $2mm_1(m'+2n')$. Donc, etc.

» XV. *De chaque point a d'une courbe U_m on mène deux tangentes $a\theta$, $a\theta'$ à deux courbes $U^{n'}$, $U^{n''}$, et l'on prend sur la première, à partir de son point de contact, deux segments θx égaux à la seconde : le lieu des points x est une courbe de l'ordre*

$$2m(m'n''+m''n'+2n'n'').$$

$$\left.\begin{array}{lll} x, & n'mn''2 & u \\ u, & 2(m'n''+m''n'+n'n'')m & x \end{array}\right| . \text{ Donc, etc.}$$

» XVI. *Le lieu d'un point x d'où l'on mène à deux courbes $U^{n'}$, $U^{n''}$ deux tangentes $x\theta$, $x\theta'$, dont la première est égale à un segment xa fait sur la seconde entre le point x et une courbe U_m, est une courbe de l'ordre $mn''(2m'+3n')$.*

$$\left.\begin{array}{lll} x, & n'2mn'' & u \\ u, & n''m(2m'+n') & x \end{array}\right| . \text{ Donc, etc.}$$

» XVII. *Le lieu d'un point x d'où l'on mène à une courbe $U^{n'}$ une tangente $x\theta$ égale à un segment θa compris entre le point de contact θ et une courbe U_m, sur une tangente $\theta\theta'$ d'une courbe $U^{n''}$, est une courbe de l'ordre $mn''(3m'+2n')$.*

$$\left.\begin{array}{lll} x, & n'n''m2 & u \\ u, & 3mn''m'(\text{XVI}) & x \end{array}\right| mn''(3m'+2n').$$

C'est-à-dire : D'un point x de L on mène n' tangentes $x\theta$ de $U^{n'}$; des points de contact θ, $n'n''$ tangentes $\theta\theta'$ de $U^{n''}$, qui coupent U_m en $n'n''m$ points a, et de chaque point θ on décrit un cercle de rayon θa, qui coupe L en deux points u, ce qui fait $2n'n''m$ points u. Un point u étant pris sur L, le lieu d'un point θ, d'où l'on mène à $U^{n''}$

une tangente $\theta\theta'$ sur laquelle U_m fait un segment θa égal à θu, est une courbe d'ordre $3n''m$, d'après le théorème XVI. Cette courbe a $3mn''m'$ points θ sur $U^{n'}$; les tangentes en ces points coupent L en $3mn''n'$ points x. Donc, etc.

» La courbe a, à l'infini, deux points multiples d'ordre $n'n''m$ aux deux points circulaires; $mn''m'$ points doubles dus aux m points de U_m à l'infini, et m' points multiples d'ordre $2n''m$ aux m' points de $U^{n'}$.

§ III. — Théoremes relatifs a quatre courbes.

» XVIII. *Le lieu d'un point x d'où l'on mène à deux courbes $U^{n'}$, $U^{n''}$ deux tangentes $x\theta$, $x\theta'$ telles, que deux tangentes menées des deux points de contact θ, θ' à deux autres courbes $U^{n'''}$, $U^{n^{\text{IV}}}$ soient égales, est une courbe de l'ordre*

$$2\left[n'n'''m''(m^{\text{IV}}+n^{\text{IV}})+n''n^{\text{IV}}m'(m'''+n''')\right].$$

$$\left.\begin{array}{lll} x, & n'n'''(2m^{\text{IV}}+2n^{\text{IV}})m'' & x \\ u, & n''n^{\text{IV}}(2m'''+2n''')m' & u \end{array}\right| . \text{ Donc, etc.}$$

» XIX. *Le lieu d'un point x d'où l'on mène à une courbe $U^{n'}$ une tangente $x\theta$ égale à un segment $a\theta'$ compris sur une tangente $\theta\theta'$ d'une courbe $U^{n''}$, entre son point de contact θ' et une courbe U_m, est une courbe d'ordre $2m(m'n''+2m'n''+n'n'')$.*

$$\left.\begin{array}{lll} x, & n'n''m2 & u \\ u, & 2m(m''+2n'')m'\ [\text{XV ou XXVIII}] & x \end{array}\right| . \text{ Donc, etc.}$$

» La courbe a, à l'infini : 1° deux points multiples d'ordre $n'n''m$ aux deux points circulaires; 2° m' points multiples d'ordre $2n''m$ aux m' points de $U^{n'}$; 3° $mm'n''$ points doubles sur les tangentes des points θ de $U^{n'}$ qui se trouvent sur les tangentes de $U^{n''}$ menées des m points de U_m, situés à l'infini; 4° $m''mm'$ points doubles sur les tangentes des points θ où $U^{n'}$ est coupée par les tangentes des m'' points de $U^{n''}$ à l'infini.

» XX. *Le lieu d'un point x d'où l'on mène à deux courbes $U^{n'}$, $U^{n''}$ deux tangentes $x\theta$, $x\theta'$, dont la seconde rencontre une* *courbe* U_m *en un point a d'où l'on mène à une courbe* $U^{n'''}$ *une tangente* $a\theta''$ *égale à la première* $x\theta$, *est une courbe de l'ordre* $2mn''(m'n''' + m'''n' + 2n'n''')$.

$$\left.\begin{array}{lll} x, & n'(2m'''+2n''')mn'' & x \\ u, & n''mn'''(2m'+2n') & u \end{array}\right| \text{. Donc, etc.}$$

» XXI. *Le lieu d'un point x tel, que deux tangentes* $x\theta$, $x\theta'$, *menées de ce point à deux courbes* $U^{n'}$, $U^{n''}$, *satisfassent à la condition qu'un segment* θa, *fait sur la première entre son point de contact et une courbe* U_m, *soit égal à une tangente* $\theta'\theta''$ *menée du point de contact de la seconde à une troisième courbe* $U^{n'''}$, *est une courbe de l'ordre* $2m[n'm''(m'''+n''') + n''n'''(m'+n')]$.

» XXII. *Le lieu d'un point x d'où l'on mène à deux courbes* $U^{n'}$, $U^{n''}$ *deux tangentes* $x\theta$, $x\theta'$ *telles, qu'une tangente menée du point de contact* θ' *de la seconde à une troisième courbe* $U^{n'''}$ *soit égale à la distance de ce point* θ' *à l'un des points a où la première tangente* $x\theta$ *rencontre une courbe* U_m, *est une courbe de l'ordre*

$$mn'(2m''m''' + 2n''n''' + m''n''').$$

» XXIII. *Le lieu d'un point x d'où l'on mène à deux courbes* $U^{n'}$, $U^{n''}$ *deux tangentes* $x\theta$, $x\theta'$, *sur lesquelles deux courbes* U_m, U_{m_1} *font deux segments égaux* $a\theta$, $a'\theta'$, *est une courbe de l'ordre* $2mm_1(m'n'' + m''n' + 2n'n'')$.

$$\left.\begin{array}{lll} x, & n'm\,(2m''+2n'')m_1 & u \\ u, & n''m_1(2m'+2n')m & x \end{array}\right| \text{. Donc, etc.}$$

» XXIV. *Le lieu d'un point x d'où l'on mène à deux courbes* $U^{n'}$, $U^{n''}$ *deux tangentes* $x\theta$, $x\theta'$, *dont la première* $x\theta$ *est égale à un segment* aa' *intercepté sur la seconde par deux courbes* U_m, U_{m_1}, *est une courbe de l'ordre* $2mm_1n''(m'+3n')$.

$$\left.\begin{array}{lll} x, & n'4mm_1n'' & u \\ u, & n''mm_1(2m'+2n') & x \end{array}\right| \text{. Donc, etc.}$$

§ IV. — Théorèmes réciproques des précédents.

» La plupart des théorèmes qui précèdent donnent lieu chacun à un théorème différent, que l'on forme en prenant pour donnée dans le nouveau théorème la conclusion du premier. Tous ces théorèmes se démontrent directement par les mêmes considérations, et seraient une vérification des premiers; mais les limites de cette Communication m'obligent de la restreindre aux énoncés seuls. J'indiquerai après chaque énoncé le théorème dont il est la réciproque.

» XXV. *On mène, de chaque point a d'une courbe* U_m, *une tangente* $a\theta$ *à une courbe* $U^{n'}$, *puis, du point de contact* θ *de cette tangente, une tangente* $\theta\theta'$ *à une courbe* $U^{n''}$, *et sur celle-ci on prend le point* x *dont la distance au point* a *de* U_m *se trouve égale à la tangente* $a\theta$: *le lieu de ces points* x *est une courbe de l'ordre* $mn''(3m'+n')$ [XII].

$$\begin{array}{ll|l} x, & n''m'm2 \quad u & \\ u, & (2m'+n')mn'' \quad x & mn''(4m'+n'). \end{array}$$

» Il y a $m'n''m$ solutions étrangères dues aux m' points x de L, qui se trouvent sur $U^{n'}$. Il reste $mn''(3m'+n')$ coïncidences de x et u. Donc, etc.

