BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

JACOBI
LEGENDRE

Correspondance mathématique entre Legendre et Jacobi

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 9 (1875), p. 126-142

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1875__9__126_1>

MÉLANGES.

CORRESPONDANCE MATHÉMATIQUE ENTRE LEGENDRE ET JACOBI (1).

(Suite et fin.)

Jacobi à Legendre.

Potsdam, le 14 juin 182

MONSIEUR,

Conformément à ce que vous avez la bonté de m'écrire dans lettre du 4 juin, je vous envoie un quatrième exemplaire l'Académie. Je l'ai adressé à M. le baron de Fourier, secrétair

(1) Voir *Bulletin*, t. IX, p. 51.

pétuel de l'Académie, puisque j'ignore le nom du Président. Veuillez bien le lui faire parvenir et excuser la peine que je vous fais. Votre bonté envers moi et votre générosité sont telles, que je ne sais vous en rendre de grâces dignes.

Peu de jours après l'envoi de ma dernière lettre, j'appris la triste nouvelle de la mort d'Abel. Notre Gouvernement l'avait appelé à Berlin, mais l'appel ne l'a pas trouvé parmi les vivants. L'espérance que j'avais conçue de le trouver à Berlin a été si cruellement déçue! Les vastes problèmes qu'il s'était proposés, d'établir des critères suffisants et nécessaires pour qu'une équation algébrique quelconque soit résoluble, pour qu'une intégrale quelconque puisse être exprimée en quantités finies, son invention admirable de la propriété générale qui embrasse toutes les fonctions qui sont des intégrales de fonctions algébriques quelconques, etc., etc., marquent un genre de questions tout à fait particulier, et que personne avant lui n'a osé imaginer. Il s'en est allé, mais il a laissé un grand exemple.

Je vous rends mille grâces de votre second Supplément, qui avait fait le grand détour par Kònigsberg. Les démonstrations différentes de celles que vous trouverez dans mon petit Ouvrage, et les développements que vous avez ajoutés à plusieurs points importants me l'ont rendu fort intéressant. Quant au calcul numérique des intégrales elliptiques de troisième espèce à paramètre circulaire, je vous demande pardon d'avoir fait naître en vous une espérance qui n'a pas été réalisée depuis. Cependant je crois que vous n'avez pas à regretter trop l'inconvénient que ces fonctions ne peuvent être réduites en Tables à double entrée. Les moyens que vous avez indiqués pour leur évaluation dans le second Supplément sont tels, qu'on doit considérer ces fonctions tout à fait comme des quantités finies. Je crois même qu'au moyen de quelques Tables à simple entrée on peut faciliter tellement leur calcul, que la peine de les calculer au moyen de mes séries devienne plus petite que celle qu'exige l'interpolation dans une Table à double entrée.

Ce qui regarde la démonstration que j'ai donnée de mon théorème I, dans le *Journal de M. Schumacher*, elle repose sur le théorème « qu'étant trouvées trois fonctions entières et rationnelles de x quelconque U, V et T, telles que

$$(U^2-V^2)(U^2-\lambda^2 V^2)=(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)T^2,$$

on aura toujours, en mettant $y = \frac{U}{V}$,

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}},$$

M désignant une constante »; théorème fondamental qui a été prouvé au commencement de ma démonstration, et dont il ne se trouve pas fait mention dans le premier Supplément. Dans mon Ouvrage, j'ai désigné ce théorème sous le nom de *principe de la transformation des fonctions elliptiques*. En effet ce principe suffit pour qu'on puisse établir la théorie générale de la transformation, en réduisant cette dernière à un problème algébrique qu'on peut toujours résoudre, les constantes indéterminées étant en nombre suffisant pour remplir les conditions du problème. Pour compléter ma démonstration, telle qu'elle se trouve dans le premier Supplément, il suffira d'ajouter en peu de mots la démonstration du théorème mentionné. La double substitution vous fournissant les valeurs de $U \pm V$, $U \pm \lambda V$ résolues en facteurs, et telles qu'on a

$$U - V = (1-x)A^2, \quad U - \lambda V = (1 - \varkappa x)C^2,$$
$$U + V = (1+x)B^2, \quad U + \lambda V = (1 + \varkappa x)D^2,$$

