BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

# Revue des publications périodiques

*Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, tome 9 (1875), p. 149-187
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1875__9__149_1>

## REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES (1).

T. LXXX; 1er semestre 1875 (suite).

### N° 16. Séance du 26 avril 1875.

FAYE. — *Sur les ascensions à grande hauteur.*

LEDIEU (A.). — *Du cycle fictif correspondant au fonctionnement des machines thermiques à cylindre ouvert, et mise en évidence de ce cycle et du poids de substance motrice formant le corps travailleur.*

SALTEL (L.). — *Sur une extension analytique du principe de correspondance de M. Chasles.*

« Dans son Mémoire intitulé : *Considérations générales sur la détermination, sans calcul, de l'ordre d'un lieu géométrique,* l'auteur a montré comment la détermination de ce nombre résulte immédiatement de la solution de ce problème :

» Une droite $\Delta$ contient un point O pris pour origine et deux séries de points $S_1, S_2$, dont la liaison est telle que, prenant arbitrairement un point Q à une distance du point O représentée par $\rho_1$ ou $\rho_2$, il corresponde pour l'autre série un nombre constant de points $\alpha_2$ ou $\alpha_1$. On demande le nombre N de points P situés *à distance finie,* tels que, supposant confondu en l'un d'eux un point de l'une des deux séries, ce point coïncide avec l'un des points correspondants de l'autre série. »

(1) Voir *Bulletin*, t. VII, p. 114.

Un Mémoire auquel l'auteur donne le nom de *principe de correspondance analytique* permet de résoudre cette question dans un grand nombre de cas.

Niewenglowski (B.). — *Sur les courbes d'ordre n à point multiple d'ordre n* — 1.

Gyldén (H.). — *Sur le développement de la fonction perturbatrice suivant les multiples d'une intégrale elliptique.*

Peslin (H.). — *Sur la loi des variations diurnes et annuelles de la température dans le sol.*

Cousté. — *Note sur la théorie des tempêtes.*

**N° 17. Séance du 3 mai 1875.**

Perrotin. — *Note comprenant les éléments et une éphéméride de la planète* (138) *Tolosa.*

Palisa. — *Éléments de la planète* (143) *Adria.*

Galle. — *Lettre touchant la détermination de la parallaxe solaire par les observations de la planète Flora.*

Fouret (G.). — *Sur une nouvelle définition géométrique des courbes d'ordre n à point multiple d'ordre n* — 1.

Cette Note traite du même sujet que la Communication déjà citée de M. Niewenglowski.

« Considérons une conique C, un point fixe O sur cette conique, et $n-2$ droites D distribuées d'une manière quelconque dans son plan. Sur chaque transversale passant par O construisons, à partir de ce point, un rayon vecteur qui soit la somme algébrique des rayons vecteurs déterminés sur la transversale par la conique C et par les droites D. Le lieu des points obtenus est une courbe d'ordre $n$, à point multiple d'ordre $n-1$ en O, et ayant pour asymptotes les deux asymptotes de la conique et les $n-2$ droites D.

» La réciproque de ce théorème est surtout remarquable. Elle consiste, ainsi que M. Niewenglowski l'a établi, en ce que toute courbe d'ordre $n$, ayant un point multiple d'ordre $n-1$, est susceptible d'un pareil mode de génération. »

L'auteur présente quelques remarques sur cette proposition et d'autres analogues. Un procédé de démonstration qui ne se trouve ni dans cette Communication, ni dans celle de M. Niewenglowski, nous paraît susceptible de conduire à ces théorèmes et à plusieurs autres analogues.

L'équation de toute courbe d'ordre $n$ ayant un point double d'ordre $n-1$ peut prendre en coordonnées polaires la forme

$$\rho = \frac{1}{\cos\omega} f(\operatorname{tang}\omega),$$

le symbole $f$ désignant une fonction rationnelle de $\operatorname{tang}\omega$. D'après la théorie connue de la décomposition de ces fonctions, la valeur de $\rho$ pourra prendre la forme

$$\rho = \sum \frac{1}{\cos\omega(a+b\operatorname{tang}\omega)} = \sum \frac{1}{a\cos\omega + b\sin\omega},$$

ce qui conduit aux propositions déjà citées, et montre qu'elles cesseraient d'avoir lieu dans le cas où la fonction $f$ admettrait des infinis multiples.

JORDAN (C.). — *Théorème sur les covariants.*

« Soient $A_n, B_n, \ldots$ des formes binaires d'ordre $n$, en nombre quelconque; $A_{n-1}, B_{n-1}, \ldots$ des formes d'ordre $n-1$, etc. Soient enfin C un covariant du système de ces formes; O l'ordre de C par rapport aux variables; $d_n$ son degré total par rapport aux coefficients de $A_n, B_n, \ldots$; $d_{n-1}$ son degré par rapport aux coefficients de $A_{n-1}, B_{n-1}$, etc. On aura le théorème suivant : Si le covariant C n'est pas exprimable en fonction entière de covariants plus simples, on aura nécessairement, pour limiter O, $d_n, d_{n-1}, \ldots$, les inégalités suivantes :

$$O < S, \quad p_n d_n + p_{n-1} d_{n-1} + \ldots < 2S\left(\frac{p_n}{n} + \frac{p_{n-1}}{n-1}, + \ldots + \frac{p_1}{1}\right),$$

S désignant l'expression

$$n\sqrt{6n} + (n-1)\sqrt{6(n-1)} + \ldots + \sqrt{6},$$

et $p_n, p_{n-1}, \ldots, p_1$ étant des constantes déterminées de proche en proche au moyen des relations suivantes :

$$p_\mu = 1, \quad p_{2\mu} \overline{\gtrless} 2p_{2\mu+1}, \quad p_{2\mu-1} > \frac{3}{2} p_{2\mu}, \quad p_\mu \overline{\gtrless} \frac{9}{2} S \frac{p_{2\mu}}{2\mu}.$$

On en conclut immédiatement que, si les formes $A_n$, $B_n, \ldots, A_{n-1}, \ldots$ sont en nombre limité, le nombre des covariants indépendants C sera limité, proposition fondamentale découverte par M. Gordan. »

Fonvielle (W. de). — *Note sur une ascension aérostatique.*

## N° 18. Séance du 10 mai 1875.

Resal (H.). — *Sur la substitution par approximation entre des limites déterminées du rapport des variables d'une fonction homogène de deux variables à une autre fonction homogène du même degré.*

« Soit F $(x, y)$ une fonction homogène de $x, y$ du degré $m$; l'auteur se propose de déterminer deux coefficients indéterminés $\alpha$, $\beta$ d'une fonction homogène du même degré $F_1(x, y)$, de manière que les erreurs relatives

$$e = \frac{F(x,y)}{F_1(x,y)} - 1$$

se trouvent partagées dans les meilleures conditions entre les limites supérieure $k_2$ et inférieure $k_1$ du rapport $\frac{y}{x}$. »

Ce problème est posé en termes un peu vagues. M. Resal propose la solution suivante :

« Exprimer que les deux erreurs relatives extrêmes sont égales et de même signe, et égales et de signes contraires au maximum ou au minimum que prend la fonction $e$ dans l'intervalle considéré. »

C'est cette solution qu'il applique à différents exemples :

1° $F(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $F_1(x,y) = \alpha y + \beta z$, déjà traité par Poncelet;

2° $F(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $F_1(x_1 y) = \frac{1}{\alpha y + \beta z}$.

Faye. — *Lettre sur la distribution de la température à la surface du Soleil et les récentes mesures de M. Langley.*

Tresca. — *Locomotive à patins de M. Fortin-Hermann.*

Ledieu (A.). — *Sur la loi de détente pratique dans les machines à vapeur.*

Fleuriais. — *Documents recueillis par la mission envoyée à Pékin pour observer le passage de Vénus.*

MATHIEU (É.). — *Mémoire sur des formules de perturbation* [1].

LAGUERRE. — *Sur quelques propriétés des courbes algébriques.*

Nous énonçons les trois théorèmes principaux de cette Communication.

Si d'un point M, pris dans le plan d'une courbe de $n^{\text{ième}}$ classe $K^n = C^{n(n-1)}$, on mène les $n$ tangentes à la courbe, et si l'on considère les $\frac{n(n-1)}{2}$ droites qui joignent deux à deux les points de contact, la droite polaire de M relative à $C^{n(n-1)}$ est la droite polaire du même point relativement aux $\frac{n(n-1)}{2}$ droites considérées.

Étant donnée une courbe de $n^{\text{ième}}$ classe et de $m^{\text{ième}}$ ordre $K^n = C^m$, possédant $t$ tangentes doubles et $i$ tangentes d'inflexion, si l'on désigne respectivement par D, I, T et $\Delta$ les droites polaires d'un point M du plan relativement à la courbe $C^m$, à l'ensemble des tangentes doubles, à l'ensemble des tangentes d'inflexion et à l'ensemble des droites qui joignent deux à deux les points de contact des tangentes menées du point M à $K^n$, la droite $\Delta$ est la polaire du point M par rapport au triangle formé par les droites D, T, I, ces droites étant supposées de poids proportionnels aux nombres $m$, $2t$, $3i$.

Étant données deux courbes quelconques de classes $n$ et $n'$, $K^n$, $K^{n'}$, la droite polaire d'un point quelconque M du plan relativement à leurs $nn'$ tangentes communes est la droite polaire du même point relativement aux $nn'$ droites qui joignent les points de contact des tangentes menées de M à $K^n$ aux points de contact des tangentes menées de M à $K^{n'}$.

PESLIN (H.). — *Théorie des tempêtes. Réponse à M. Faye.*

ABBADIE (A. D'). — *Note accompagnant la présentation des premiers résultats des observations sur les mouvements microscopiques des pendules librement suspendus.*

## N° 19. Séance du 17 mai 1875.

LE VERRIER (U.-J.). — *Observations méridiennes des petites planètes, faites à l'Observatoire de Greenwich (transmises par*

---

[1] Voir *Bulletin*, t. IX, p. 125.

*l'Astronome Royal M. Airy) et à l'Observatoire de Paris pendant le premier trimestre de l'année* 1875.