» XXVI. *Le lieu d'un point* x *d'où l'on mène à deux courbes* $U^{n'}$, $U^{n''}$ *deux tangentes* $x\theta$, $x\theta'$ *telles, que la seconde* $x\theta'$ *soit égale à la distance de son point de contact à l'un des points où la première rencontre une courbe* U_m, *est une courbe de l'ordre*

$$mn'(m''+3n'')\,[\mathrm{XIII}].$$

» XXVII. *Si, sur chaque tangente d'une courbe* $U^{n'}$, *qui rencontre deux courbes* U_m, U_{m_1} *en des points* a *et* a', *on prend un point* x *faisant un segment* xa *égal à un segment* $\theta a'$ *compris entre le point de contact* θ *de la tangente et un point de la courbe* U_{m_1}, *le lieu de ce point* x *est une courbe de l'ordre*

$$2mm_1(m'+2n')\,[\mathrm{XIV}].$$

» XXVIII. *Le lieu d'un point* x *d'où l'on mène à deux courbes* $U^{n'}$, $U^{n''}$ *deux tangentes, dont la seconde est égale à un segment compris sur la première entre son point de contact et une courbe* U_m, *est une courbe de l'ordre* $2m(m'n''+m''n'+2n'n'')$ [XV].

» XXIX. *Si, de chaque point* a *d'une courbe* U_m *on mène à deux courbes* $U^{n'}$, $U^{n''}$ *deux tangentes* $a\theta$, $a\theta'$, *et que sur la seconde* *on prenne, à partir du point a, deux segments ax égaux à la première $a\theta$, le lieu des points x est une courbe de l'ordre*

$$mn''(2m' + 3n')\ [\mathrm{XVI}].$$

» XXX. *On mène de chaque point a d'une courbe U_m, à une ourbe $U^{n'}$, une tangente $a\theta$, et du point de contact θ une tangente $\theta\theta'$ à une courbe $U^{n''}$; sur cette tangente on prend deux segmnets θx égaux à la tangente $a\theta$: le lieu des points x est une courbe de l'ordre* $mn''(3m' + 2n')$ [XVII].

$$\left.\begin{matrix} x, & n''m'm2 & u \\ u, & (m' + 2n')mn''[\mathrm{IV}a] & x \end{matrix}\right|\ mn''(3m' + n').\ \text{Donc, etc.}$$

» XXXI. *De chaque point a d'une courbe U_m on mène une tangente $a\theta$ d'une courbe $U^{n'}$, et du point de contact θ une tangente $\theta\theta'$ d'une courbe $U^{n''}$, sur laquelle on prend deux segments $\theta'x$ égaux à la tangente $a\theta$: le lieu des points x est une courbe de l'ordre* $2m(m'm'' + 2m'n'' + n'n'')$ [XIX].

$$\left.\begin{matrix} x, & n''m'm2 \\ u, & 2(m'm'' + m'n'' + n'n'')m[\mathrm{XXXVII}] \end{matrix}\right|\ 2m(m'm'' + 2m'n'' + n'n'').$$

» XXXII. *De chaque point a d'une courbe U_m on mène à deux courbes $U^{n'}$, $U^{n''}$ deux tangentes $a\theta$, $a\theta'$, et l'on prend sur la seconde les points x, d'où l'on peut mener à une troisième courbe $U^{n'''}$ des tangentes $x\theta''$ égales à la première tangente $a\theta$: le lieu de ces points x est une courbe de l'ordre*

$$2mn''[n'''(m' + n') + n'(m''' + n''')]\ [\mathrm{XX}].$$

» XXXIII. *De chaque point a d'une courbe U_m on mène à deux courbes $U^{n'}$, $U^{n''}$ deux tangentes $a\theta$, $a\theta'$, et du point de contact de la seconde on mène les tangentes $\theta'\theta''$ d'une troisième courbe $U^{n'''}$; puis on prend sur la première deux segments θx égaux à chacune des tangentes $\theta'\theta''$: le lieu des points x est une courbe de l'ordre* $2m[n'm''(m''' + n''') + n''n'''(m' + n')]$ [XXI].

» XXXIV. *De chaque point a d'une courbe U_m on mène à deux courbes $U^{n'}$, $U^{n''}$ deux tangentes $a\theta$, $a\theta'$, et sur la première on prend un point x dont la distance au point de contact θ' de la* *seconde soit égale à une tangente menée de ce point* θ' *à une troisième courbe* $U^{n'''}$: *le lieu de ce point* x *est une courbe de l'ordre* $mn'(2m''m''' + 2n''n''' + m''n''')$ [XXII].

» XXXV. *De chaque point* a *d'une courbe* U_m *on mène à deux courbes* $U^{n'}$, $U^{n''}$ *deux tangentes* $a\theta$, $a\theta'$, *et l'on prend sur la première deux segments* θx *égaux à chaque segment compris sur la seconde entre son point de contact* θ' *et une courbe* U_{m_1} : *le lieu des points* x *est une courbe de l'ordre*

$$2mm_1(m'n'' + m''n' + 2n'n'') \quad [\text{XXIII}].$$

» XXXVI. *De chaque point* a *d'une courbe* U_m *on mène à deux courbes* $U^{n'}$, $U^{n''}$ *deux tangentes* $a\theta$, $a\theta'$, *et l'on prend sur la seconde deux segments* $a'x$, *comptés à partir de chaque point* a' *d'une courbe* U_{m_1}, *égaux à la première tangente* $a\theta$: *le lieu des points* x *est une courbe de l'ordre*

$$2mm_1n''(m' + 3n') \quad [\text{XXIV}]. \text{ »}$$

NICOLAÏDÈS. — *Intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles.*

LUCAS (Éd.). — *De la trisection de l'angle à l'aide du compas.*

« Dans une Lettre de Descartes au P. Mersenne, en date du 8 octobre 1629, on trouve le passage suivant :

« De diviser les cercles en 27 et 29, cela se peut mécaniquement,
» mais non point géométriquement; il est vrai qu'il se peut en 27,
» par le moyen d'un cylindre, encore que peu de gens en puissent
» trouver le moyen, mais non pas en 29, et, si l'on m'en veut en-
» voyer la démonstration, j'ose vous promettre de faire voir que
» cela n'est pas exact. » (*OEuvres de Descartes,* éd. Cousin, t. VI, p. 56.)

» La construction des polygones réguliers de 9, 27, 81,... côtés se déduit du principe suivant, qui résout le problème de la trisection de l'angle en se servant de figures décrites à l'aide d'un compas sur la surface d'un cylindre de révolution. Soient, en effet, ABC la base d'un cylindre de rayon égal à l'unité, A l'origine des arcs, B et C les extrémités de l'arc donné a et de l'arc supplémentaire. Du point B comme centre on décrit sur la surface du cylindre une courbe sphérique passant par le point diamétralement opposé au point B; sur la génératrice passant par le point C, on prend un point D dont l'ordonnée est égale au cosinus de l'arc donné, et de ce point D comme centre on décrit sur la surface du cylindre une seconde courbe sphérique passant par le point diamétralement opposé au point C.

» Ces deux courbes se coupent en quatre points situés dans un plan, sur un même cercle, et dont les ordonnées sont égales à $2\cos a$ et aux trois valeurs de l'expression $2\cos\frac{a+2k\pi}{3}$. Les projections sur la circonférence de base de ces quatre points d'intersection sont les extrémités de quatre arcs respectivement égaux à $2\pi - a$ et aux trois valeurs cherchées de l'expression $\frac{a+2k\pi}{3}$.

» Telle est, je pense, l'interprétation que l'on doit donner du passage de Descartes rapporté plus haut. La méthode employée permet aussi de construire les racines des équations du troisième et du quatrième degré. »

Mannheim (A.). — *Propriétés des diamètres de la surface de l'onde, et interprétation physique de ces propriétés.*

N° 9. Séance du 30 août 1875.

Le Verrier. — *Recherches sur Saturne. De la masse de Jupiter.*

« La masse de Jupiter entre comme élément dans la théorie de Saturne, et nous avions espéré qu'il serait possible d'obtenir par là la valeur exacte de cette masse, d'autant plus qu'on a prétendu la conclure d'observations beaucoup moins étendues, n'embrassant que soixante-quatorze ans au lieu des cent vingt années dont nous disposons aujourd'hui.

» Dans le VI^e Livre de la *Mécanique céleste,* Laplace établit la masse de Jupiter à $\frac{1}{1067,09}$ de la masse du Soleil.

» Pour arriver à ce résultat, Laplace compare la chute du quatrième satellite vers la planète en une seconde de temps à la chute de Jupiter vers le Soleil dans le même intervalle de temps.