A, B, C, D étant des fonctions entières, tout se trouvera prouvé rigoureusement. Abel s'est servi du même principe, de sorte que nos démonstrations sont au fond les mêmes. Vous êtes le premier, monsieur, qui avez montré qu'on peut s'en passer, en effectuant la substitution elle-même au moyen de la résolution en fractions simples. Aussi je n'ai pas tardé à exposer dans mon Ouvrage cette démonstration, qui vous est propre et qui donne une excellente vérification. A présent, je suis en possession d'un nombre assez grand de démonstrations différentes. Je remarque, à cette occasion, que le mérite principal d'Abel, dans la théorie de la transformation, consiste dans sa démonstration que *nos formules embrassent toutes les substitutions algébriques possibles,* ce qui donne un haut degré de perfection à cette théorie.

Vous vous plaignez des infirmités de votre âge. Ah! monsieur, ces excellents Suppléments que vous venez de composer, en partant de quelques légères Notices que j'avais données sans démonstration, montrent que c'est encore la vigueur et l'énergie de la jeunesse qui vous animent, et font concevoir l'espérance que le ciel conservera encore longtemps une vie aussi chère.

Mes parents m'ont prié de vous faire leurs civilités et vous rendent grâces des bontés que vous avez bien voulu avoir pour moi. Soyez assuré, monsieur, que je n'oublierai jamais ces bontés, et que je suis avec le respect le plus profond

Votre tout dévoué,

C.-G.-J. Jacobi.

Je ne retournerai à Königsberg que cet hiver.

Legendre à Jacobi.

Paris, le 16 juillet 1829.

Je ne veux pas différer plus longtemps, monsieur, de répondre à votre lettre du 14 juin dernier, car il faut que vous sachiez que j'ai reçu les quatre exemplaires destinés pour trois de mes confrères et pour moi, et de plus un cinquième qui est arrivé un peu plus tard pour l'Académie. Le tout a été distribué selon vos intentions, et j'ai été chargé de vous adresser les remercîments de ces messieurs, auxquels je joins les miens. M. Fourier vous adressera probablement ceux de l'Académie; d'ailleurs M. de Mirbel, son président, a chargé M. Poisson de faire de votre Ouvrage un Rapport verbal à l'Académie, ce qui me procurera le plaisir d'entendre citer avec éloge les beaux travaux par lesquels vous avez considérablement perfectionné une branche importante de l'Analyse, et qui déjà vous placent au nombre des géomètres les plus distingués de l'Europe.

L'exécution typographique de votre Ouvrage paraît, surtout dans mon exemplaire qui est sur papier fin, d'une beauté remarquable. Je regrette seulement que vous n'ayez pas été à portée de corriger les épreuves; car, outre les fautes indiquées dans l'*errata,* il me paraît qu'il en reste encore un assez bon nombre. Par exemple, je trouve, pages 29, 30, 67 et 69, que les équations modulaires pour les nombres 3 et 5 sont

$$u^4 - v^4 + 2uv(1 - u^2v^2) = 0,$$
$$u^6 - v^6 + 5u^2v^2(u^2 - v^2) + 4uv(1 - u^4v^4) = 0.$$

Mais, puisque vous supposez $u > v$ [voir la formule $\lambda = \varkappa^n (\ldots)$, page 37], il est évident que les premiers membres de ces équations sont composés l'un de deux binômes dont la valeur est positive, l'autre de trois binômes semblables. Les vraies équations, telles que je les ai données, pages 68 et 75 de mon premier Supplément, sont

$$u^4 - v^4 - 2uv(1 - u^2v^2) = 0,$$
$$u^6 - v^6 + 5u^2v^2(u^2 - v^2) - 4uv(1 - u^4v^4) = 0 \text{ (}^1\text{)},$$

et alors, pour le dire en passant, on ne peut échanger entre eux u et v, mais bien u et $-v$.