ELLERY (R.). — *Observations de la Lune et d'étoiles de même culmination, faites à l'Observatoire de Melbourne.*

FONVIELLE (W. DE). — *Sur les précautions à prendre dans les ascensions en hauteur.*

**N° 20. Séance du 24 mai 1875.**

LE VERRIER (U.-J.). — *Observations de la Lune faites aux instruments méridiens de l'Observatoire de Paris pendant l'année* 1874.

FAYE. — *Quelques remarques sur la discussion au sujet des cyclones.*

SECCHI (le P.). — *Étude des taches et des protubérances solaires de* 1871 *à* 1875.

LEDIEU (A.). — *Conditions du maximum de rendement calorifique des machines à feu.*

ANDRÉ (Ch.). — *Sur les documents scientifiques recueillis à Nouméa par la mission envoyée pour observer le passage de Vénus.*

SALTEL (L.). — *Sur la détermination des singularités de la courbe gauche, intersection de deux surfaces d'ordres quelconques qui ont en commun un certain nombre de points multiples.*

L'auteur énonce un lemme relatif aux points multiples, et il en déduit, pour quelques cas particuliers, la solution du problème qu'il s'est posé.

**N° 21. Séance du 31 mai 1875.**

SALTEL (L.). — *Sur les courbes gauches de genre zéro.*

Cette Communication repose sur ce théorème général que toutes les courbes gauches pour lesquelles s'applique le principe de correspondance entre trois et quatre séries de points sont du genre zéro.

**N° 22. Séance du 7 juin 1875.**

Reech (F.). — *Théorie des surfaces de révolution qui, par voie de déformation, sont superposables les unes aux autres et chacune à elle-même en toutes ses parties.*

Un extrait de ce travail est inséré dans les *Comptes rendus*. Les propositions énoncées, et dont l'auteur est, croyons-nous, en possession depuis longtemps, ont perdu de leur nouveauté; car l'étude des surfaces de M. Reech se relie aux innombrables travaux que ces dernières années ont vu paraître sur le *Postulatum d'Euclide*.

Mouchez. — *Position géographique de l'île Saint-Paul.*

**N° 23. Séance du 14 juin 1875.**

Le Verrier (U.-J.). — *Découvertes des petites planètes* (144) *et* (145), *faites à Clinton (New-York) par M. Peters.*

Le Verrier (U.-J.). — *Découverte de la petite planète* (146), *faite à Marseille par M. Borrelly.*

Faye. — *Sur la trombe de Caen.*

Reech (F.). — *Théorie des surfaces de révolution qui, par voie de déformation, sont superposables les unes aux autres et chacune à elle-même dans toutes ses parties.*

**N° 24. Séance publique annuelle du lundi 21 juin 1875.**

Prix proposés :

GRAND PRIX DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

« *Etude de l'élasticité des corps cristallisés, au double point de vue expérimental et théorique.* »

La Commission chargée de l'examen de ce Concours ayant déclaré qu'il n'y avait pas lieu de décerner de prix, l'Académie a décidé, sur sa proposition, qu'elle en prorogerait le terme à l'année 1875.

Les Mémoires ont dû être déposés au Secrétariat avant le 1er juin.

GRAND PRIX DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

La question remise au Concours, pour 1869, a été prorogée à 1873, dans les termes suivants :

« *Discuter complétement les anciennes observations d'éclipse qui nous ont été transmises par l'histoire, en vue d'en déduire la valeur de l'accélération séculaire du moyen mouvement de la Lune, sans se préoccuper d'aucune valeur théorique de cette accélération séculaire; montrer clairement à quelles conséquences ces éclipses peuvent conduire relativement à l'accélération dont il s'agit, soit en lui assignant forcément une valeur précise, soit au contraire en la laissant indéterminée entre certaines limites.* »

Aucun Mémoire n'est parvenu pour le Concours.

En raison de l'importance de la question, la Commission a proposé de proroger le Concours jusqu'en 1876, en formulant ainsi le travail proposé :

« *Déduire d'une discussion nouvelle, approfondie, des anciennes observations d'éclipses, la valeur de l'accélération séculaire apparente du moyen mouvement de la Lune. Fixer les limites de l'exactitude que comporte cette détermination.* »

Les Mémoires seront reçus jusqu'au 1er juin 1876. Les noms des auteurs seront contenus dans un pli cacheté, qui ne sera ouvert que si le Mémoire qui le renferme est couronné.

Le prix consistera en une médaille d'or de la valeur de *trois mille francs.*

GRAND PRIX DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

« *Théorie des solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre.* »

Les Ouvrages présentés devront être écrits en français ou en latin.

Le terme fixé pour le dépôt des pièces de Concours est le 1er juin 1876.

Le prix consistera en une médaille de la valeur de *trois mille francs.*

### GRAND PRIX DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

La question proposée était l'*étude des équations relatives à la détermination des modules singuliers, pour lesquels la formule de la transformation dans la théorie des fonctions elliptiques conduit à la multiplication complexe.*

Aucun Mémoire n'ayant été envoyé au Concours, la Commission est d'avis qu'il y a lieu de retirer la question et de la remplacer par la suivante :

« *Application de la théorie des transcendantes elliptiques ou abéliennes à l'étude des courbes algébriques.* »

Le prix, à décerner en 1877, consistera en une médaille de la valeur de *trois mille francs.*

Les Mémoires seront reçus jusqu'au 1er juin 1877. Les noms des auteurs seront contenus dans un pli cacheté, qui ne sera ouvert que si le Mémoire qui le renferme est couronné.

### PRIX LALANDE.

La médaille fondée par M. de Lalande, pour être accordée *annuellement* à la personne qui, en France ou ailleurs, aura fait l'observation la plus intéressante, le Mémoire ou le travail le plus utile au progrès de l'Astronomie, sera décernée dans la prochaine séance publique.

Ce Prix consistera en une médaille d'or de la valeur de *cinq cent quarante-deux francs.*

### PRIX DAMOISEAU.

L'Académie avait proposé pour sujet du prix Damoiseau à décerner en 1872 la question suivante :

« *Revoir la théorie des satellites de Jupiter; discuter les observations et en déduire les constantes qu'elle renferme, et particulièrement celle qui fournit une détermination directe de la vitesse de la lumière; enfin construire des Tables particulières pour chaque satellite.* »

Aucun Mémoire n'ayant été déposé au Secrétariat, elle a prorogé le Concours à l'année 1876.

La Commission invite les concurrents à donner une attention particulière à l'une des conditions du prix de M. le baron de Damoiseau, celle qui est relative à la détermination de la vitesse de la lumière.

Les Mémoires seront reçus jusqu'au 1er juin.

PRIX VAILLANT.

M. le Maréchal Vaillant, Membre de l'Institut, a légué à l'Académie des Sciences, par son testament en date du 1er février 1872, une somme de *quarante mille francs,* destinée à fonder un prix qui sera décerné soit annuellement, soit à de plus longs intervalles. « Je n'indique aucun sujet pour le prix », dit M. le Maréchal Vaillant, » ayant toujours pensé laisser une grande Société comme l'Académie des Sciences appréciatrice suprême de ce qu'il y avait de mieux à faire avec les fonds mis à sa disposition. »

L'Académie, autorisée par Décret du 7 avril 1873 à accepter ce legs, a décidé que le prix fondé par M. le Maréchal Vaillant serait décerné *tous les deux ans.*

En conséquence, elle propose, pour l'année 1877, de décerner un prix de *quatre mille francs* à l'auteur du meilleur travail sur l'*étude des petites planètes,* soit par la théorie mathématique de leurs perturbations, soit par la comparaison de cette théorie avec l'observation.

Les Mémoires devront être adressés au Secrétariat de l'Institut avant le 1er juin 1877.

PRIX VALZ.

Mme Veuve Valz, par acte authentique, en date du 17 juin 1874, a fait don à l'Académie d'une somme de *dix mille francs,* destinée à la fondation d'un prix qui sera décerné tous les ans, sous la qualification de *prix Valz,* à des travaux sur l'Astronomie, conformément au prix Lalande.

L'Académie a été autorisée à accepter cette donation par décret en date du 29 janvier 1875. Prenant en considération les études favorites du célèbre directeur de l'Observatoire de Marseille et le service qu'il a rendu à l'Astronomie en organisant en France la recherche des petites planètes, à l'aide de cartes spéciales du ciel, elle a décidé qu'elle décernerait ce prix, dans sa séance publique de l'année 1877, à l'auteur des meilleures cartes se rapportant à la région du plan invariable de notre système.

Les Mémoires seront reçus au Secrétariat de l'Institut jusqu'au 1er juin 1877.

### N° 25. Séance du 28 juin 1875.

Le Verrier (U.-J.). — *Sur les travaux en voie d'exécution à l'Observatoire.*

Faye. — *Sur la trombe de Châlons; examen des faits et conclusion.*

Hirn. — *Note accompagnant la présentation du tome Ier de l'*Exposition analytique et expérimentale de la Théorie mécanique de la chaleur.

Mathieu (É.). — *Mémoire sur le mouvement de rotation de la Terre.*

« L'étude du mouvement de rotation de la Terre peut se partager en deux parties. On peut, en effet, examiner le mouvement absolu de l'axe de rotation de la Terre par rapport à la sphère céleste, et l'on obtient ainsi les phénomènes de la précession des équinoxes et de la nutation de l'axe terrestre. Cette question a été traitée, avec toute l'approximation désirable, par M. Serret (*Annales de l'Observatoire*, t. V, 1859), et je ne m'en occupe pas dans ce travail. En second lieu, on peut rechercher le mouvement de cet axe de rotation, par rapport à la Terre, ou le déplacement des pôles à sa surface, et déterminer la vitesse de rotation autour de cet axe. Cette question m'a semblé susceptible de nouvelles recherches, et c'est à sa solution que se rapporte ce Mémoire.

» Les formules de perturbation du mouvement de rotation d'un corps solide, qui n'est sollicité que par des forces perturbatrices, sont exactement les mêmes que les formules de perturbation du mouvement d'une planète. Dans un Mémoire, dont un extrait a paru dans les *Comptes rendus* (10 mai dernier) et qui paraîtra bientôt dans le *Journal de Mathématiques*, j'ai expliqué d'où provient cette coïncidence et j'y ai donné le théorème général sur lequel elle repose.