» Il doit à cet effet faire usage : d'une part, de la durée de la révolution du quatrième satellite, qu'il fixe à $16^{\text{jours}},689$, et qui est suffisamment connue par l'ensemble des observations faites pendant de longues années; d'autre part, de l'élongation du quatrième satellite, qu'il admet de $1530^{\text{sec. dec.}},38$. La quantité de cette élongation est le point délicat de la question.

» Laplace, dans le X^e Livre, dit qu'il a tiré l'élongation des observations de Pound, le contemporain de Newton, rapportées dans le troisième Livre des *Principes mathématiques de la Philosophie naturelle,* observations dont il ne reste aucune trace, suivant ce que nous apprend M. Airy, dans son Mémoire de 1833, inséré au tome VI des Mémoires de la *Royal Astronomical Society*.

» Laplace revient sur le même sujet, non-seulement dans le livre X de la *Mécanique céleste,* mais dans l'*Exposition du Système du monde,* où il s'exprime ainsi, page 207, édition de 1824 :

« Les perturbations que les trois grosses planètes éprouvent par » leurs attractions réciproques offrent un moyen d'obtenir avec » une grande précision les valeurs de leurs masses. M. Bouvard, » en comparant à mes formules de la *Mécanique céleste* un très- » grand nombre d'observations qu'il a discutées avec un soin par- » ticulier, a construit de nouvelles Tables très-exactes de Jupiter, » Saturne et Uranus; il a formé, pour ce travail important, des » équations de condition dans lesquelles il a laissé comme indéter- » minées les masses de ces planètes, et, en résolvant ces équations, » il a obtenu les valeurs suivantes de ces masses :

$$\frac{1}{1070,5},\quad \frac{1}{3512},\quad \frac{1}{17918}.$$

» En appliquant mon analyse des probabilités aux équations de » condition de M. Bouvard, on a trouvé qu'il y a un million à pa- » rier contre un que la valeur de la masse de Jupiter à laquelle il » est parvenu n'est pas en erreur d'un centième de cette valeur. »

» Telle était donc la situation, lorsqu'on crut reconnaître, par la discussion des observations des petites planètes nouvelles, qu'il n'était pas possible d'expliquer la suite de leurs positions sans attribuer un accroissement à la masse admise pour Jupiter; c'est alors que M. Airy entreprit d'effectuer de nouvelles mesures de l'élongation du quatrième satellite, travail exposé dans les tomes VI, VII et VIII des Mémoires de la *Royal Astronomical Society,* et dont il a conclu que la masse de l'ensemble du système de Jupiter, y compris les satellites, doit être portée à $\frac{1}{1046,77}$ de la masse du Soleil.

» Comment donc Bouvard avait-il pu tirer de la théorie de Saturne, comparée aux observations effectuées pendant soixante-quatorze ans, une valeur inexacte de la masse de Jupiter? Comment arrivait-il que cette valeur fût la même que celle qui avait été déduite des observations du quatrième satellite faites par Pound?

» Lorsque, me trouvant en possession d'une théorie de Saturne, pleine de difficultés, mais que je crois exacte, je reconnus que l'influence de Jupiter sur la longitude de Saturne dépassait 3800 secondes, je pus croire à mon tour que l'effet de termes si considérables permettrait de déterminer avec précision la masse de Jupiter.

» Je me gardai toutefois de me laisser prendre à ces premières apparences, et je considérai que les équations dans lesquelles figurait la correction μ^{IV} de la masse de Jupiter contenaient quatre autres inconnues principales, qu'il fallait avant tout déterminer en fonctions de μ^{IV}, puis éliminer, avant de rien pouvoir conclure.

» En partant des cent vingt années d'observations dont nous disposons, comparées avec la théorie, on trouve les expressions suivantes pour l'époque de 1850,0 :

Longitude moyenne.......	$14^\circ 52' 30'',58$	$+ 2837'' \mu^{\text{IV}}$
Moyen mouvement sidéral.	$43996'',107$	$- 0'',429 \mu^{\text{IV}}$
Excentricité.............	$11565,13$	$+ 186,8 \mu^{\text{IV}}$
Longitude du périhélie....	$90^\circ 6' 42'',6$	$- 3518'' \mu^{\text{IV}}$

» On voit que l'influence de la correction indéterminée μ^{IV} sur la valeur de chacun des éléments est considérable. Il en résulte que, lorsqu'on élimine des équations de condition les inconnues principales, les coefficients de μ^{IV} se détruisent en grande partie dans les résidus, et prennent des valeurs qui ne sont nulle part la dixième partie de ce qu'elles étaient dans les équations primitives; et, par ce fait, la précision sur laquelle on avait compté pour la détermination de la correction μ^{IV}, c'est-à-dire de la masse de Jupiter, s'évanouit.

» Encore raisonnons-nous ici sur les cent vingt années d'observations dont nous disposons actuellement, tandis que Bouvard n'a embrassé qu'une période de soixante-quatorze années, de 1747 à 1820.

» Or, dans ce cas, la diminution que subissent dans les résidus des équations les coefficients propres à déterminer les masses de Jupiter est encore bien plus considérable; en sorte qu'on peut dire qu'il ne reste rien pour obtenir cette masse, et que Bouvard l'a conclue d'un système d'observations où elle figurait à peine.

» Bien entendu, Bouvard avait appliqué à ses équations la célèbre méthode des moindres carrés, sans rien apercevoir du fond de la question.

» Mais nos confrères se demanderont sans doute comment il se fait qu'en opérant sur des données absolument insuffisantes Bouvard ait retrouvé la même masse à peu près que celle qui avait été déterminée antérieurement par les observations du quatrième satellite, fournissant ainsi à Laplace les éléments d'un calcul illusoire touchant la grande probabilité de l'exactitude du résultat.

» Bouvard n'a pas l'habitude de donner d'explications; on ne rencontre dans son travail aucune trace des éliminations dont nous avons parlé, et sans lesquelles rien ne pouvait être juste.

» On voit seulement que Bouvard a tout d'abord fait emploi de la masse de Jupiter jusqu'alors admise.

» Toute masse, prise arbitrairement dans de certaines limites, permet de satisfaire assez bien aux observations de Saturne, mais à la condition que cette même masse arbitraire soit introduite partout, dans les fonctions qui représentent la longitude moyenne, le moyen mouvement, l'excentricité, la longitude du périhélie, suivant les lois indiquées plus haut.

» Les éléments obtenus par Bouvard se sont donc trouvés représentés par ces fonctions de son arbitraire sans qu'il s'en soit rendu compte, et dès lors il n'a pu faire autrement que d'en retrouver la valeur au bout de ses calculs.

» L'emploi des élongations du quatrième satellite de Jupiter pour déterminer la masse de la planète a donc une supériorité incontestable à notre époque sur l'emploi de la théorie de Saturne, à cause du trop petit nombre d'années d'observations de Saturne dont on dispose; mais, avec le temps, cette supériorité s'amoindrira, et l'emploi des perturbations de Saturne reprendra l'avantage lorsque, ces perturbations ayant changé de sens, il restera, dans les résidus des équations, des coefficients de μ^{IV} égaux ou supérieurs à ceux des équations primitives.

» C'est absolument la même question que celle qui se présente à l'égard de la parallaxe du Soleil, qu'on peut déduire par deux méthodes : l'une géométrique, la méthode des passages de Vénus; l'autre mécanique, reposant sur les inégalités considérables du mouvement de Mars, par exemple.

» La méthode des passages, si importante à l'époque de 1760, mais limitée dans ses moyens, doit fatalement céder la place à la méthode des perturbations, dont l'exactitude va sans cesse en s'accroissant avec le temps. »

Faye. — *De la formation de la grêle.*

Puiseux (V.). — *Rapport sur un Mémoire de M. Haton de la Goupillière, intitulé :* « *Développoïdes directes et inverses d'ordres successifs* ».

« M. Haton de la Goupillière a soumis au jugement de l'Académie un Mémoire intitulé : *Développoïdes directes et inverses d'ordres successifs*. Sous cette dénomination empruntée à Lancret, l'auteur comprend les courbes qui se déduisent les unes des autres, en construisant pour chacune d'elles l'enveloppe des droites qui la coupent sous un angle constant, et il s'est proposé d'en donner la théorie avec plus de généralité qu'on ne l'avait fait jusqu'ici.

» Après avoir établi l'équation d'une développoïde directe ou inverse d'ordre quelconque, M. Haton en déduit diverses conséquences intéressantes et, par exemple, ce théorème, que la développoïde de la développée d'une courbe ne diffère pas de la développée de sa développoïde, et, plus généralement, qu'on peut intervertir d'une manière quelconque les angles sous lesquels on prend les développoïdes successives.