Au reste, j'ai remarqué beaucoup de choses dans votre Ouvrage qui sont nouvelles pour moi et dont je pourrai profiter, s'il m'est donné de publier un troisième Supplément. Mais il me faudra beaucoup de temps et de travail pour me mettre en état de traduire en langage vulgaire le résultat des hautes spéculations auxquelles vous vous êtes livré, car nous écrivons dans deux genres fort différents.

J'applaudis aux efforts heureux que vous avez faits dans la partie purement spéculative, en traitant des transformations imaginaires, et résolvant les équations algébriques les plus difficiles par des formules très-élégantes; mais l'objet de mon Ouvrage se rapproche beaucoup plus de la pratique; je cherche à recueillir tout ce qui peut faciliter l'usage de mes fonctions, afin d'en faire un véritable instrument de calcul, comme l'ont été jusqu'ici les fonctions circulaires et logarithmiques.

Je devrais borner là ma lettre, et ne vous point parler des changements de nomenclature que vous proposez dans votre article 17, page 31; mais, comme d'autres personnes pourraient vous représenter qu'en cela vous avez fait une chose qui doit m'être désagréable, je ne vois pas pourquoi je vous cacherais ce que je pense de cette proposition. Je vous dirai donc franchement que je n'approuve pas votre idée, et que je ne vois pas de quelle utilité elle peut être pour vous et pour la Science.

---

(1) Ces deux équations se trouvent avec les mêmes signes dans la Notice de Jacobi du 2 avril 1828 (*Journal de Crelle*, vol. III, p. 194), et avec un double signe dans la lettre de Jacobi à Legendre datée du 12 janvier 1828.

La plus simple des fonctions elliptiques, savoir, l'intégrale

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \varphi}},$$

jouit de tant et si belles propriétés; considérée seule, elle est liée par de si beaux rapports avec les deux autres fonctions dites de la *seconde* et de la *troisième espèce* que l'ensemble de ces trois fonctions forme un système complet auquel on pourrait donner un autre nom que celui de *fonctions elliptiques,* mais dont l'existence est indépendante de toute autre fonction. La nomenclature méthodique que j'ai proposée, dès 1793, dans mon *Mémoire sur les transcendantes elliptiques,* a été adoptée généralement; vous l'avez trouvée établie : quelles sont donc vos raisons pour vous écarter de l'usage général? Vous faites schisme avec M. Abel et avec moi; vous faites schisme avec vous-même, puisque, après avoir appelé *fonctions elliptiques* les sinus, cosinus et autres fonctions trigonométriques de l'amplitude, vous êtes encore obligé d'appeler *fonctions de troisième espèce* celles que je désigne sous le même nom. N'est-ce pas ce que veut dire le titre de l'article 56, page 160? Pourquoi désignez-vous, comme moi, la fonction de troisième espèce tantôt par $\Pi(u, a)$, tantôt par $\Pi(u, a + K', \varkappa)$? Quelle liaison y a-t-il entre ces fonctions et la première, qui n'est plus, suivant vous, qu'un argument de fonction? Je vous laisse à expliquer toutes ces choses. Du reste, je vous fais part confidentiellement de ces observations, dont vous ferez tel usage que vous voudrez, et auxquelles je ne donnerai jamais aucune publicité. Il me suffira de vous avoir témoigné ma surprise sur l'inconvenance et la bizarrerie de votre idée; elle n'altérera en rien les sentiments d'estime et d'affection que j'ai conçus pour vous et dont je vous renouvelle l'assurance.

LEGENDRE.

Jacobi à Legendre.

Francfort, le 19 août 1829.