» Poisson rappelle cette propriété remarquable, dans la préface de son *Mémoire sur la rotation de la Terre autour de son centre de gravité* (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. VII, 1827), et cependant il préfère, pour faire ses calculs, substituer aux formules précédentes un système d'autres formules assez différent. La démonstration que je donne de l'invariabilité du jour sidéral, et qui est fondée sur le théorème général dont j'ai parlé, diffère entièrement de celle de Poisson; mais les deux démonstrations ne se séparent pas seulement par la forme; car Poisson, pour simplifier ses calculs, fait une supposition, qu'il regarde comme suffisamment approchée et qui n'est pas admissible : elle consiste à regarder les orbites du Soleil et de la Lune, qui troublent le mouvement de rotation de la Terre, comme circulaires et situées dans un même plan. Or je montre que cette recherche exige trop de précision pour que l'on puisse négliger dans la fonction perturbatrice les termes qui sont multipliés par les excentricités des deux orbites et par leurs inclinaisons sur une écliptique fixe.

» Mon analyse serait beaucoup simplifiée par chacune des hypothèses suivantes, mais surtout par la première et la troisième :

» 1° Si l'on supposait que la Terre est exactement de révolution;

» 2° Si l'on regardait la différence d'aplatissement de ses deux hémisphères comme tout à fait négligeable;

» 3° Si l'on pouvait considérer les orbites du Soleil et de la Lune comme circulaires et situées dans un même plan fixe.

» La troisième supposition, comme je l'ai dit, ne peut être admise; mais, pour la première et la seconde hypothèse, elles auraient plus de raison d'être faites; car on ne peut douter qu'elles n'approchent beaucoup de la réalité. Il y a cependant un intérêt à ne pas faire non plus *a priori* la première hypothèse, afin de démontrer par la comparaison des résultats de l'analyse avec l'observation que la quantité $\frac{B-A}{B}$, où A et B désignent les deux plus petits moments principaux d'inertie par rapport au centre de gravité, est une très-petite quantité.

» En effet, il semble résulter des observations du pendule en différents points de la Terre que la quantité $\frac{B-A}{B}$ est notablement plus petite que le nombre qui exprime l'aplatissement des pôles. Cependant, à cause des nombreuses irrégularités de la surface du globe, la démonstration de la petitesse de $\frac{B-A}{B}$ à l'aide du pendule exigerait un très-grand nombre d'observations, faites en plusieurs points de divers méridiens, qu'il faudrait ensuite soumettre au calcul. Mais la véritable méthode pour calculer $\frac{B-A}{B}$ réside dans la théorie actuelle, et je démontre que, si l'on admet que la latitude d'un lieu de la Terre ne peut changer de 2 secondes dans un espace de temps moindre que l'année, il en résulte que le rapport $\frac{B-A}{B}$ est plus petit qu'un millionième. »

André (Ch.). — *Parallaxe solaire déduite de la combinaison de l'observation de Nouméa avec celle de Saint-Paul.*

— Nous devons appeler l'attention de nos lecteurs étrangers sur une modification du Règlement, modification dont ils doivent prendre connaissance s'ils désirent envoyer des Communications. Dorénavant les Mémoires lus ou présentés par des personnes qui ne sont pas Membres ou Correspondants de l'Académie pourront être l'objet d'une analyse ou d'un résumé qui ne dépassera pas trois pages. Par conséquent les Notes destinées à être insérées *in extenso* ou les analyses de Mémoires devront être contenues dans trois pages des *Comptes rendus*. Les Communications des Membres et des Correspondants sont réduites respectivement à six et à quatre pages.

T. LXXXI; 2e semestre 1875.

**N° 1. Séance du 5 juillet 1875.**

Wolf (C.). — *Description du groupe des Pléiades et mesures micrométriques des positions des principales étoiles qui le composent.*

Stephan (E.). — *Planète* (146) *Lucine. Éléments de l'orbite.*

**N° 2. Séance du 12 juillet 1875.**

Carvallo (J.). — *Théorie des nombres parfaits.*

Le nombre parfait est égal à la somme de ses parties aliquotes (*Euclide*, p. 36, Liv. IX). Depuis Euclide, Descartes, Fermat, Legendre, Euler se sont occupés de ces nombres, mais sans grand succès. L'auteur démontre qu'il ne peut exister de nombre parfait impair, et il ajoute quelques propriétés générales des nombres parfaits.

Gaumet. — *Sur le miroir équerre, instrument destiné à tracer des angles droits sur le terrain et pouvant être utilisé dans la mesure rapide des grandes distances.*

Stephan (E.). — *Éphéméride calculée de la planète* (146) *Lucine.*

Peslin (H.). — *Théorie des tempêtes, conclusion.*

## N° 3. Séance du 19 juillet 1875.

Saint-Venant (de). — *De la suite qu'il serait nécessaire de donner aux recherches expérimentales de Plasticodynamique.*

Tresca. — *Observations relatives à la Communication précédente.*

Ledieu (A.). — *Observations relatives à la dernière Communication de M. Hirn. Importance de baser la nouvelle théorie de la chaleur sur l'hypothèse de l'état vibratoire des corps.*

Leveau. — *Sur la comète périodique de d'Arrest.*

Villarceau (Y.). — *Observations relatives à la Communication de M. Leveau.*

Flammarion (C.). — *Observation des satellites de Jupiter pendant les oppositions de* 1874 *et* 1875. *Détermination de leurs différences d'aspect et de leurs variations d'éclat.*

## N° 4. Séance du 26 juillet 1875.

Villarceau (Y.). — *Recherches sur la théorie de l'aberration, et considérations sur l'influence du mouvement absolu du système solaire dans le phénomène de l'aberration.*

Abbadie (A. d'). — *Sur la latitude d'Abbadia, près de Hendaye (Basses-Pyrénées).*

**N° 5. Séance du 2 août 1875.**

NICOLAIDÈS (N.). — *Intégration d'une équation aux différences partielles du second ordre.*

Il s'agit de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{2z}{(x+y)^2}$$

dont l'intégrale est

$$z = \frac{X+Y}{x+y} - \frac{1}{2}\left(\frac{X'}{y} + \frac{Y'}{y}\right).$$

FLAMMARION (C.). — *Variations d'éclat du quatrième satellite de Jupiter. Déductions relatives à sa constitution physique et à son mouvement de rotation.*

**N° 6. Séance du 9 août 1875.**

CHASLES (M.). — *Application de la méthode de correspondance à des questions de grandeur de segments sur les tangentes des courbes.*

« Les questions où entrent des conditions de grandeur de segments rectilignes, traitées jusqu'ici dans la théorie des courbes, sont extrêmement rares, même à l'égard des courbes les plus simples, les sections coniques; c'est que, indépendamment des difficultés de calcul qu'y trouvent les méthodes analytiques, leur solution implique en général la connaissance de l'*ordre* et de la *classe* des courbes, et est donc inaccessible à ces méthodes. Mais le principe de correspondance lève ces difficultés et impossibilités, comme dans beaucoup d'autres questions fort différentes qui ont été le sujet de Communications précédentes.

» Les relations de grandeur de segments rectilignes peuvent être très-variées et donner lieu à une immense quantité de recherches. Il faut donc, pour éviter la confusion, mettre un certain ordre dans le classement des matières. Aussi je ne considérerai ici que des conditions d'égalité de grandeur, et, en outre, les segments seront toujours pris sur les tangentes des courbes. Dans un autre moment, je les prendrai sur les normales, ou bien les uns sur des tangentes et d'autres sur des normales; puis viendront d'autres conditions beaucoup plus variées, et aussi d'autres relations de grandeur.

» I. *Le lieu des points d'où l'on mène à une courbe* $U^n$ *des tangentes de même grandeur est une courbe d'ordre* $2(m+n)$.

$$\left.\begin{array}{lll} x, & n2 & u \\ u, & 2m & x \end{array}\right| 2(m+n).$$

C'est-à-dire : D'un point $x$ d'une droite L on mène $n$ tangentes $xa$, et des points de contact $a$ on décrit des cercles de rayon donné $\lambda$, qui coupent L en $2n$ points $u$. D'un point $u$ on décrit un cercle de rayon $\lambda$, qui coupe $U^m$ en $2m$ points; les tangentes en ces points coupent L en $2m$ points $x$. Il y a donc $2m+2n$ coïncidences de $x$ et $u$. Donc la courbe cherchée est d'ordre $(2m+2n)$.

» Ses points à l'infini sont 2 points multiples d'ordre $n$, situés aux 2 points circulaires, et $m$ points doubles situés aux $m$ points de la courbe $U^n$.

» II. *Le lieu d'un point $x$ d'où l'on mène à une courbe* $U^{n'}$ *une tangente sur laquelle une courbe* $U^m$ *intercepte un segment, terminé au point $x$, de grandeur constante, est une courbe de l'ordre* $4mn'$.

$$\left.\begin{array}{lll} x, & n'm2 & u \\ u, & 2mn' & x \end{array}\right| 4mn'.$$

C'est-à-dire : D'un point $x$ de L on mène $n'$ tangentes qui coupent $U^m$ en $n'm$ points $a$, d'où l'on décrit des cercles de rayon donné $\lambda$ qui coupent L en $2n'm$ points $u$. D'un point $u$ on décrit un cercle de rayon $\lambda$ qui coupe $U^m$ en $2m$ points $a$, d'où l'on mène $2mn'$ tangentes qui coupent L en $2mn'$ points $x$. Donc $4mn'$ coïncidences de $x$ et $u$. Donc, etc.

» La courbe a, à l'infini, 2 points multiples d'ordre $mn'$ aux 2 points circulaires, et en chacun des $m$ points de $U^m$ un point de $n'$ inflexions dont les tangentes d'inflexion sont les $n'$ tangentes de $U^{n'}$.