» L'auteur aborde ensuite le problème suivant :

» *Trouver une courbe qui ait pour* $n^{ième}$ *développoïde une courbe égale ou semblable.*

» Le problème analogue relatif aux développées successives avait déjà été résolu; mais l'extension de la solution au cas plus général traité par M. Haton n'était pas sans difficulté. Par une analyse ingénieuse, il est parvenu à résoudre complétement la question, en la ramenant à la résolution d'une équation aux différences mêlées, finies et infiniment petites, dont l'intégrale est algébrique, dans le cas de la similitude inverse, et transcendante dans celui de la similitude directe.

» En résumé, dans le Mémoire renvoyé à notre examen, M. Haton de la Goupillière nous paraît avoir donné une solution élégante d'un problème intéressant qui n'avait pas encore été abordé avec ce degré de généralité, et nous proposons à l'Académie d'en ordonner l'insertion dans le *Recueil des Savants étrangers.* »

Les conclusions de ce Rapport sont adoptées.

N° 10. Séance du 6 septembre 1875.

Bienaymé (J.). — *Application d'un théorème nouveau au Calcul des probabilités.*

« Il a paru dans le *Compte rendu* de l'avant-dernière séance (23 août 1875, n° 8, t. LXXXI, p. 351-353 et 377-379) plusieurs séries numériques d'observations qui m'ont semblé bien propres à montrer l'application d'un théorème nouveau du Calcul des probabilités, dont j'ai donné récemment l'énoncé à la Société Mathématique (*Bulletin* de cette Société, n° 5, t. II, p. 153, séance du 3 juin 1874). Il y a environ quinze ou vingt ans, une circonstance particulière m'obligea d'envoyer par la poste ma formule, qui me semblait de nature à terminer une discussion scientifique; et, à cette époque, je la communiquai à plusieurs personnes qui peuvent se le rappeler. Voici en quoi consiste ce singulier théorème : Si des observations quelconques sont rangées dans l'ordre où elles se sont présentées, et non classées arbitrairement, le nombre des maxima et des minima, ou des séquences [1], qu'on y comptera sera compris entre les limites

$$\frac{2n-1}{3} - t\sqrt{\frac{16n-29}{45}}$$

[1] Si l'on se représente les observations comme les ordonnées d'un polygone, le nom de *séquence* s'applique à la suite de côtés contigus de ce polygone, qui sont ascendants ou descendants entre un maximum et l'un des minima adjacents. Ainsi il y aura des séquences d'un seul côté, de deux, de trois; il ne peut en exister une de plus de $n-1$ côtés. Exactement, on peut compter le point d'origine comme maximum ou minimum et, par suite, une séquence de moins.

et

$$\frac{2n-1}{3} + t\sqrt{\frac{16n-29}{45}},$$

avec la probabilité approximative bien connue

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-x^2}\,dx,$$

n étant le nombre des observations et assez grand pour permettre de ne pas tenir compte de l'ordre de $\frac{1}{n}$ dans une approximation de ce genre. Il faut remarquer que cette formule ne s'applique en toute rigueur qu'à des observations dont la probabilité, quelconque d'ailleurs, est infiniment petite pour chacune, ou à des observations dont la probabilité est finie, mais qui ne peuvent se répéter. Lorsque des répétitions sont possibles, la valeur moyenne des nombres des maxima et des minima, ou des séquences, est modifiée. Par exemple, pour la répétition possible extrême, dans le cas qui ne laisse à l'observation que deux valeurs, le nombre moyen des maxima et minima, ou des séquences ascendantes et descendantes, n'est plus $\frac{2n-1}{3}$, mais seulement $\frac{n+1}{2}$; de sorte que, quelles que soient les répétitions, on peut dire que cette moyenne est comprise entre la moitié et les deux tiers du nombre des observations. Comme la différence de ces deux valeurs n'est que de $\frac{1}{6}$, on voit qu'il y a lieu de faire attention à des écarts qui, dans d'autres questions, pourraient être regardés comme insignifiants.

» Au surplus, il ne s'agit ici que du théorème relatif à la valeur $\frac{2n-1}{3}$: c'est le cas qui se présente à tout instant dans les observations de tout genre, dans les tirages de lots de toute espèce, etc. Les cas de répétitions sont beaucoup moins fréquents, et d'ailleurs il en est souvent qui se rangent dans les limites ci-dessus.

» Je passe aux épreuves que fournit le *Compte rendu* du 23 août. D'abord on trouvera dans la Note de M. Chapelas *sur les étoiles filantes du* 10 *août,* pour les ascensions droites du commencement de la trajectoire de 225 de ces étoiles filantes :

P. 377, 1re colonne,	7	maxima ou minima	sur	13	observations.
» 2e »	11	»		13	»
P. 378, 1re »	43	»		64	»
» 2e »	39	»		65	»
P. 379, 1re »	22	»		35	»
» 2e »	24	»		35	»
Totaux.....	146	maxima	sur	225	observations.

» La moyenne indiquée par la formule ci-dessus serait

$$\frac{2 \times 225 - 1}{3} = 149 + \frac{2}{3}.$$

L'écart des observations n'est donc que de $3 + \frac{2}{3}$, nombre qui n'exige même pas qu'on fasse $t = 1$ dans les limites $\pm t \sqrt{\frac{16n - 29}{45}}$, ce qui les réduit à 8,9, et ce qui n'élève pas la probabilité à 0,8427, soit un peu plus de 5 contre 1 (16 contre 3).

» Si maintenant on prend au même endroit les déclinaisons du commencement de la trajectoire des mêmes étoiles, on trouvera :

P. 377, 1re colonne,	9	maxima	sur	13	observations.
» 2e »	9	»		13	»
P. 378, 1re »	50	»		64	»
» 2e »	39	»		65	»
P. 379, 1re »	24	»		35	»
» 2e »	23	»		35	»
Totaux.....	154	maxima	sur	225	observations.

» La moyenne théorique est de $149\frac{2}{3}$; l'écart n'est donc que de $4\frac{1}{3}$, et, par conséquent, il est compris dans les limites précédemment calculées.

» La probabilité que ces deux valeurs se renfermeraient dans les mêmes limites ci-dessus n'était *a priori* que le carré de la précédente, soit 0,71 ou seulement $3\frac{1}{2}$ contre 1.

» On reconnaîtra de même pour les ascensions droites de la fin de la trajectoire :

P. 377, 1re	colonne,	4	maxima sur	13	observations.
» 2e	»	4	»	8	»
P. 378, 1re	»	41	»	60	»
» 2e	»	39	»	64	»
P. 379, 1re	»	23	»	35	»
» 2e	»	24	»	35	»
Totaux......		135	»	215	observations.

Ici la moyenne théorique n'est plus que de $\frac{2 \times 215 - 1}{3} = 143$. L'écart s'élève donc à 8. Mais les limites ne sont plus, pour la même probabilité, que de $\sqrt{\frac{16 \times 215 - 29}{45}} = 8,7$, et cependant cet écart s'y trouve encore renfermé. Ce fait mérite d'être observé, car d'assez fréquentes répétitions existent dans les séries d'étoiles filantes, de toute nécessité.

» Prenant enfin les déclinaisons de la fin des trajectoires, on constatera :

P. 377, 1re	colonne,	9	maxima sur	13	observations.
» 2e	»	6	»	8	»
P. 378, 1re	»	42	»	60	»
» 2e	»	39	»	64	»
P. 379, 1re	»	22	»	35	»
» 2e	»	23	»	35	»
Totaux......		141	maxima sur	215	observations.

L'écart est de 2 seulement, et il est largement compris dans les limites calculées.

» *A priori*, si ces quatre moyennes étaient complétement indépendantes, il n'y aurait pas eu plus de 1 contre 1 à parier qu'elles seraient toutes renfermées dans les mêmes limites, que déterminait $t = 1$, avec la probabilité 0,8427.

» A la page 353 du même numéro des *Comptes rendus*, M. Le Verrier fait connaître 28 observations d'une tout autre importance que les précédentes. Il s'agit de la différence entre les observations faites à Greenwich et à Paris sur la longitude héliocentrique de Saturne. Ici, malgré le petit nombre des observations, la moyenne théorique $\frac{2\times 28-1}{3} = 18 + \frac{1}{3}$ coïncide presque exactement avec le nombre des maxima et minima observés, qui est de 18. Les petites divergences d'un observatoire à l'autre ne donnent donc lieu à aucune remarque particulière. Et, en effet, le théorème s'appliquant à toute espèce de collection de grandeurs fortuites, il n'y a rien à conclure de ce qu'une série y satisfait, comme le font les deux exemples précédents. Mais il n'en est plus de même quand on relève dans la même Communication, pages 351-352, les 22 observations modernes de la longitude héliocentrique de Saturne faites à Greenwich et à Paris. Il ne se trouve que 9 maxima ou minima : c'est moins de moitié. Il en est de même pour les 16 observations anciennes, qui n'offrent que 8 maxima. Malgré la petitesse relative des nombres 22 et 16, il semblerait qu'une cause quelconque ait pu seule affaiblir systématiquement le nombre des maxima ou minima observés. Peut-être cette cause mériterait-elle d'être recherchée. C'est aux astronomes à en juger. Dans cette Note, il ne peut être question que de probabilités; mais les observations astronomiques n'échappent pas plus que les autres à l'examen de la théorie des probabilités, malgré l'extrême précision à laquelle elles sont parvenues entre les mains d'observateurs si habiles et de géomètres des plus renommés.