MONSIEUR,

Dans un voyage que j'ai entrepris en Allemagne, étant arrivé près des rivages du Rhin, je ne puis résister au désir de vous voir à Paris. J'y partirai donc dans quelques jours, pour y passer plusieurs semaines. Je ne saurais mieux profiter de la permission que le Gouvernement m'a voulu accorder pour ce semestre pour pouvoir jouir d'une récréation de mes études. Je brûle du désir de voir l'homme auquel je suis le plus redevable des bontés qu'il a voulu avoir pour moi, et de lui témoigner tous les sentiments que peuvent inspirer l'admiration et la reconnaissance.

Comme j'écris ceci en hâte, je ne puis répondre que quelques mots aux reproches que vous m'avez faits dans votre dernière Lettre, et pour lesquels je vous rends grâces mieux encore que pour les éloges que vous m'avez prodigués et que j'ai si peu mérités. Il me fallait absolument une dénomination pour les fonctions sin am, cos am, etc., dont les propriétés répondent parfaitement à celles des fonctions sin, cos, dites *circulaires*. D'un autre côté, l'application importante qu'on fait de la théorie des fonctions elliptiques au Calcul intégral rendait nécessaires les distinctions et les dénominations que vous avez introduites dans l'Analyse, et qui ont été accueillies par tous les géomètres. J'ai donc trouvé convenable d'appeler les intégrales auxquelles vous donnez le nom de *fonctions elliptiques de la première, seconde, troisième espèce, intégrales elliptiques de la première, seconde, troisième espèce,* et d'étendre ou d'attribuer de préférence la dénomination de *fonctions elliptiques* aux sin am, cos am, Δ am, analogiquement, comme on nomme *fonctions circulaires* les sinus, cosinus, etc. Si cela vous déplaît, toute autre dénomination me sera agréable. Dans tous les cas, je crois que nous deviendrons aisément d'accord sur cet objet [1].

Votre tout dévoué serviteur,

C.-G.-J. JACOBI.

---

[1] La correspondance, interrompue après cette Lettre par le voyage de Jacobi en France et par son séjour à Paris, n'a été reprise que l'année suivante et ne s'élève plus à son niveau antérieur, les fonctions elliptiques ne formant plus, ni pour Legendre ni pour Jacobi, l'occupation presque exclusive. B.

Jacobi à Legendre.

Königsberg, le 2 juillet 1830.

MONSIEUR,

Je vous prie de vouloir bien m'excuser de ne vous avoir pas plus tôt donné des nouvelles de moi, car ç'aurait dû être pour moi un devoir que de vous rendre grâce des bontés que vous m'avez eues pendant mon séjour à Paris et de vous dire que je compte le temps que vous m'avez permis de passer avec vous parmi les moments les plus heureux de ma vie. Les distractions d'un long voyage et d'autres circonstances ayant interrompu le cours de mes travaux, je n'ai su reprendre sitôt le fil de mes recherches ordinaires; et j'étais trop accoutumé à vous parler Mathématiques et à vous raconter quelque chose de nouveau qui pouvait mériter votre indulgence, pour remplir une lettre avec les seuls sentiments de ma reconnaissance. Mais, après avoir reçu le cadeau précieux que vous venez de me faire par l'envoi de la troisième édition de votre Ouvrage sur les Nombres, je ne veux pousser plus loin un délai peu excusable. La partie la plus grande du tome II de votre Ouvrage étant entièrement nouvelle, j'ai eu occasion d'y admirer de nouveau cette vigueur d'esprit qui fait vaincre les difficultés et surpasser, même dans un âge avancé, les efforts des jeunes géomètres, auxquels votre vie glorieusement sacrée aux progrès de la science sera pour toujours un modèle d'émulation. J'ai vu aussi avec plaisir que vous avez voulu profiter de ma remarque relative à la loi de réciprocité. J'avais espéré de trouver, dans l'exemplaire que vous m'avez adressé, quelques lignes de votre main qui me parleraient de vous et de la santé de M$^{\text{me}}$ Legendre; mais je l'ai feuilleté inutilement, et me voilà puni pour ma négligence assez sévèrement.