» III. *a. Le lieu d'un point $x$ d'où l'on mène à une courbe* $U^n$ *une tangente égale à la distance du point $x$ à un point fixe* O *est une courbe de l'ordre* $2m+n$.

$$\left.\begin{array}{lll} x, & 2m & u \\ u, & n & x \end{array}\right| 2m+n.$$

C'est-à-dire : D'un point $x$ de L on décrit un cercle du rayon $x$O, qui coupe $U^n$ en $2m$ points $\theta$; les tangentes en ces points coupent L en $2m$ points $u$. D'un point $u$ on mène $n$ tangentes de $U^n$; pour chacune d'elles, il y a sur L un point $x$ à égale distance du point de contact et du point O; donc $n$ points $x$. Ainsi $2m+n$ coïncidences de $x$ et $u$. Donc, etc.

» Les $2m+n$ points de la courbe situés à l'infini sont les $m+n$ points des tangentes de $U^n$ aux pieds des normales abaissées du point O, et les $m$ points de la courbe $U^n$.

» III. *b. Le lieu d'un point $x$ d'où l'on mène à deux courbes* $U^n$, $U^{n'}$ *deux tangentes de même longueur est une courbe de l'ordre* $2mn'+2m'n+nn'$.

$$\left.\begin{array}{lll} x, & n2m' & u \\ u, & n'(2m+n) & x \end{array}\right| 2mn'+2m'n+nn'.$$

C'est-à-dire : D'un point $x$ de L on mène $n$ tangentes $x\theta$ de $U^n$, et l'on décrit des cercles de rayons $x\theta$ qui coupent $U^{n'}$ en $n\,2m'$ points $\theta$ dont les tangentes coupent L en $2nm'$ points $u$. D'un point $u$ on mène $n'$ tangentes $u\theta'$; il existe sur L, d'après (III. $a$), $2m+n$ points $x$, d'où l'on mène à $U^n$ une tangente égale à la distance du point $x$ à un point $\theta'$ de $U^{n'}$; donc $n'(2m+n)$ points $x$ pour les $n'$ tangentes $u\theta'$. Il y a ainsi $2mn'+2m'n+nn'$ coïncidences de $x$ et $u$. Donc, etc.

» Les points de la courbe situés à l'infini sont $m$ points multiples d'ordre $2n'$ situés aux $m$ points de $U^n$, $m'$ points multiples d'ordre $2n$ situés aux $m'$ points de $U^{n'}$, et $nn'$ points simples appartenant à des perpendiculaires aux $nn'$ tangentes communes aux deux courbes $U^n$, $U^{n'}$.

» IV. *a. Le lieu d'un point $x$ d'où l'on mène à une courbe* $U^n$ *une tangente égale à la distance du point de contact à un point* O *est une courbe d'ordre $m+2n$.*

$$\left.\begin{array}{lll} x, & n2 & u \\ u, & m & x \end{array}\right| m+2n.$$

C'est-à-dire : D'un point $x$ on mène $n$ tangentes $u\theta$ à $U^n$, et de leurs points de contact on décrit des cercles de rayons $\theta$O qui coupent L en $2n$ points $u$. Un point $u$ donne lieu à $m$ points $\theta$ de $U^n$, à égale distance de O et de $u$, dont les tangentes coupent L en $m$ points $x$. Il y a donc $m+2n$ coïncidences de $x$ et $u$. Donc, etc.

» Les points de la courbe à l'infini sont 2 points multiples d'ordre $n$ situés aux 2 points circulaires, et les $m$ points de $U^n$.

» IV. *b. Le lieu d'un point $x$ d'où l'on mène à une courbe* $U^n$ *une tangente $x\theta$ égale à une tangente $\theta\theta'$ menée du point de contact $\theta$ à une autre courbe* $U^{n'}$ *est une courbe de l'ordre $2mm' + 2mn' + mn'$.*

$$\begin{array}{lll|l} x, & nn'2 & u & \\ u & (2m'+n')m & x & \end{array} (2m'+n')m + 2nn'.$$

C'est-à-dire : D'un point $x$ de L on mène $n$ tangentes $x\theta$, puis, des points de contact $\theta$, $nn'$ tangentes $\theta\theta'$ de $U^{n'}$, et l'on prend sur L les $2nn'$ points $x$ à distance $\theta u = \theta\theta'$. Un point $u$ donne lieu, en vertu du théorème III. $a$, à $(2m'+n')m$ points $\theta$ pour lesquels on a $\theta u = \theta\theta'$; les tangentes en ces points coupent L en $(2m'+n')m$ points $x$. Il y a $(2m'+n')m + 2nn'$ coïncidences de $x$ et $u$. Donc, etc.

» Les points de la courbe situés à l'infini sont 2 points multiples d'ordre $nn'$ aux 2 points circulaires, $m$ points multiples d'ordre $n'$ aux $m$ points de $U^n$, et $mm'$ points doubles aux $m'$ points de $U_{m'}$.

» V. *Le lieu d'un point d'où l'on mène à une courbe* $U^{n'}$ *une tangente égale à un segment compris sur cette droite entre son point de contact et une courbe* $U_m$ *est une courbe d'ordre $m(m'+2n')$.*

$$\begin{array}{lll|l} x, & n'm2 & u & \\ u, & (m'+2n')m & x & \end{array} m(m'+4n') \quad (\text{IV}.\, a).$$

» Il y a $2mn'$ solutions étrangères dues aux points $x$ de L qui se trouvent sur les tangentes de $U^{n'}$ issues des 2 points circulaires de l'infini. Il reste $m(m'+2n')$ coïncidences de $x$ et $u$. Donc, etc.

» La courbe a, à l'infini, $m$ points multiples d'ordre $2n'$ aux $m$ points de $U_m$, et $m'$ points multiples d'ordre $m$ situés aux $m'$ points de $U^{n'}$.

» VI. *a. Le lieu d'un point $x$ pris sur chaque tangente d'une courbe* $U^n$ *à une distance d'un point O égale à la distance de ce point O au point de contact $\theta$ de la tangente est une courbe de l'ordre $2(m+n)$.*

$$\begin{array}{lll|l} x, & n2 & u & \\ u, & 2m & x & \end{array} 2m + 2n.$$

» Donc, etc.

» La courbe a deux points multiples d'ordre $n$ aux deux points circulaires de l'infini, et $m$ points doubles aux $m$ points de $U^*$.

» VI. *b. Le lieu d'un point $x$ d'où l'on mène à une courbe* $U^n$ *une tangente $x\theta$, satisfaisant à la condition qu'une tangente $\theta\theta'$ menée du point de contact $\theta$ à une courbe* $U^{n'}$ *soit égale à la distance de son point de contact $\theta'$ au point $x$, est une courbe de l'ordre* $2(m+n)n'+mm'$.

$$\begin{array}{lll|l} x, & nn'2 & u & \\ u, & (m'+2n')m & x & \end{array} \; 2nn'+(m'+2n')m.$$

C'est-à-dire : D'un point $x$ on mène, à $U^n$, $n$ tangentes $x\theta$, et de leurs points de contact on mène $n'n''$ tangentes $\theta\theta'$ à la courbe $U^{n''}$; les cercles décrits des points de contact $\theta'$ avec les rayons $\theta'\theta$ coupent L en $2nn'$ points $u$. Un point $u$ étant pris sur L, il existe, sur $U^{n'}$, $(m'+2n')m$ points $\theta$ tels, que $\theta\theta' = \theta'u$ (d'après le théorème IV. $a$); les tangentes aux point $\theta$ coupent L en $(m'+2m')m$ points $x$. Il y a donc $(m'+2n')m+2nn'$ coïncidences de $x$ et $u$. Donc, etc.

» La courbe a, à l'infini, deux points multiples d'ordre $nn'$, $m$ points multiples d'ordre $2n'$ aux $m$ points de $U_m$, et $mm'$ points simples sur les tangentes de $U^n$ aux $m'm$ points de cette courbe situés sur les tangentes des $m'$ points de $U^{n'}$ à l'infini.

» VII. *La tangente en chaque point $\theta$ d'une courbe* $U^{n'}$ *rencontre une courbe* $U^m$ *en $m$ points $a$ : les milieux des $m$ segments $\theta a$ sont sur une courbe d'ordre* $m(m'+n')$.

$$\begin{array}{lll|l} x, & n'm & u & \\ u, & (m'+2n')m & x & \end{array} \; m(m'+3n').$$

C'est-à-dire : D'un point $x$ de L on mène $n'$ tangentes $x\theta$ de $U^n$, dont chacune coupe $U^n$ en $m$ points $a$; des perpendiculaires élevées sur le milieu de chaque segment $\theta a$ coupent L en $m$ points $u$, ce qui fait $n'm$ points $u$ pour les $n'$ tangentes $x\theta$. Un point $u$ donne lieu à $(m'+2n')m$ tangentes $\theta a$, pour lesquelles $u\theta = ua$ (théorème IV. $a$); ces tangentes coupent L en $(m'+2n')m$ points $x$. Donc $m(m'+3n')$ coïncidences de $x$ et $u$.

» Il y a $2mn'$ solutions étrangères dues aux points $x$ de L situés sur les tangentes de $U^{n'}$ passant par les 2 points circulaires de l'infini. Il reste $m(m'+n')$. Donc, etc.

» Les points de la courbe à l'infini sont $m$ points multiples d'ordre $n$ situés aux $m'$ de $U^{n'}$, et $mm'$ points simples situés sur les tangentes de $U^{n'}$ aux $mm'$ points d'intersection des 2 courbes.

» VIII. *Le lieu d'un point $x$ d'où l'on peut mener à une courbe $U^{n'}$ une tangente $x\theta$ qui soit divisée en son milieu par une courbe $U_m$ est une courbe de l'ordre $m\,(m'+n')$.*

$$\begin{array}{lll|l} x, & n'm & u & \\ u, & mm' & x & \end{array}\; m\,(m'+n').$$

C'est-à-dire : D'un point $x$ on mène $n'$ tangentes $x\theta$ de $U^{n'}$ ; les perpendiculaires élevées sur le milieu de chaque tangente coupent $U^m$ en $m$ points, et les droites menées de ces points au point de contact de la tangente coupent L en $m$ points $u$, ce qui fait $n'm$ points $u$. Les droites menées d'un point $u$ de L à des points $\theta$ de $U^{n'}$ ont leurs milieux sur une courbe d'ordre $m'$ (VI) ; conséquemment $m'm$ droites $u\theta$ ont leurs milieux sur $U^m$ ; les tangentes en $x$ points $\theta$ coupent L en $mm'$ points $x$. Il y a $m(m'+n')$ coïncidences de $x$ et $u$. Donc, etc.