» La différence des valeurs employées dans deux calculs de la longitude héliocentrique de Saturne, pour la masse de Jupiter, ne produit, comme on peut le voir, aucun effet sensible sur les 28 observations. Elle paraît effectivement bien petite pour cette masse assez mal connue, malgré le nombre élevé qui représente cette grosse planète. J'ai déjà eu occasion (*Mémoire sur les erreurs d'après la méthode des moindres carrés,* présenté le 27 octobre 1851 à l'Académie, et publié dans le *Journal* de notre illustre confrère, M. Liouville, en 1852, puis plus tard dans le XV^e^ volume du *Recueil des Savants étrangers*), j'ai déjà eu occasion de signaler combien la complication des équations peu nombreuses dont on avait déduit cette masse rendait petite la probabilité qu'on avait cru pouvoir y attacher. Il y aurait peut-être lieu de rechercher si les combinaisons dont on la déduit maintenant sont assez directes et embrassent assez peu d'inconnues pour permettre de préciser une modification aussi faible que celle de $\frac{1}{1046,77}$ à $\frac{1}{1050}$.

» Quant aux 22 observations modernes et aux 16 observations anciennes de la latitude héliocentrique de Saturne, si le nombre des maxima des 22 modernes est de 13, ce qui avoisine la moyenne théorique $14 + \frac{1}{3}$, le nombre des maxima des 16 anciennes n'est que de 7. Il semblerait dès lors qu'il y aurait eu un changement notable dans l'art d'observer les déclinaisons, changement dont les ascensions droites n'auraient pu profiter; mais, encore une fois, ces derniers nombres d'observations sont si petits pour le point de vue auquel le nouveau théorème les envisage, que c'est seulement à titre d'exemples qu'il a été permis d'en faire le sujet de quelques réflexions.

» Voilà tout ce qu'il semble utile de dire sur les nombres de l'avant-dernier *Compte rendu*. J'y ajouterai brièvement quelques autres exemples qui seront peut-être un peu moins faciles à retrouver, mais que néanmoins on pourra se procurer sans grand' peine.

» Et d'abord je citerai les ascensions droites et les déclinaisons de la Comète d'Olbers, qui sont rapportées dans l'ordre chronologique par Bessel (*Untersuchungen über die Bahn des Olbersschen Kometen. Mémoires de l'Académie de Berlin* pour 1812-1813). 183 ascensions droites exigeraient $121 + \frac{2}{9}$ séquences avec un écart de $\pm 8,02 \times t$. L'observation ne donne que 112 séquences. L'écart de $9\frac{2}{3}$ emporte une probabilité supérieure à 5 contre 1, mais de bien peu. Du reste, il n'est pas surprenant qu'en multipliant ces épreuves, qui ne doivent tomber dans les limites calculées que 5 fois sur 6 (plus exactement 16 fois sur 19), on rencontre des cas qui en sortent plus ou moins.

» Pour les déclinaisons, quoiqu'il n'y en ait que 166 qui fournissent pour moyenne $110 + \frac{1}{3}$ avec un écart de $+ 7,64$, on trouvera dans le Mémoire de Bessel 106 séquences ou 106 maxima et minima. La différence de la moyenne théorique n'est donc que de $+ 4 + \frac{1}{3}$, rentrant complétement dans les limites et avec une probabilité très-faible.

» Dans une autre espèce de faits, on peut prendre dans les journaux les résultats du tirage exécuté le 20 juillet dernier pour l'emprunt de 1871 de la ville de Paris. Les 88 obligations sorties demandent une moyenne de $58 + \frac{1}{3}$: le nombre réel est de 57. On voit que l'écart est réduit à $1 + \frac{1}{3}$, malgré la petitesse du nombre des observations, qui permettrait des limites égales à $\pm 5,53$ avec la probabilité déjà employée de 16 contre 3.

» On peut encore prendre pour épreuve les 255 obligations sorties au tirage du 3 juillet dernier, fait sur les titres si nouveaux des *tramways* des quartiers du nord de Paris. La même probabilité entraînerait une moyenne de 143 avec un écart de 8,7. Le nombre réel des séquences s'est trouvé de 140 (*Journal financier* du 1er août).

» Pour terminer enfin, on peut encore examiner le tirage du 2 août courant des obligations des villes de Roubaix et Tourcoing, au nombre de 376 (*Globe* ou *Réforme financière* du 15 août 1875). La moyenne théorique est de $\frac{2 \times 376 - 1}{3} = 250 + \frac{1}{3}$, avec un écart de $\pm 11,53$.

» Le nombre observé est de 245 séquences, qui n'offre qu'un écart de $5 + \frac{1}{3}$ et n'exigerait pas une probabilité de 1 contre 1.

» Les exemples à citer se présentent de tous côtés et tous les jours, mais il convient de s'arrêter. »

Langley (S.-P.). — *Étude des radiations superficielles du Soleil.*

Wolf (C.). — *Observations des étoiles filantes du mois d'août* 1875.

Catalan (E.). — *Note sur les nombres de Bernoulli.*

N° 11. Séance du 13 septembre 1875.

Bertrand (J.). — *Démonstration simple du théorème du Calcul des probabilités, énoncé par M. Bienaymé dans la séance précédente.*

Saint-Venant (de). — *Rapport sur un Mémoire de M. Lefort, intitulé : « Examen critique des bases de calcul habituellement en usage pour apprécier la stabilité des ponts en métal à poutres droites prismatiques, et propositions pour l'adoption de bases nouvelles ».*

Saint-Venant (de). — *Rapport sur un Mémoire de M. Boussinesq, intitulé : « Additions et éclaircissements à son Essai sur la théorie des eaux courantes ».*

Watson (J.-C.). — *Mémoire sur les observations du passage de Vénus faites à Pékin.*

N° 12. Séance du 20 septembre 1875.

Le Verrier. — *Résumé des observations du Soleil et des planètes Mercure, Vénus, Mars, Jupiter, Saturne et Uranus, faites à l'Observatoire de Paris pendant l'année* 1874.

Bertrand (J.). — *Addition à la Note relative au théorème de M. Bienaymé publiée dans la séance précédente.*

Jordan (C.). — *Sur la composition des covariants.*

Suite des études de l'auteur sur le beau théorème de M. Gordan.

N° 13. Séance du 27 septembre 1875.

Resal (H.). — *Présentation du troisième volume de son « Traité de Mécanique générale ».*

« Ce volume est divisé en trois Sections :

» La première comprend l'étude des machines considérées au point de vue des transformations de mouvement, et notamment une théorie complète des principales coulisses employées dans les machines à vapeur.

» La deuxième Section a pour titre : *Des machines considérées au point de vue de la transformation du travail des forces.* Dans le Chapitre consacré aux volants, j'ai notamment traité le cas d'une machine à détente; de plus j'ai indiqué comment on peut tenir compte, par approximation, de l'inertie des pièces oscillantes et de l'obliquité des bielles; enfin j'ai établi les formules qui permetten de calculer les dimensions des différentes parties des volants.

» J'ai donné la théorie des principaux types de régulateurs à force centrifuge, non isochrones et isochrones, et celle du régulateur pneumatique de Larivière.

» Parmi les sujets traités dans le Chapitre consacré au calcul des résistances passives, je citerai une théorie complète de la transmission par câble, la détermination des effets du tir sur les différentes parties de l'affût d'une bouche à feu, enfin une théorie des freins.

» Dans le Chapitre intitulé : *Stabilité des machines,* je me suis spécialement occupé du mouvement d'un véhicule de chemin de fer à quatre roues, en voie courbe horizontale, et de la stabilité des locomotives.

» Le dernier Chapitre de la deuxième Section se rapporte à la mesure du travail développé par les moteurs ou transmis aux machines.

» La troisième Section est consacrée aux applications de la Mécanique à l'Horlogerie, et comprend l'étude de la détente d'un ressort moteur, le calcul des résistances passives dans la marche d'un chronomètre, enfin les théories des régulateurs, du ressort spiral et des échappements. »

Le Verrier. — *Observations méridiennes des petites planètes, faites à l'Observatoire de Paris, pendant le premier trimestre de* 1874.

Fleuriais. — *Sur les particularités présentées par le phénomène des contacts pendant l'observation du passage de Vénus à Pékin.*

VIERTELJAHRSSCHRIFT der Astronomischen Gesellschaft [1].