Pour ne pas laisser cette lettre sans les signes de calcul, je vais vous faire une observation relative à l'équation

$$4\left(\frac{x^n-1}{x-1}\right)=\mathrm{Y}^2\pm n\mathrm{Z}^2.$$

Pour trouver Y, votre Ouvrage donne la règle de développer

$$2(x-1)^{\frac{n-1}{2}},$$

et de remplacer les coefficients par les *plus petits* résidus qu'ils laissent étant divisés par n. Cette règle, qui se trouve déjà dans la seconde édition, n'est cependant juste que pour des nombres premiers peu grands. Les valeurs exactes de Y et de Z sont données dans chaque cas par les formules connues qui expriment les coefficients d'une équation au moyen des sommes des puissances de ses racines, sommes qui, dans notre cas, sont ou $\frac{-1+\sqrt{\pm n}}{2}$ ou $\frac{-1-\sqrt{\pm n}}{2}$. C'est ainsi qu'on trouve qu'étant posé

$$\begin{aligned} Y &= 2(x-r)(x-r^4)(x-r^9)\ldots\left[x - r^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}\right] \\ &= 2x^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} + a_1 x^{\frac{n-3}{2}} + a_2 x^{\frac{1-5}{2}} + \ldots \text{ (1)}, \end{aligned}$$

la règle est exacte pour les trois premiers coefficients a_1, a_2, a_3, mais qu'elle cesse de l'être pour les suivants dès que n surpasse une certaine limite; de sorte que les coefficients de Y et de Z peuvent surpasser $\frac{1}{2}n$ et même n et les puissances de n. Soit, par exemple, n de l'une des quatre formes :

$$\begin{array}{lll} (1) & 24\mu+1, \quad \text{on aura} & (1)\quad a_4 = \dfrac{(n-1)(n-105)}{192} + n, \\ (2) & 24\mu+5, & (2)\quad a_4 = \dfrac{(n-5)(n-21)}{192}, \\ (3) & 24\mu+13, & (3)\quad a_4 = \dfrac{(n+3)(n+35)}{192}, \\ (4) & 24\mu+17, & (4)\quad a_4 = \dfrac{(n+7)(n+15)}{192}, \end{array}$$

expressions qui pour de grands n sont de l'ordre $\frac{n^2}{192}$, et peuvent surpasser n de beaucoup.

Généralement on trouve que, pour de grands n, a_{2m} et a_{2m+1} sont de l'ordre $\frac{1}{3.4.5\ldots 2m}\left(\frac{n}{4}\right)^m$. Peut-être vous jugerez conve-

---

(1) Il semble qu'une erreur s'est glissée dans cette formule, le produit qui forme la seconde partie n'étant pas égal au polynôme Y développé suivant les puissances de x dans la troisième partie de l'équation, mais bien égal à $Y + \sqrt{\pm n}.Z$. B.

nable de faire une addition de quelques lignes à votre Ouvrage pour limiter l'énoncé de la règle mentionnée.

J'ai lu avec plaisir le Rapport de M. Poisson sur mon Ouvrage, et je crois pouvoir en être très-content; il me paraît avoir très-bien présenté les deux transformations, qui, étant jointes entre elles, conduisent à la multiplication des fonctions elliptiques, en quoi il a été guidé sensiblement par vos Suppléments. Mais M. Poisson n'aurait pas dû reproduire dans son Rapport une phrase peu adroite de feu M. Fourier, où ce dernier nous fait des reproches, à Abel et à moi, de ne pas nous être occupés de préférence du mouvement de la chaleur. Il est vrai que M. Fourier avait l'opinion que le but principal des Mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la Science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre une question de nombres vaut autant qu'une question du système du monde. Quoi qu'il en soit, on doit vivement regretter que M. Fourier n'ait pu achever son Ouvrage sur les équations, et de tels hommes sont trop rares aujourd'hui, même en France, pour qu'il soit facile de les remplacer.