» Les points de la courbe à l'infini sont $m$ points multiples d'ordre $n$ situés aux $m$ points de $U^m$, et $m'$ points multiples d'ordre $m$ situés aux $m'$ points de $U^{n'}$.

» IX. *a. Le lieu d'un point $x$ d'où l'on mène à une courbe $U^n$ une tangente dont le point de contact soit à la même distance d'un point O que le point $x$, est une courbe de l'ordre $2\,(m+n)$.*

$$\begin{array}{lll|l} x, & n2 & u & \\ u, & 2m & x & \end{array}\; 2(m+n).$$

» Donc, etc.

» La courbe a, à l'infini, 2 points multiples d'ordre $n$ aux 2 points circulaires, et $m$ points doubles aux $m$ points de $U^n$.

» IX. *b. Le lieu d'un point $x$ d'où l'on mène à une courbe $U^n$ une tangente $x\theta$ telle, que la tangente $\theta\theta'$ menée de son point de contact $\theta$ à une courbe $U^{n'}$ soit égale à la distance de son point de contact $\theta'$ au point $x$, est une courbe de l'ordre $mm'+2mn'+2nn'$.*

$$\begin{array}{lll|l} x, & nn'2 & u & \\ u, & (m'+2n')m & x & \end{array}\; mm'+2mn'+2nn'.$$

C'est-à-dire : D'un point $x$ de L on mène $n$ tangentes $x\theta$, et des points de contact $\theta$ on mène $nn'$ tangentes $\theta\theta'$, puis des points de contact $\theta'$ on décrit des cercles qui coupent L en $2nn'$ points $u$. Un point $u$ étant pris sur L, il existe (en vertu du théorème IV. *a*) $(m' + 2n')m$ points $\theta$ de $U^n$, tels que $\theta\theta' = \theta' u$; les tangentes en ces points $\theta$ coupent L en $(m' + 2n')m$ points $u$. Donc $mm' + 2mn' + 2nn$ coïncidences de $x$ et $u$. Donc, etc.

» La courbe a, à l'infini, deux points multiples d'ordre $nn'$ aux deux points circulaires, $m$ points multiples d'ordre $2n'$ aux $m$ points de $U^m$, et $mm'$ points simples appartenant aux tangentes de $U^n$, dont les points de contact $\theta$ sont les points d'intersection de $U^n$ par les $m'$ asymptotes de $U^{n'}$.

» Observation. — 1. Dans tous les théorèmes qui précèdent, j'ai indiqué, après chaque démonstration, la nature et la position des points multiples ou simples de chaque lieu géométrique qui se trouvent sur la droite de l'infini; points déterminés directement, d'après les conditions de la question, sans intervention du principe de correspondance, et qui par conséquent offrent une vérification du résultat de la démonstration générale, vérification bien propre à inspirer confiance dans la méthode purement géométrique dont il s'agit.

» 2. Je me suis borné à des questions impliquant la considération d'une ou de deux courbes seulement; mais dans une prochaine Communication j'étendrai le procédé de démonstration à des questions relatives à trois et quatre courbes. »

Bonnet (O.). — *Remarque sur la Note de M. Nicolaïdès, insérée dans le précédent « Compte rendu ».*

« L'équation aux différentielles partielles du second ordre dont M. Nicolaïdès a donné l'intégrale dans le *Compte rendu* de lundi dernier ne présente aucune difficulté; elle rentre, en effet, dans un type auquel s'applique immédiatement la méthode par cascade de Laplace.

» Observons d'abord que, en prenant pour variables indépendantes les fonctions $f$ et $f_1$, que nous appellerons $x$ et $y$, l'équation dont il s'agit prend la forme simple

$$(x+y)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2z. \tag{1}$$

Cette équation ne s'intégrant pas immédiatement, je pose

$$(x+y)^2\frac{\partial z}{\partial x}=z_1,$$

d'où

$$(x+y)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+2(x+y)\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z_1}{\partial y},$$

d'où

$$(x+y)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial z_1}{\partial y}-\frac{2z_1}{x+y},$$

ce qui permet de remplacer l'équation (1) par

$$\frac{\partial z_1}{\partial y}-\frac{2z_1}{x+y}=2z; \tag{2}$$

différentiant par rapport à $x$, afin de chasser $z$, il vient

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}-2\frac{\frac{\partial z_1}{\partial x}}{x+y}=0,$$

équation qui s'intègre immédiatement et donne

$$\frac{\partial z_1}{\partial x}=X(x+y)^2,$$

X étant une fonction quelconque de $x$, d'où

$$z_1=Y+\int X(x+y)^2dx,$$

Y étant une fonction de $y$; ou bien, en remplaçant X par une dérivée troisième X''', de façon à chasser le signe d'intégration,

$$z_1=Y+X''(x+y)^2-2X'(x+y)+2X.$$

Reste à trouver $z$. Or

$$(x+y)^2\frac{\partial z}{\partial x}=z_1;$$

donc

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{Y}{(x+y)^2}+X''-\frac{2X'}{x+y}+\frac{2X}{(x+y)^2},$$

d'où

$$z=Y_1-\frac{Y}{x+y}+X'-\frac{2X}{x+y}.$$

» Cette valeur est trop générale; mais, si nous exigeons que l'équation (2) soit satisfaite, on trouve $2Y_1 = Y'$; donc, en changeant Y en $2Y$, on a

$$z = X' + Y' - 2\frac{X+Y}{x+y}.$$

C'est le résultat de M. Nicolaïdès.

» Si du cas de deux variables indépendantes $x$, $y$ on veut s'élever au cas de $n$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on cherchera, en se laissant guider par l'analogie, ce que doit être la constante A pour que l'équation

$$(1) \qquad \frac{\partial^n z}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} = \frac{Az}{(x_1 + x_2 + \ldots + x^n)_n}$$

admette une intégrale de la forme

$$z_1 X_1 + X'_1$$

($X_1$ étant une fonction arbitraire de $x_1$, et $X'_1$ la dérivée de $X_1$ par rapport à $x_1$), par conséquent $n-1$ autres intégrales de la forme

$$\begin{gathered} z_2 X_2 + X'_2, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ z_n X_n + X'_n, \end{gathered}$$

et enfin une intégrale générale de la forme

$$z_1 X_1 + z_2 X_2 + \ldots + z_n X_n + X'_1 + X'_2 + \ldots + X'_n.$$

Or, en substituant $z_1 X_1 + X'_1$ à $z$ dans (1), on trouve

$$\begin{aligned} &X_1 \frac{\partial^n z_1}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} + X'_1 \frac{\partial^{n-1} z_1}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} \\ &\quad = X_1 \frac{A z_1}{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^n} + X'_1 \frac{A}{(x_1 + \ldots + x_n)^n}, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\partial^n z_1}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} = \frac{A z_1}{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^n}, \quad \frac{\partial^{n-1} z_1}{\partial x_2 \partial x_3 \ldots \partial x_n} = \frac{A}{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^n}.$$

Différentiant la deuxième équation par rapport à $x_1$ et retranchant de la première, il vient

$$z_1 = \frac{-n}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n},$$

d'où, en portant dans la deuxième équation,

$$A = (-1)^n . 1.2.3 \ldots n.$$

Ainsi l'équation (1) doit être de la forme

$$\frac{\partial^n z}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} = \frac{(-1)^n . 2.3 \ldots n}{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^n} z,$$

et sa première intégrale est

$$\frac{-n X_1}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} + X_1';$$

par suite les $(n-1)$ autres intégrales sont

$$\frac{-n X_2}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} + X_2',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{-n X_n}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} + X_n',$$

et enfin l'intégrale générale a pour valeur

$$\frac{-n(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} + X_1' + X_2' + \ldots + X_n'. \text{ »}$$

## N° 7. Séance du 16 août 1875.

Le Verrier (U.-J.). — *Observations méridiennes des petites planètes, faites à l'Observatoire de Greenwich (transmises par l'Astronome Royal M. G.-B. Airy) et à l'Observatoire de Paris pendant le deuxième trimestre de l'année* 1875.

Tisserand (F.). — *Observation des étoiles filantes des* 9, 10 *et* 11 *août.*

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, rédigées par MM. GERONO et Ch. BRISSE.

T. XIV (2e série), janvier-juillet 1875 [1].

WAILLE (I.). — *Génération des lignes et des surfaces du second degré d'après Jacobi.* (16 p.)

Il s'agit dans cet article des propriétés métriques focales des surfaces et des courbes du second degré. On sait que Jacobi a trouvé dans les beaux théorèmes d'Ivory, relatifs aux points correspondants, le moyen d'étendre aux surfaces du second ordre les propriétés métriques focales des sections coniques [2]. Le travail de Jacobi a paru dans le deuxième Cahier du tome LXXIII du *Journal de Borchardt.* Dans le troisième Cahier du même tome a paru un travail de M. Hermes sur le même sujet. Enfin, nous citerons un Mémoire de M. Darboux où le même mode de génération est étudié et étendu aux cyclides.

CAHEN (Ch.-Ph.). — *Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements.* (10 p.)

Cette courbe remarquable est engendrée par un point de la circonférence d'un cercle qui roule intérieurement sans glisser sur la circonférence d'un cercle de rayon triple.

Steiner a énoncé sans démonstration un grand nombre de ses propriétés; M. Cremona les a démontrées, et a donné des propriétés nouvelles dans le *Journal de Borchardt* (année 1865, p. 101). Son Mémoire est suivi d'une courte Note dans laquelle Clebsch rattache la théorie de cette courbe à celle des lignes unicursales. Citons encore un travail de M. Painvin inséré dans les *Nouvelles Annales.* M. Cahen établit, d'une manière très-simple et très-élémentaire, les propriétés principales de la courbe.

PICART (A.). — *Discussion algébrique de l'équation en* $\lambda$. (6 p.)