VIIe année; 1872.

Le volume commence par un Tableau dressé par M. Schönfeld, et faisant connaître, pour l'année 1872, les époques des maxima de 72 étoiles variables; il est suivi d'une éphéméride indiquant, pour chaque jour de l'année, les maxima ou minima qui peuvent être observés.

Posizioni medie di 1425 *stelle pel principio del* 1860.

Argelander rend compte de ce travail, exécuté à Padoue par plusieurs observateurs; il compare le Catalogue à ceux de Wolfers, de Schjellerup, et aux zones de Bessel, et en déduit les corrections en ascension droite et en déclinaison.

Gyldén (Hugo). — *Ueber eine Methode, die Storungen eines Cometen vermittelst rasch convergirenden Ausdrucke darzustellen.* (*Bulletin de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, t. XIV.)

Gyldén (H.). — *Studien auf dem Gebiete der Storungstheorie.* (*Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, t. XVI.)

Les deux Mémoires ci-dessus de M. Gyldén se rapportent à un nouveau développement de la fonction perturbatrice, lequel est encore très-rapidement convergent dans le cas des comètes, là où le développement ordinaire ne serait plus applicable. L'auteur est parti d'un Mémoire de Hansen, couronné par l'Académie des Sciences de Paris, dans lequel il expose ce qu'il appelle le *principe de la partition;* il divise l'orbite d'une comète dont il cherche les perturbations en plusieurs parties, de telle sorte que les coordonnées de la comète sont des fonctions de variables différentes, qu'il appelle *anomalies partielles,* tout le long de l'orbite. On comprend qu'en prenant un assez grand nombre des points de division on puisse réduire de beaucoup, dans chaque intervalle, les variations de la distance Δ de la comète à la planète troublante. Soient ω l'une des anomalies partielles de la comète, c' l'anomalie moyenne de la planète. On aura

$$(1)\qquad \Delta^2 = A + B\sin\omega + D\cos\omega + E\sin 2\omega + F\cos 2\omega + \ldots,$$

où les coefficients A, B, ... sont tous de la forme

$$(2)\qquad A = a_0 + a_1\cos c' + a_2\cos 2c' + \ldots + b_1\sin c' + b_2\sin 2c' + \ldots$$

La convergence de la série (1) peut, comme nous l'avons dit, être rendue très-grande. M. Gyldén représente par E la portion de la série (1) qui dépend de ω, par D l'autre, de sorte que

$$\Delta^2 = D\left(1 + \frac{E}{D}\right),$$

et

$$\Delta^{-n} = D^{-\frac{n}{2}}\left(1 + \frac{E}{D}\right)^{-\frac{n}{2}};$$

le rapport $\frac{E}{D}$ est une petite fraction ; la difficulté se trouve être maintenant dans le développement des puissances négatives de D. La convergence du développement (1), relativement à la variable c', dépend de l'excentricité de la planète troublante, laquelle sera toujours petite dans notre système. M. Gyldén pose

$$D = (a_0 + a_1\cos c' + b_1\sin c')(1 + G),$$

(¹) Voir *Bulletin*, t. III, p. 16.

où

$$G = \frac{a_2 \cos 2c' + b_2 \sin 2c' + \ldots}{a_0 + a_1 \cos c' + b_1 \sin c'}.$$

On peut écrire

$$D = c(1 + G)\,[1 + f\cos(c' + F_1)];$$

f sera en général petit, et l'on développera aisément les puissances négatives de D. Cependant, si la partie considérée de l'orbite de la comète est voisine de l'orbite de la planète perturbatrice, f pourra être assez voisin de 1, et le développement des puissances négatives de $1 + f\cos(c' + F_1)$ ne conduira qu'à des séries très-peu convergentes. C'est ici le point important de la méthode de M. Gyldén. Il remarque que l'on peut écrire

$$1 + f\cos(c' + F_1) = \frac{(1 + K_1)^2}{1 + K_1^2}\left[1 - K^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}(c' + F_1)\right],$$

en posant

$$\frac{2K_1}{1 + K_1^2} = f, \quad \frac{1 - \sqrt{1 - K^2}}{1 + \sqrt{1 - K^2}} = K_1.$$

Il est conduit ensuite à poser

$$\tfrac{1}{2}(c' + F_1) = \operatorname{am}\frac{2K}{\pi}x, \quad (\text{mod. } k) \tag{3}$$

en désignant par K l'intégrale complète de première espèce et par k le module correspondant; on a ensuite

$$1 + f\cos(c' + F_1) = (1 + f)\left(\Delta \operatorname{am}\frac{2K}{\pi}x\right)^2.$$

Les puissances négatives de cette quantité se développent, par les formules de la théorie des fonctions elliptiques, en séries très-convergentes, procédant suivant les sinus et cosinus des multiples de x, lors même que K est voisin de 1. L'auteur donne ensuite les développements en séries périodiques de fonctions telles que

$$\left(\sin \operatorname{am}\frac{2K}{\pi}x\right)^n,$$
$$\left(\cos \operatorname{am}\frac{2K}{\pi}x\right)^n,$$
$$\left(\Delta \operatorname{am}\frac{2K}{\pi}x\right)^n,$$

puis des expressions plus compliquées, telles que

$$\left(\frac{\sin\operatorname{am} u \cos\operatorname{am} u}{\Delta\operatorname{am} u}\right)^{2n} (\Delta\operatorname{am} u)^m.$$

On voit, par ce qui précède, que, dans les deux Mémoires cités plus haut, M. Gyldén est arrivé à développer la fonction perturbatrice en une série très-convergente, procédant suivant les sinus et cosinus des multiples de l'anomalie partielle ω de la comète, et de la variable x liée à l'anomalie moyenne de la planète par l'équation (3); il y est arrivé par un changement de variable. Il donne des exemples numériques de ces développements; les astronomes attendront avec impatience que M. Gyldén ait complété ses beaux travaux, en donnant le moyen de déduire du développement précédent, en fonction du temps, les perturbations des éléments elliptiques de la comète.

Cayley (A.). — *On the determination of the orbit of a Planet from three observations.* — (*Mem. of the Royal Astronomical Society*, vol. XXXVIII.)

M. Cayley donne, dans ce Mémoire, une solution géométrique du problème de la détermination de l'orbite d'une planète à l'aide de trois observations. Il remarque que l'orbite est une section conique ayant le Soleil pour foyer; les trois observations font connaître trois droites sur chacune desquelles est un point de la courbe. Si le plan de l'orbite était connu, il en serait de même des trois points, et l'on serait ramené à construire une section conique dont on donne un foyer et trois points, problème susceptible de quatre solutions; il montre qu'une seule de ces solutions convient au cas actuel. Il considère ensuite le pôle de l'orbite sur la sphère céleste héliocentrique. En s'imposant la condition que la planète mette un temps donné pour passer de la première position à la seconde, on ne déterminera pas entièrement le pôle de l'orbite, mais seulement un lieu de ce pôle; en faisant de même pour la seconde position et la troisième, on aura un autre lieu, et ces deux lignes par leur intersection détermineront l'orbite. M. Cayley construit les courbes dans un cas particulier, et il en fait connaître quelques autres très-intéressantes.

— *A Catalogue of* 1963 *stars and of* 290 *double stars, observed* *by the U.-S. Naval Astronomical Expedition to the Southern Hemisphere during the years* 1850-1851-1852. — Washington, 1871.

Gilliss avait organisé, de 1849 à 1852, une expédition scientifique pour le Chili; il comptait en publier les résultats en six volumes : les deux premiers seraient consacrés à la Géographie, à l'Ethnographie et aux Sciences naturelles; les volumes 3, 4 et 5 contiendraient les résultats des observations astronomiques, et le sixième la Météorologie et le Magnétisme. Les trois premiers volumes ont paru depuis longtemps; dans le troisième se trouvent les observations de Mars et de Vénus, faites en vue de la détermination de la parallaxe du Soleil. La mort de Gilliss arrêta la publication; elle a été reprise par les astronomes de Washington, qui ont publié le Catalogue annoncé plus haut.

On trouvera dans le *Vierteljahrsschrift* des détails intéressants sur l'observatoire de Gilliss, sur la détermination de sa latitude, et enfin sur la précision apportée dans la mesure des coordonnées des 1963 étoiles du Catalogue.

— *Astronomische Tafeln und Formeln, herausgegeben von Dr* C.-F.-W. Peters. Hamburg, 1871.

M. Peters a publié la série des Tables entreprises d'abord par Schumacher en 1822, puis par Warnstorff en 1845, avec de nombreux changements et des additions importantes. Nous citerons parmi ces Tables celles qui servent à la conversion du temps moyen en temps sidéral, à la conversion des temps en fractions décimales du jour, au calcul des réfractions, à la mesure des hauteurs à l'aide du baromètre, etc.