En ce qui regarde mes propres occupations, j'ai entrepris un bon nombre de recherches sur différentes matières, et que je voudrais avoir finies avant de retourner aux fonctions elliptiques et aux transcendantes d'un ordre supérieur qui sont de la forme

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}}.$$

Je crois entrevoir à présent que toutes ces transcendantes jouissent des propriétés admirables et inattendues auxquelles on peut être conduit par le théorème d'Abel, qui établit une relation entre plusieurs de ces transcendantes qui répondent à différentes valeurs de x. J'ai réfléchi aussi de temps en temps sur une méthode nouvelle de traiter les perturbations célestes, méthode dans laquelle doivent entrer les théories nouvelles des fonctions elliptiques.

Je vous prie, monsieur, de me rappeler à la mémoire de M^me^ Legendre, qui a voulu participer avec tant de bienveillance aux bontés que vous m'avez eues; je vous prie en même temps de faire mes civilités à M^lle^ Sophie Germain, dont je me félicite d'avoir fait la connaissance, et de me dire des nouvelles de sa santé, si vous daignez me répondre.

Agréez, monsieur, les assurances de mon entier dévouement.

Votre très-humble serviteur,

C.-G.-J. JACOBI.

Legendre à Jacobi.

Paris, le 1[er] octobre 1830.

MONSIEUR,

Différents obstacles de toute nature, et principalement le mauvais état de ma santé, m'ont empêché jusqu'ici de répondre à votre lettre du 19 juillet, arrivée après un long silence qui commençait à m'inquiéter, et dont j'attribue la cause à de nouveaux travaux toujours marqués au coin d'un grand talent.

J'ai trouvé votre remarque très-juste sur l'erreur que j'ai commise dans ma Théorie des nombres, en supposant que les fonctions Y et Z dans l'équation $4X = Y^2 \pm nZ^2$ ont leurs coefficients plus petits que $\frac{1}{2}n$. L'induction m'a trompé, et cela est fâcheux, puisque la règle très-simple que j'avais donnée pour déterminer ces fonctions cesse d'être exacte lorsque $n = 61$, et devient de plus en plus fautive à mesure que n est plus grand. Vous paraissez avoir grandement approfondi cette question, comme j'en puis juger d'après les valeurs que vous donnez du cofficient a_4, selon les différentes formes du nombre premier $n = 4i + 1$. Je suis parvenu avec assez de peine à vérifier l'une de ces formules, celle qui suppose $n = 24\mu + 13$, ce qui me conduisit à la vérification des trois autres. Ce genre d'analyse est fort beau; c'est dommage seulement qu'il ne conduise pas à des formules absolument générales et que les résultats ne peuvent être trouvés commodément que dans des cas particuliers. De mon côté, je vous reprocherai de m'avoir induit en erreur, en me marquant que la fonction Y est le produit des facteurs

$$2(x - r)(x - r^4)(x - r^9)\ldots\left[x - r^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}\right],$$

r étant sans doute une racine imaginaire de l'équation $r^n - 1 = 0$. On voit, au premier coup d'œil, que ces facteurs ne peuvent avoir lieu, parce qu'ils seraient communs à X et à Y, par conséquent à Z.

J'ai vu avec plaisir, dans la lettre que vous avez écrite à l'Académie, que vous vous occupez à perfectionner la théorie des perturbations, et que vous avez l'espoir d'y employer utilement la théorie des fonctions elliptiques. C'est un objet très-digne de vos recherches, et qui a été fort négligé par nos devanciers; j'avais eu quelques idées là-dessus, mais sans rien approfondir; j'en ai fait mention dans mes *Exercices* et dans mon *Traité des fonctions elliptiques,* espérant qu'un jour les géomètres s'en occuperaient sérieusement, et une pareille entreprise ne saurait être mieux placée qu'entre vos mains.