Il est question de l'équation qui détermine les couples de sécantes, passant par l'intersection de deux coniques. L'auteur établit, par une voie purement analytique, les propriétés remarquables

---

(1) Voir *Bulletin*, t. VIII, p. 25.

(2) Voir *Bulletin*, t. IV, p. 64, et t. V, p. 64.

de cette équation dans le cas où il y a un ou trois couples de sécantes réelles.

Laurent (H.). — *Sur la séparation des racines des équations.*

L'auteur fait connaître une proposition analogue à celle que M. Hermite a donnée en premier lieu, pour remplacer le théorème de Sturm, mais qui est comprise comme cas particulier dans les théorèmes plus généraux donnés depuis par M. Hermite.

Posse (C.). — *Sur les quadratures.* (14 p.)

Cet article traite de questions semblables à celles qui ont fait, à diverses reprises, l'objet des études de MM. Tchebychef et Hermite. Il se propose de résoudre la question suivante :

« Trouver la forme de la fonction $f(x)$ qui, restant positive entre les limites $-1$ et $+1$ de la variable, donne

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\varphi(x)\,dx = \mathrm{K}[\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_n)] \\ + a_{2n}\varepsilon + a_{2n+1}\varepsilon' + \ldots,$$

K étant indépendant de la forme de $\varphi(x)$ et

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{2n} x^{2n} + a_{2n+1} x^{2n+1} + \ldots \text{ »}$$

Le travail contient plusieurs formules élégantes ; mais l'exposition nous a paru trop condensée, eu égard à la nature du Recueil.

Maleyx (L.). — *Détermination des diviseurs à coefficients commensurables, d'un degré donné, d'un polynôme entier en $x$ à coefficients commensurables.* (23 p.)

Généralisation de la théorie des racines commensurables, et extension des principaux résultats de cette théorie. L'auteur applique sa méthode générale aux diviseurs du premier, du second et du troisième degré.

Floquet. — *Intégration de l'équation d'Euler par les lignes de courbure de l'hyperboloïde réglé.* (8 p.)

L'auteur, en prenant pour déterminer un point les paramètres des deux génératrices rectilignes passant en ce point, montre que l'équation différentielle des lignes de courbure devient, avec ce choix de variables, la célèbre équation d'Euler, d'où résulte un procédé nouveau d'intégration de cette équation.

MOUTIER (J.). — *Sur la diacaustique d'une surface plane.*

Indication d'une méthode élémentaire pour la détermination de cette diacaustique.

SANCERY (L.). — *Propriétés des quadrilatères complets qui ressortent de la considération de leurs bissectrices.*

M. Mansion a démontré, dans les *Nouvelles Annales* (2e série, t. I, p. 16 et 65), une belle proposition de Steiner relative à un quadrilatère complet et à ceux qu'on en dérive à l'aide des douze bissectrices de ses angles. L'auteur indique plusieurs autres propriétés intéressantes des mêmes quadrilatères.

LEMONNIER (H.). — *Expression de s comme quotient de deux déterminants.*

LEMONNIER (H.). — *Détermination du paramètre d'une section parabolique dans un hyperboloïde à une nappe.*

JOFFROY (J.). — *Démonstration géométrique de l'inégalité*

$$a - \sin a < \frac{a^3}{4}.$$

LEMONNIER (H.). — *Foyers et directrices des surfaces du second ordre.*

MALEYX (L.). — *Propriétés de la strophoïde. Démonstration d'un théorème de Poncelet. Propriétés des surfaces anallagmatiques.* (2 art.; 23-18 p.)

PELLET. — *Expression de la somme des puissances semblables des racines d'une équation en fonction des coefficients.* (6 p.)

Simplification de la démonstration donnée dans l'Algèbre supérieure de la formule bien connue que Waring a établie dans ses *Meditationes algebraicæ.*

LUCAS (Éd.). — *Sur la théorie des sections coniques.* (4 p.)

Démonstrations simples de plusieurs théorèmes importants, relatifs aux triangles conjugués, inscrits, circonscrits.

NIEWENGLOWSKI. — *Trouver la plus petite corde d'une ellipse qui soit normale à l'une de ses extrémités.*

SALTEL. — *Sur la détermination analytique du centre d'une section plane faite dans une surface du second ordre.*

Realis (S.). — *Simples remarques sur les racines entières des équations cubiques.* (10 p.)

Vachette. — *Permutations rectilignes de $2q$ lettres égales deux à deux où trois lettres consécutives sont toujours distinctes.* (9 p.)

Jullien (A.). — *Ellipse considérée comme projection oblique d'un cercle. Construction simplifiée des axes d'une ellipse dont on connaît deux diamètres conjugués.*

---

JOURNAL für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von C.-W. Borchardt.

T. LXXIX; 1875.

Heine (E.). — *Sur les courants électriques constants dans des plaques planes.* (16 p.)

Lorsqu'il y a un nombre fini de points $A_1, A_2, \ldots$, par lesquels un courant entre dans une plaque ou bien en sort, et que le courant est devenu stationnaire, M. Kirchhoff a montré que, pour trouver l'intensité du courant en un point quelconque de la plaque, il faut calculer le potentiel V de l'électricité libre en ce point, et qu'on peut dès lors remplacer le problème par cet autre : « Trouver une fonction V des coordonnées rectangulaires, qui satisfasse en chaque point P de la plaque plane à l'équation différentielle $\Delta V = 0$ du potentiel logarithmique, qui devienne infinie comme

$$E_1 \log PA_1 + E_2 \log PA_2 + \ldots,$$

quand le point P s'approche d'un des points $A_1, A_2, \ldots$, la somme des constantes E étant égale à zéro; qui satisfasse en tous les autres points aux conditions connues de continuité pour des potentiels, et enfin qui s'évanouisse quand on la différentie suivant la normale du bord. M. Kirchhoff a encore réussi à déterminer complétement la fonction V pour des plaques circulaires ou infinies, et son analyse s'est trouvée d'accord avec l'expérience (1).

(1) *Poggendorff's Annalen*, t. LXIV, LXVII, XCVII.

En se reportant à ces recherches, M. Heine développe le potentiel électrique, d'abord pour des plaques homogènes dont on connaît la représentation conforme sur l'intérieur d'un cercle, savoir pour des plaques rectangulaires et elliptiques. Ces résultats sont susceptibles d'être appliqués à des plaques qu'on peut engendrer par une représentation conforme d'un rectangle, pourvu que l'on connaisse les systèmes de lignes orthogonales qui correspondent aux droites parallèles aux côtés du rectangle. La seconde Partie du Mémoire s'occupe de la résolution des mêmes problèmes par une méthode analytique, indépendante des formules connues de la représentation, la difficulté étant surtout de développer le logarithme d'une distance. A cette occasion, M. Heine revient à sa définition d'une fonction *continue* de plusieurs variables. Si la fonction $f(x,y)$ est continue séparément pour chacune des deux variables $x,y$, il l'appelle continue en chaque point suivant les directions de ces variables; au contraire, il appelle la continuité *indifférente* (*gleichmässig*) lorsqu'elle a lieu indifféremment pour tous les points et en tous sens.

HERMITE (Ch.). — *Extrait d'une Lettre à M. Borchardt sur la réduction des formes quadratiques ternaires.* (4 p.; fr.)

La Lettre se rapporte à la limitation du produit des coefficients des carrés des variables dans les formes quadratiques ternaires réduites.

DU BOIS-REYMOND (P.). — *Essai d'une classification des fonctions arbitraires d'arguments réels d'après leurs variations dans les intervalles très-petits.* (17 p.)

Voici la classification des fonctions discutée par l'auteur dans les différentes parties de son Mémoire : I. La fonction sans aucune restriction. — II. La fonction intégrable. — III. La fonction continue. Cette partie du Mémoire est enrichie d'une Communication de M. Weierstrass concernant la fonction

$$f(x) = \sum_0^\infty n\,[b^n \cos(a^n x)\pi],$$

où $a$ est un nombre entier impair, $b$ une constante positive, et $f(x)$ une fonction continue de $x$ qui ne possède nulle part un coefficient différentiel, tant que la valeur du produit $ab$ surpasse une certaine limite. — IV. La fonction différentiable et la fonction ordinaire. — V. La fonction soumise aux conditions de Dirichlet. Les autres parties du Mémoire contiennent encore : VI. Des remarques sur la classification proposée. — VII. La manière dont la fonction s'approche de ses valeurs séparées. — VIII. Les singularités de la fonction. — IX. Distribution des singularités, telles que les racines de

$$0 = \sin \cfrac{1}{\sin \cfrac{1}{\sin \cdots \cfrac{1}{\sin \frac{1}{x}}}}.$$

Du Bois-Reymond (P.). — *Théorèmes généraux sur la portée des formules intégrales qui servent à la représentation des fonctions arbitraires.* (29 p.)

La formule de Fourier $\int_0^\infty ds \int_{-\infty}^\infty d\beta f(\beta) \cos \alpha(\beta - x) = \pi f(x)$ a été l'objet de deux autres Mémoires du même auteur : 1° *Sur les propriétés générales de la classe d'intégrales doubles* où est comprise l'intégrale de Fourier (1) ; 2° *La théorie des intégrales et des formules de Fourier* (2). L'auteur s'y était proposé d'éclaircir deux questions : Quel est le rôle joué par les cosinus, et par quelle fonction peut-on le remplacer? A quelle condition la formule représente-t-elle aussi des fonctions de plusieurs variables, si l'on remplace l'intégrale double par des intégrales multiples? Le but principal du nouveau Mémoire est de soumettre à un examen détaillé la nature de la fonction $f(x)$ ; une telle recherche fait voir pour quelles fonctions mathématiques imaginables la fonction de Fourier ou bien celles qu'on a modelées sur elle peuvent encore être valables. M. du Bois-Reymond, tout en partant de deux formules générales qui servent de fondement à ses recherches antérieures, a découvert certaines restrictions que la fonction $f(x)$ doit subir pour que la formule puisse s'appliquer, et il les a énoncées dans neuf

(1) *Journal de Borchardt*, t. LXIX, p. 65.
(2) *Mathematische Annalen*, t. IV, p. 362.

théorèmes généraux, qui contiennent les critères essentiels et suffisants pour les cas ordinaires. La généralité du problème est tellement exceptionnelle qu'on ne peut pas s'étonner de ne pas trouver de critères qui épuisent à fond le sujet. De même, on ne sait pas établir des critères complets pour la convergence de toutes les séries possibles, et la considération des intégrales de Fourier paraît présenter des difficultés d'un ordre supérieur.