Robinson (R.) and Grubb (T.). — *Description of the great Melbourne telescope.*

A la suite de la publication faite en 1847 du magnifique Ouvrage dans lequel J. Herschel a consigné le résultat de ses observations au Cap de Bonne-Espérance, le monde scientifique désira voir un puissant instrument établi à poste fixe, pour explorer le ciel des nébuleuses dans l'hémisphère austral. La *Société Royale Astronomique* de Londres fit des démarches actives auprès du Gouvernement anglais pour favoriser cette idée; ses efforts restèrent longtemps infructueux. En 1862 seulement, on décida d'installer à Melbourne un puissant télescope; l'instrument partit pour l'Australie en 1868.

Le miroir est métallique, il a 4 pieds de diamètre; le télescope est un télescope de Cassegrain, il est monté équatorialement; le miroir, le tube, les axes, les contre-poids pèsent, à eux seuls, plus de 8000 kilogrammes. Plusieurs astronomes se sont succédé en peu de temps à Melbourne, ce qui explique pourquoi on n'a pas encore fait d'observations bien suivies avec ce télescope gigantesque; nous citerons cependant les observations relatives à la nébuleuse d'Orion, à celle de η Argus, et une Carte très-détaillée des petites étoiles voisines de Sirius.

Möller (Ax.). — *Beiträge zu der neuen Bearbeitung der periodischen Cometen.*

M. Ax. Möller rend compte des calculs qu'il a exécutés pour représenter les observations de la comète de Faye, faites jusqu'à l'apparition de 1865-1866. Il a déterminé les perturbations avec le plus grand soin, et néanmoins, trouvant que la marche des différences, observation moins calcul, n'était pas très-satisfaisante, il a introduit dans ses calculs une nouvelle indéterminée, la correction de la masse de Jupiter. La résolution des équations lui a donné pour cette masse le nombre $\frac{1}{1047,79}$ tandis que Bessel avait trouvé $\frac{1}{1047,88}$; les deux nombres sont donc très-peu différents. Les observations se sont trouvées ensuite représentées d'une façon satisfaisante, et M. Möller en conclut qu'il n'y a pas lieu de supposer que la durée de la révolution de la comète aille en diminuant par suite de l'interposition d'un milieu très-rare.

— *Zusammenstellung der Planeten- und Cometen-Entdeckungen im Jahre* 1871.

Pendant l'année 1871, cinq planètes ont été découvertes, savoir :

(113)	Amalthée,	par Luther,	à Bilk.
(114)	Cassandre,	par Peters,	à Clinton.
(115)	Thyra,	par Watson,	à Ann-Arbor.
(116)	Sirona,	par Peters,	à Clinton.
(117)	Lomia,	par Borrelly,	à Marseille.

Dans la même année, trois comètes ont été découvertes, savoir :

La comète I,	par Winnecke,	à Karlsruhe.
» II,	par Tempel,	à Milan.
» III,	par Tempel,	à Milan.

On a retrouvé, en outre, la comète de Tuttle de 1858, et la comète d'Encke. Cette dernière comète a été étudiée au spectroscope par Huggins.

— *Resultate aus Beobachtungen auf der Leipziger Sternwarte. I. Beobachtungen am Meridiankreis, von R. Engelmann.* Leipzig, 1870.

Le nouvel Observatoire de Leipzig a été construit dans les années 1860-1861 ; jusqu'en 1866, les instruments principaux de l'Observatoire étaient une lunette de Fraunhofer de 2 mètres de foyer, et un grand équatorial de Pistor et Martins de 4 mètres de foyer ; ces deux instruments servaient aux mesures des étoiles doubles, des petites planètes, des comètes, et à l'observation des nébuleuses ; en 1866, l'Observatoire, qui jusque-là n'avait possédé pour la détermination de l'heure qu'une petite lunette méridienne, s'enrichit d'un grand cercle méridien. M. Engelmann, dans le volume cité plus haut, publie les observations faites pendant deux ans et demi avec cet instrument. Le considérant d'abord comme instrument des passages, il donne des détails sur la détermination des constantes instrumentales et leur variation avec la température ; puis, le considérant comme cercle mural, il étudie la flexion, les erreurs de division, les erreurs des vis des microscopes, etc. ; enfin, il donne les observations qu'il a faites des étoiles d'Argelander.

Respighi (L.). — *Sulla scintillazione delle stelle.* (*Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei, vol. XXI e XXII.*)

Dans ces deux Mémoires, M. Respighi étudie la scintillation des étoiles au moyen d'observations spectroscopiques. Il remarque que, quand une étoile est dans le voisinage de l'horizon, il apparaît dans son spectre des bandes sombres, d'autres brillantes, de largeur et de netteté variables, qui, avec une régularité, une vitesse plus ou moins grandes, se promènent d'un bout à l'autre du spectre, ou bien oscillent seulement d'une couleur à l'autre. L'inclinaison de ces bandes sur le prisme change quand on tourne le prisme ; elle varie en outre avec la hauteur de l'étoile. M. Respighi cherche l'explication de ces phénomènes et d'autres analogues, et il trouve que les trois causes suivantes peuvent les produire : d'abord l'existence d'une dispersion atmosphérique sensible; ensuite l'existence, sur le parcours des rayons lumineux, de couches d'air ayant un indice de réfraction différent de celui qui environne l'instrument (cette différence n'étant pas seulement celle qui provient du changement régulier de densité des couches atmosphériques); enfin il pense qu'on doit tenir compte des mouvements relatifs différents de ces couches d'air, par rapport au faisceau qui pénètre dans la lunette. Partant de ces trois causes, il explique dans les cas les plus simples des apparences observées. M. Respighi fait remarquer que, si sa théorie est exacte, le spectroscope pourrait servir d'instrument météorologique, nous donnant des renseignements sur les conditions où se trouvent, non pas les couches d'air qui nous entourent, mais des couches très-éloignées, même jusqu'aux limites de l'atmosphère.

M. Bruhns, rendant compte de ce travail de M. Respighi, rappelle la théorie d'Arago et les recherches de M. Montigny et de M. C. Wolf, astronome de l'Observatoire de Paris.

Hornstein (K.). — *Ueber die Abhängigkeit der Erdmagnetismus von der Rotation der Sonne.*

Dans ce Mémoire, M. Hornstein cherche à trouver l'influence de la durée de la rotation synodique du Soleil sur la déclinaison et l'inclinaison magnétiques, et aussi sur l'intensité de la composante horizontale; c'est donc une extension de la corrélation trouvée entre la période décennale des taches et les variations de l'aiguille aimantée; il a trouvé dans les déclinaisons magnétiques de Prague et de Vienne une période de $26\frac{1}{3}$ jours.

Engelmann (R.). — *Ueber die Helligkeitsverhältnisse der Jupiterstrabanten.* Leipzig, 1871.

M. Engelmann a fait, dans le cours de l'année 1870, un grand nombre de mesures de l'intensité de la lumière des satellites de Jupiter, à l'aide d'un photomètre de Zöllner; il a discuté les erreurs de ses observations, donné de nouvelles déterminations des diamètres des satellites, et en a conclu des nombres représentant, pour chacun d'eux, la faculté plus ou moins grande qu'ils ont de réfléchir la lumière du Soleil. Il a cherché à trouver une relation entre les nombres et les anomalies jovicentriques correspondantes, afin de tirer quelques conséquences relatives à la rotation de ces petits corps sur eux-mêmes; il ne semble pas que les observations déjà réunies soient suffisantes pour qu'on puisse décider sur ce point; toutefois, pour le quatrième satellite, les observations indiquent assez clairement que la durée de sa rotation est égale à celle de sa révolution autour de Jupiter.

— *Berichte über die Arbeiten der norddeutschen Expeditionen zur Beobachtung der totalen Sonnenfinsterniss vom* 18. *August* 1868.

Deux expéditions allemandes ont été envoyées pour observer l'éclipse totale du 18 août 1868 : la première dans l'Inde, composée de MM. Spörer, Tietjen, Engelmann et Koppe; la seconde en Arabie, composée de MM. Tiele, Vogel, Zenker et Fritsch; la première devait s'occuper surtout des protubérances et de leur observation spectroscopique; la seconde était chargée principalement de la Photographie.

Le *Vierteljahrsschrift* donne un résumé très-complet des observations faites dans les deux stations; nous nous bornerons à signaler des mesures photométriques faites par M. Spörer, pour déterminer les intensités de la lumière de certaines étoiles de l'hémisphère austral, et des mesures prises avec soin sur les photographies de l'expédition d'Arabie, pour déterminer les hauteurs et les angles de position des protubérances.

Schiaparelli (J.-V.). — *Entwurf einer astronomischen Theorie der Sternschnuppen, aus dem Italienischen übersetzt und herausgegeben von* G. v. Boguslawsky. Stettin, 1871.