STERN (M.). — *Sur la théorie des nombres eulériens.* (32 p.)

En développant $\frac{1}{\cos hx}$ ou bien $\frac{2}{e^x+e^{-x}}$ suivant des puissances croissantes de $x$, on obtient une série qu'on peut écrire ainsi :

$$\frac{2}{e^x+e^{-x}} = F(x) = 1 - \frac{E_1 x^2}{1.2} + \frac{E_2 x^4}{1.2.3.4} - \frac{E_3 x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots.$$

Raabe et après lui d'autres géomètres, qui ont étudié les propriétés des coefficients $E_1, E_2, \ldots$, leur ont donné le nom de *nombres eulériens,* et l'on avait déjà reconnu qu'ils possédaient quelques caractères distinctifs, par exemple que $E_{2k}$ se termine par le chiffre 5, $E_{2k+1}$ par 1, etc.

M. Stern se procure, par un procédé qui se distingue un peu de celui que nous venons de signaler, une série de nombres analogues, mais plus généraux. Si l'on différentie $F(x)$ plusieurs fois, on verra que, en posant $z = \left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^2$, on aura

$$F^{(2n)}(x) = (-1)^n \frac{2}{e^x+e^{-x}} \left[a^{(2n)} - a_1^{(2n)} z + a_2^{(2n)} z^2 - \ldots \pm a_n^{(2)} z^n\right],$$

$$F^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{2z}{e^x-e^{-x}} \left[a^{(2n+1)} - a_1^{(2n+1)} z + a_2^{(2n+1)} z^2 - \ldots \pm a_n^{(2n+1)} z^n\right],$$

où $(2n)$ et $(2n+1)$ désignent des indices, et tous les coefficients $a$ ne contiennent plus $x$. Comme l'on a $F^{(2n)}(0) = (-1)^n a^{2n}$ et aussi $(-1)^n F^{(2n)}(0) = E_n$, il s'ensuit que $E_n = a^{(2n)} = a^{(n-1)}$. La série $a^{(\alpha)}$ comprend donc chaque nombre eulérien deux fois; les autres séries $a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}, \ldots$ pourront se nommer *nombres eulériens d'ordre supérieur.*

Il n'est pas possible d'énumérer ici tous les résultats auxquels M. Stern parvient dans son Mémoire, résultats qu'avaient trouvés *en partie* avant lui MM. Scherk, Sylvester, etc. Cependant il est intéressant de rencontrer à la fin un caractère général de ces nombres. Les nombres eulériens de tous les ordres appartiennent à une espèce particulière de séries qu'on n'a pas encore considérée jusqu'à présent; elles tiennent une position intermédiaire entre les séries en général et les séries à différences constantes; car ici les différences ne sont pas absolument constantes, mais relativement; c'est-à-dire que, à partir d'un terme déterminé, la $(n-1)^{\text{ième}}$ série au moins des différences est constante pour les $n$ derniers chiffres de ces nombres.

Sturm (R.). — *Produits, systèmes élémentaires et caractéristiques des courbes gauches cubiques.* (41 p.)

La théorie des caractéristiques des courbes gauches doit commencer par les cubiques qui ressemblent en quelque sorte aux coniques planes. On en trouve quelques cas dans les travaux de plusieurs auteurs. M. Sturm donne maintenant le commencement des résultats qu'il a obtenus en étudiant à part ce sujet. Un résumé des résultats obtenus se trouve à la fin du Mémoire; un second Mémoire du tome LXXX nous y ramènera.

Milinowski. — *Sur une correspondance réciproque du second degré.* (19 p.)

Imaginons dans un plan trois systèmes homographiques $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2$; supposons de plus qu'au point de concours $X_{0,1}$ de deux droites $x_0$ et $x_1$, homologiques de $\Sigma_0$ et $\Sigma_1$, corresponde la droite $x_2$ homologue de $\Sigma_2$, de même qu'à la droite $x_{0,1}$, qui joint deux points homologues $X_0$ et $X_1$ de $\Sigma_0$ et $\Sigma_1$ correspond, le point homologue $X_2$ de $\Sigma_2$. Toutes les droites $x_{0,1}$ et tous les points $X_{0,1}$ forment un nouveau système $\Sigma_{0,1}$, réciproque de $\Sigma_2$.

Il s'agit de résoudre le problème de la correspondance de ces deux systèmes; par exemple : « Qu'un point ou une droite d'un des systèmes réciproques se meuve d'après une loi fixée, d'après quelle loi se meut la droite correspondante ou le point correspondant? »

Reye (Th.). — *Sur des surfaces algébriques qui sont apolaires l'une à l'autre.* (17 p.)

Nous avons déjà donné (*Bulletin*, t. VII, p. 252) un résumé succinct de plusieurs Mémoires de M. Reye où il a exposé les idées fondamentales de ses nouvelles recherches géométriques. Alors il avait montré que toute surface $\Phi^n$ de la $n^{\text{ième}}$ classe possède des surfaces polaires par rapport à des plans simples, à des groupes de plans et aussi à des surfaces $F^k$ d'ordre $k$, si $k < n$. Cependant il y a des surfaces $F^k$ apolaires à $\Phi^n$, auxquelles chaque surface de la $(n-k)^{\text{ième}}$ classe peut être rapportée comme polaire.

Le nouveau travail étend la définition des surfaces d'ordre $k$ apolaires à $\Phi^n$, de manière qu'on peut l'appliquer au cas $k > n$. Cette extension dérive surtout d'une considération qui fait voir que les relations mutuelles de deux surfaces apolaires l'une à l'autre, $\Phi^n$ et $F^k$, sont tout à fait réciproques, qu'on peut donc échanger $F^k$ et $\Phi^n$, et dire que, si $F^k$ est apolaire à $\Phi^n$, $\Phi^n$ est apolaire à $F^k$. Ces relations réciproques des deux surfaces ne se détruisent pas par des transformations collinéaires et réciproques; elles constituent, en effet, des propriétés d'invariants entre les deux surfaces. Par conséquent, la théorie des surfaces apolaires mène rapidement à de remarquables covariants et invariants de surfaces et de courbes algébriques. Enfin on peut la généraliser sans difficulté et l'appliquer à la théorie des formes algébriques à plus de quatre variables.

Malet (J.-C.). — *Nouvelle démonstration de la réduction des intégrales hyperelliptiques à la forme normale.* (6 p.; angl.)

Soit $R(x)$ une fonction algébrique rationnelle quelconque de $x$, et soit

$$X = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{2m}),$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_{2m}$ dénotent des quantités réelles positives ou négatives; l'intégrale $\int \frac{R(x)\,dx}{\sqrt{X}}$, prise entre des limites arbitraires, pourra toujours se réduire, par des substitutions réelles, à des formes telles que $\int_0^\theta \frac{R(\sin^2\theta)\,d\theta}{\Delta_{2m-3}(k,\theta)}$, où

$$\Delta_{2m-3}(k,\theta) = \sqrt{(1-k^2\sin^2\theta)(1-k_1^2\sin^2\theta)\ldots(1-k_{2m-4}^2\sin^2\theta)},$$

$\theta$ étant un angle réel, et $k^2, k_1^2, \ldots, k_{2m-4}^2$ des quantités réelles et positives, chacune inférieure à l'unité.

Mertens (F.). — *Sur la règle de la multiplication pour deux séries infinies.* (3 p.)

D'après Cauchy et Abel on a

$$(u_0 + u_1 + u_2 + \ldots)(v_0 + v_1 + v_2 + \ldots) = w_0 + w_1 + w_2 + \ldots,$$

où

$$w_0 = u_0 v_0, \quad w_1 = u_0 v_1 + u_1 v_0, \ldots, \quad w_k = u_0 v_k + u_1 v_{k-1} + \ldots + u_k v_0,$$

si les séries mod. $u_0$ + mod. $u_1 + \ldots$ et mod. $v_0$ + mod. $v_1 + \ldots$ sont convergentes. Ce théorème subsiste si ce sont seulement les modules des membres de l'une des deux séries données qui forment une série convergente.

Frobenius (G.). — *Applications de la théorie des déterminants à la Géométrie métrique.* (63 p.)

La première partie du Mémoire traite des relations entre les systèmes de cercles, de points et de cercles principaux sur la sphère; la seconde, des relations entre les systèmes de sphères, de points et de plans. On connaît le travail de M. Darboux sur les relations entre les groupes de points, de cercles et de sphères dans le plan et dans l'espace ([1]). On y trouve une grande partie des relations métriques et des constructions que M. Frobenius discute dans ce nouveau Mémoire de 1874, qui a un but un peu différent de celui des recherches de M. Darboux. Il s'est surtout proposé de montrer qu'il est très-facile et très-naturel de déduire d'un petit nombre de relations métriques les solutions de quelques problèmes compliqués de Géométrie. Ce nouveau point de vue et la difficulté de représenter séparément les résultats qu'on ne trouve pas chez M. Darboux ont décidé l'auteur à publier un abrégé de ses recherches, qu'il dit avoir commencées dès 1868, où un concours fut ouvert sur une question de cette nature à l'Université de Berlin. La foule des développements ne se prête pas bien à une analyse détaillée du contenu.

Jordan (C.). — *Sur la limite du degré des groupes primitifs qui contiennent une substitution donnée.* (11 p.; fr.)