Nous allons donner une indication sommaire des matières contenues dans cet Ouvrage, qui est la traduction en allemand, avec de nombreuses additions, du premier Ouvrage de Schiaparelli sur les étoiles filantes :

Chapitre I. — Hauteur de l'atmosphère déduite de l'observation des étoiles filantes. — Influence de la résistance de l'air sur les orbites des météores. — Perte de vitesse et de force vive dans l'atmosphère; développement de chaleur par suite de la résistance de l'air.

Chapitre II. — Flux périodiques; Catalogues de points radiants. — Premier aperçu de la constitution des essaims d'étoiles filantes; théorie d'Erman, idées de Chladni. — Variation diurne du phénomène. — Identité des orbites de l'essaim des Perséides et de la comète III de 1862, et de l'essaim des Léonides et de la comète I de 1866. — Liaison entre les comètes et le phénomène des étoiles filantes.

Chapitre III. — Répartition des essaims dans l'espace, Catalogue de 189 points de radiation observés par Zezioli.

Chapitre IV. — Influence de l'attraction de la Terre sur la chute des étoiles filantes.

Chapitre V. — Des causes qui influent sur la visibilité et l'abon dance des étoiles filantes.

Chapitre VI. — Explication des variations diurne, azimutale et annuelle.

Chapitre VII. — Perturbations exercées par la Terre ou d'autres planètes sur les orbites des essaims, explication probable des radiations multiples.

Chapitre VIII. — Formation des courants météoriques. — Division de la matière cométaire sous l'influence du Soleil et des planètes; dispersion de cette matière tout le long de l'orbite.

Chapitre IX. — Rapports entre les étoiles filantes et les bolides; l'origine des bolides est-elle stellaire ou cométaire?

Le volume se termine par huit Notes intéressantes; nous citerons entre autres la Note relative à la répartition des orbites des comètes dans l'espace.

— *Astronomical and meteorological observations made at the United States Naval Observatory during the years* 1865, 1866, 1867, 1868 et 1869.

Le volume de 1865 contient les observations méridiennes faites à l'Observatoire de Washington, des observations équatoriales de planètes et comètes, et des groupes stellaires de l'Écrevisse et des Pléiades. Vers la fin de 1865, l'Observatoire reçut un nouveau cercle méridien de Pistor et Martins; le cercle a 3 pieds et demi de diamètre, et la lunette 8 pouces d'ouverture, et 11 pieds de distance focale. Cet instrument a été employé depuis à la mesure des coordonnées des étoiles des éphémérides américaines et des corps du système solaire; les observations sont publiées dans les volumes 1866-1869.

Parmi les Suppléments du volume de 1867 se trouve la détermination de la différence de longitude entre Washington et la Havane.

Klinkerfues (W.).— *Theoretische Astronomie*. Braunschweig, 1871-1872.

L'Ouvrage de M. Klinkerfues traite principalement de la détermination des orbites des planètes, comme les Ouvrages bien connus de Watson et d'Oppolzer; cependant il s'en distingue en un certain nombre de points sur lesquels nous appelons l'attention des lecteurs.

L'auteur traite avec détail la détermination de l'orbite, supposée circulaire, à l'aide de deux observations; il donne de cette question, qui se présente souvent, une autre solution qui lui a été communiquée par Gauss, et n'avait encore jamais été publiée. A propos de la méthode d'Olbers pour la détermination des orbites paraboliques, il indique des transformations élégantes dues également à Gauss.

Pour la détermination des orbites des planètes il profite des simplifications apportées à la méthode par Encke et par Hansen. Passant au calcul d'une orbite à l'aide d'un grand nombre d'observations, il indique des formules données par Jacobi, permettant de trouver par des calculs très-symétriques les valeurs des inconnues (supposées au nombre de 3), et leurs poids, résultant de l'application de la méthode des moindres carrés.

M. Klinkerfues traite aussi de la détermination des orbites des étoiles doubles; il donne d'abord la méthode de Herschel, puis une méthode d'approximation pour déterminer l'orbite à l'aide de six angles de position. Il fait connaître ensuite la théorie des apparitions que présente l'anneau de Saturne. Il indique le calcul de l'orbite d'un satellite, en ramenant ce cas à celui des étoiles doubles.

Nous signalerons enfin la détermination des orbites des flux périodiques d'étoiles filantes.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK, herausgegeben von Dr O. SCHLÖMILCH, Dr E. KAHL und Dr M. CANTOR (¹).

T. XX, fasc. 1, 2, 3; 1875.

HOLZMÜLLER (G.). — *Contributions nouvelles à la théorie des transformations isogonales*. (16 p.)

Il s'agit dans cet article des transformations ponctuelles dans le plan, qui s'effectuent en conservant la similitude des éléments infiniment petits. Toute fonction d'une variable complexe donne naissance à une telle transformation. L'auteur étudie surtout les transformations qui dérivent de l'emploi de la fonction elliptique sinam z.

MILINOWSKI. — *Les centres harmoniques d'un système de quatre points, par rapport à un point donné comme pôle*. (37 p.)

Les propriétés des centres harmoniques ont jusqu'ici été surtout déduites du calcul. Dans le travail actuel, l'auteur s'est proposé d'obtenir, par des méthodes purement synthétiques, les propriétés du centre harmonique par rapport à un système de quatre points. Ces propriétés conduisent d'une manière directe à de nombreuses propositions relatives aux courbes du troisième et du quatrième ordre.

WITTWER (W.-C.). — *Sur les variations de densité de l'éther intermoléculaire*. (17 p.)

L'auteur, à l'encontre de plusieurs physiciens, pense que l'éther, dans le voisinage des atomes, est moins dense que dans leur éloignement; il se propose de justifier cette opinion par l'étude exclusive des phénomènes optiques, et voici ses conclusions :

Dans les corps pondérables la densité de l'éther est plus petite que dans l'espace environnant.

Dans les cristaux hexagonaux positifs, la densité atteint sa plus petite valeur dans la direction de l'axe principal, sa plus grande dans les directions perpendiculaires. C'est l'inverse qui a lieu pour les cristaux négatifs.

ZIMMERMANN (H.). — *Sur la résolution numérique de deux équations à deux inconnues*. (7 p.)

(¹) Voir *Bulletin*, t. VIII, p. 185.

La méthode proposée par l'auteur peut être regardée comme la généralisation de la règle des parties proportionnelles. Soient

$$f(x,y)=0, \quad \varphi(x,y)=0$$

les deux équations. Considérant les deux surfaces

$$z=f(x,y), \quad z=\varphi(x,y),$$

l'auteur leur substitue deux plans assujettis respectivement à couper les deux surfaces en trois points choisis arbitrairement, mais aussi voisins que possible de leur point commun d'intersection avec le plan des xy.

Weiler (A.). — *Sur l'intégration de l'équation aux différentielles totales.* (6 p.)

$$X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=0.$$

L'auteur fait connaître d'abord la méthode d'Euler, qui, le premier, a donné une marche pour l'intégration de cette équation. Il expose ensuite le procédé que M. Natani a publié dans le *Journal de Crelle,* t. 58, p. 304, et enfin celui de M. du Bois-Reymond, exposé au tome 70 du même Journal, p. 307.

Weiler (A.). — *Sur l'intégration d'un système complet d'équations aux différentielles partielles de forme linéaire.* (9 p.)

L'auteur rappelle d'abord la méthode de Jacobi, puis celle de M. Mayer, dans un Mémoire inséré aux *Mathematische Annalen,* Mémoire dont nous publierons la traduction.

Matthiessen (L.). — *Sur la dispersion des couleurs dans les gaz.* (4 p.)

Günther (S.). — *Sur l'histoire des Mathématiques en Allemagne pendant le* XV^e^ *siecle.* (14 p.)

Weihrauch (K.). — *Du nombre de solutions des équations indéterminées du premier ordre à coefficients premiers entre eux deux à deux.* (15 p.)

L'étude du nombre des solutions positives d'une équation indéterminée est une des plus intéressantes de l'Analyse; l'auteur l'aborde dans un cas simple, celui où les coefficients sont premiers entre eux, et il indique la marche à suivre pour résoudre la question posée.

WEIHRAUCH (K.). — *Sur l'expression $\Sigma f_n(m)$ et les trans mations de la formule pour le nombre des solutions. Applica de la formule à la théorie des combinaisons.* (6 p.)

La fonction $f_n(m)$ qui figure dans cet énoncé est le nombre solutions de l'équation

$$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = m.$$

Cet article est la suite du précédent.

SILLDORF. — *Sur les systèmes de rayons du premier ordre la première classe, et sur les complexes linéaires.* (27 p.)

Dans ce travail étendu, l'auteur établit les théorèmes que M. a fait connaître sans démonstration dans le 69e tome du *Jou de Borchardt,* et d'autres propositions nouvelles qui lui ap tiennent en propre.