Si un groupe primitif G (ne contenant pas le groupe alterné) contient une substitution A qui ne déplace que $m$ lettres, le degré de G ne pourra dépasser une certaine limite (théorème de M. Jordan,

([1]) *Annales de l'École Normale*, 2e serie, t. I, 1872. — *Bulletin*, t. VII, p. 199.

publié en 1871). Si $p$ (nombre premier, ordre de A) est supérieur à $\frac{2}{\log 2} g \log g + g + 1 = f(g)$ ($g$ étant le nombre des cycles de A), le degré de G ne pourra dépasser $pg + \frac{2}{\log 2} g \log g + 2g$. Actuellement cette limite se trouve fixée à

$$n \overline{\gtrless} g(p+g)\left[\log\frac{g(p+g)}{p+eg} - \log\frac{e-1}{\log e} + 1 - \frac{1}{\log e}\right] + \frac{p+g}{e-1} + 2g + \frac{pg-3}{2},$$

où $e$ est égal à 2 si $p = 2$, et à $\frac{2p}{p-1}$ si $p$ est impair.

Pour $g > 1$, on a moins précisément $n < (p+g)(p+g\log g)$. Si la substitution A, au lieu d'être d'ordre premier, est quelconque, il s'ensuit que $n < \frac{(4+m)(4+m\log\frac{1}{2}m)}{4}$.

Du Bois-Reymond (P.). — *Sur une forme changée d'intégrabilité des fonctions.* (4 p.)

Addition au premier Mémoire de l'auteur (même tome).

Stern (M.). — *Sur la valeur de quelques intégrales.* (2 p.)

Extension d'une Note, t. LXXVIII, p. 340 (*Bulletin*, t. VII, p. 260).

Stahl (W.). — *Sur la théorie des surfaces potentielles, en particulier de celles qui appartiennent à des corps limités par des surfaces du second ordre.* (39 p.)

En général, il faut considérer les potentiels extérieur et intérieur d'une masse comme deux fonctions distinctes. Or il est possible d'établir les valeurs analytiques du potentiel extérieur pour des points intérieurs. Alors cette fonction, définie comme monodrome en dehors de la masse, devient polydrome en dedans; donc, pour caractériser la fonction potentielle extérieure dans tous les points de l'espace, il faut en rechercher les discontinuités pour les points intérieurs, en particulier les points, les lignes, les surfaces limites où elle devient infinie, et ces lieux de discontinuité serviront mieux à préciser la nature de la fonction que la répartition discontinue de la masse. De plus, on sait qu'en empêchant le potentiel d'une surface de passer à travers la surface matérielle, on le rend monodrome; de même, il est possible de signaler à l'intérieur d'un corps certaines surfaces susceptibles d'anéantir la propriété du potentiel extérieur d'être polydrome, quand on ne laisse pas percer ces surfaces par le potentiel. Pour cela on peut surtout employer des surfaces où deux branches de la fonction, en se réunissant, prennent les mêmes valeurs.

Si l'on suppose encore qu'il n'existe pas de surfaces limites de la fonction potentielle (au delà de laquelle on ne pourrait la continuer), et qu'elle satisfasse à certaines conditions lorsqu'elle devient infinie pour quelques points et lignes, on peut, en effet, répartir une masse convenablement sur des surfaces (ou bien sur des lignes et des points), de sorte que son potentiel devienne identique avec celui de la masse qui remplit le corps. Ces surfaces sont appelées *surfaces potentielles*. Il n'est guère nécessaire d'ajouter que ces surfaces doivent être non fermées; car, d'après un théorème connu de Gauss, toute surface fermée qui renferme des masses peut être couverte de masse, en sorte que le potentiel des points extérieurs égale celui de la masse incluse.

L'auteur se borne au cas où la masse a une densité constante, et il construit, en particulier, les surfaces potentielles pour des corps limités par des surfaces quelconques du second degré. La solution de ce problème spécial offre une nouvelle application des transcendantes elliptiques, et l'auteur, élève de M. Weierstrass, s'est servi des formules que ce géomètre emploie dans son Cours sur les fonctions elliptiques, mais qu'il tarde toujours encore à publier dans un ouvrage systématique.

KIEPERT (L.). — *Sur les courbes dont l'arc est une intégrale elliptique de première espèce.* (20 p.)

La lemniscate $r^2 = \cos 2\varphi$ et la courbe $r^3 = \cos 3\varphi$ ont été employées quand on avait besoin de courbes dont les arcs s'exprimassent par des intégrales elliptiques de première espèce. On connaît cette particularité de la lemniscate depuis l'époque du comte Fagnano et d'Euler, tandis que l'autre courbe a été étudiée nouvellement par M. Kiepert à diverses reprises. Actuellement, après avoir montré quel chemin il faut prendre pour arriver d'une manière générale à des courbes qui sont douées de cette propriété, l'auteur en développe de nouvelles, par exemple :

$$18 r^5 \cos 5\varphi = 27 r^{10} - 5 r^4 - 5 r^2 + 1$$

(courbe du dixième degré), et une autre plus compliquée dont il a tracé la figure, ainsi que celle de la courbe du dixième degré. Les calculs deviennent très-longs; mais il semble que les résultats gagnés ici puissent tourner au profit de la transformation des fonctions elliptiques.

HERMITE (Ch.). — *Extrait d'une Lettre à M. L. Fuchs* (*sur quelques équations différentielles linéaires*). (15 p.; fr.)

En 1873, M. Hermite a publié, dans les *Comptes rendus de l'Académie*, des recherches sur la fonction exponentielle, où il a développé des modes d'approximations simultanées de plusieurs fonctions. La Lettre à M. Fuchs, auteur d'un grand nombre de beaux Mémoires sur la théorie des équations différentielles linéaires, vient étendre cette nouvelle méthode aux intégrales de quelques équations linéaires dont on trouve le type à l'entrée. Ce sont des rapports de la théorie des fractions continues avec certaines équations du second ordre qu'avaient fait connaître les recherches de M. Heine et de M. Christoffel. M. Hermite prouve qu'ils sont susceptibles d'extension : il établit des fractions rationnelles qui doivent être regardées comme analogues aux réduites de la théorie des fractions continues, parce qu'elles donnent l'approximation de l'ordre le plus élevé possible, et qu'on peut chercher à leur égard un algorithme semblable à la loi de formation de ces réduites.

HERMITE (Ch.). — *Lettre à M. Borchardt sur la fonction de Jacques Bernoulli*. (6 p.; fr.)

Soient $B''(x)$ et $B'(x)$ les coefficients de $\dfrac{\lambda^{2m}}{1.2\ldots 2m}$ et $\dfrac{\lambda^{2m+1}}{1.2\ldots 2m+1}$ dans le développement suivant les puissances croissantes de $\lambda$ de la fonction $\dfrac{e^{\lambda x}-1}{e^x-1}$. Il existe de nombreux théorèmes sur ces fonctions $B''(x)$ et $B'(x)$. Raabe avait donné à $B''(x)$ la forme d'une intégrale définie très-intéressante. M. Hermite retrouve, par une nouvelle voie, cette formule et d'autres.

BORCHARDT (C.-W.). — *Otto Hesse* (né le 22 avril 1811, mort le 4 août 1874). (3 p.)

Notice sur les travaux de ce géomètre. E. L.

NACHRICHTEN von der K. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-August-Universität zu Göttingen.

Année 1871 ([1]).

Enneper (A.). — *Remarques nouvelles sur la théorie des lignes asymptotiques.* (22 p.)

Recherches des surfaces gauches pour lesquelles les lignes asymptotiques ont la propriété que la distance de deux de ces courbes, mesurée dans la direction des génératrices, soit constante.

Klein (F.). — *Sur la théorie de la surface de Kummer et des complexes du second degré qui s'y rapportent.* (6 p.)

Kohlrausch (F.). — *Le magnétomètre compensé de Weber pour la détermination de l'intensité magnétique terrestre.* (6 p.)

Le développement de cette Note a été donné dans les *Mathematische Annalen.*

Klein (F.). — *Sur un théorème de la théorie des complexes, qui est analogue au théorème de Dupin sur les surfaces orthogonales.*

Listing (J.-B.). — *Sur l'oculaire de Huyghens.* (14 p.)

Clebsch (A.). — *Remarques sur la théorie des équations du cinquième et du sixième degré.* (5 p.)

Cette Note traite des propriétés relatives aux invariants et de la résolution des équations du cinquième et du sixième degré par la théorie des fonctions elliptiques.

Cremona (L.). — *De la représentation sur le plan des surfaces algébriques.* (20 p.)

L'auteur montre que les transformations rationnelles des points de l'espace donnent un moyen simple d'obtenir les représentations connues des surfaces sur le plan, ainsi que d'autres de surfaces nouvelles.

Lie (S.). — *Sur la théorie relative à un espace à n dimensions, qui correspond à la théorie de la courbure dans l'espace à trois dimensions.* (19 p.)

---

([1]) Voir *Bulletin*, t. III, p. 42.

Généralisation des notions de normales, de courbure, de systèmes orthogonaux. — Indication d'un moyen de déduire d'un système orthogonal à $n$ dimensions un autre système orthogonal à une dimension de moins.

Enneper (A.). — *Des surfaces qui admettent une surface donnée pour lieu des centres de courbure.* (33 p.)

Clausius (R.). — *Sur l'application d'une équation mécanique établie par l'auteur au mouvement d'un point matériel autour d'un centre fixe et de deux points matériels l'un autour de l'autre.* (22 p.)

Nöther (M.). — *Sur les fonctions algébriques d'une et de deux variables. Deuxième Note.* (12 p.)

L'auteur fait connaître une méthode générale pour transformer une courbe donnée avec des points singuliers quelconques en une autre courbe, admettant seulement des points multiples ordinaires. Déjà M. Cayley a montré (*Quart. Journ.*, 1866, vol. VII, p. 212) comment on peut utiliser les développements en série de M. Puiseux pour évaluer le nombre de points doubles et de rebroussements équivalant à une singularité quelconque. La transformation actuelle indiquée par l'auteur permet aussi de résoudre directement cette importante question de l'influence des points singuliers sur la classe et le genre.

Clebsch (A.). — *Sur l'interprétation géométrique des transformations d'ordre supérieur des formes binaires et des formes du cinquième ordre en particulier.* (11 p.)

Résumé d'un travail qui a paru *in extenso* dans les *Mathematische Annalen.*

Heine (E.). — *De quelques hypothèses qu'exige la démonstration du principe de Dirichlet.* (8 p.)

Hattendorff (K.). — *Détermination de la loi de mortalité au moyen d'observations données.* (16 p.)