M. Crelle est venu à Paris, précisément pour être témoin de notre révolution qui porte déjà des fruits, fruits amers pour les partisans des gouvernements absolus. Comme j'étais fort tourmenté de mes maux ordinaires dans ce même temps, j'ai eu le regret de ne pas recevoir M. Crelle et le fêter autant que j'aurais voulu. Je crois qu'il n'a pas été content de moi; vous auriez pu, monsieur, me faire un pareil reproche; car je n'ai pu, par la même cause, vous faire l'accueil que j'aurais voulu vous faire pendant votre voyage à Paris. Je me suis acquitté de votre commission auprès de ma femme et de Mlle Germain; elles vous remercient de votre bon souvenir, et vous souhaitent toute espèce de bonheur. — Mlle Germain était malade quand vous l'avez vue; son état a malheureusement fort empiré depuis.

Adieu, monsieur, ne me laissez pas trop longtemps sans me donner de vos nouvelles; je deviens chaque jour moins en état de travailler, mais j'apprends toujours avec grand plaisir les succès nouveaux que vous devez obtenir dans la carrière des sciences.

Votre très-dévoué,

LEGENDRE.

Jacobi à Legendre.

Konigsberg, ce 27 mai 1832.

MONSIEUR,

Je ne sais comment excuser le long intervalle de temps qui s'est écoulé sans que je vous aie donné quelque témoignage de mon dévouement et sans que je vous aie rendu compte de mes travaux, comme j'avais coutume d'après votre permission bienveillante dans le premier temps où je m'occupais des fonctions elliptiques. J'aurais bien voulu pouvoir vous avertir de l'achèvement de quelque Ouvrage plus étendu, mais pendant tout ce temps-ci je n'ai pu regagner ni le goût ni l'énergie de jadis. Ce n'auraient été que des Ouvrages commencés ou même seulement projetés dont j'aurais dû faire mention à vous, qui ne cessez de publier des Ouvrages également distingués par leur étendue et par leur riche teneur, et cela presque dans l'âge où se trouvait Oughtred, lorsque Wallis lui dédia son *Arithmetica infinitorum*. J'ai lu le troisième Supplément qui finit le troisième volume de votre grand Ouvrage sur les *Fonctions elliptiques* à Potsdam, où je me suis rendu pour voir mon père malade, qui mourut huit jours après mon arrivée, à l'âge pas même accompli de cinquante-neuf ans. Je lui devais la reconnaissance la plus haute. Ce furent ses assistances libérales qui m'ont mis en état de me vouer entièrement aux sciences, et l'étendue de mes obligations envers lui me rendit ce triste événement plus amer encore. Dans ce temps d'une douleur profonde, monsieur, c'était l'étude de votre Ouvrage, qui m'a été communiqué par M. Crelle, qui fit mon soulagement et en quelque sorte ma consolation. Dans une annonce que j'en ai faite à la fin du huitième volume de M. Crelle, j'ai cherché à relever les mérites impérissables du géomètre qui, outre les découvertes nombreuses et importantes dont il a enrichi la science, est parvenu à fonder deux disciplines grandes et étendues par les travaux glorieux de sa vie, lesquelles formeront désormais l'α et l'ω de toute étude mathématique. J'ai profité en même temps de cette occasion pour parler d'Abel et de son grand théorème, que vous avez encore le mérite d'avoir approfondi le premier, et d'avoir montré à la postérité que son développement est la grande tâche qui lui reste à remplir.

Les limites d'une lettre ne permettent pas de vous parler de mes travaux sur les *Perturbations célestes.* En attendant, j'ai éprouvé moi-même des perturbations pas moins célestes et qui ont fini par un mariage heureux. L'intérêt que vous avez bien voulu me témoigner me fait croire que vous prendrez quelque part à ce qui fait le bonheur et le charme de ma vie. Depuis les huit mois de mon mariage j'ai repris mes occupations ordinaires avec un zèle redoublé, et j'espère que les années suivantes me dédommageront en quelque sorte du peu de fruit que m'ont porté les trois précédentes. Je ne veux vous dire que deux mots d'un nouveau résultat obtenu par mes recherches sur les Nombres, à la publication desquelles je n'ai encore pu parvenir : c'est la *résolution trigonométrique du problème de Pell.* En effet, j'exprime généralement par $\cos \frac{2m\pi}{a}$ et $\sin \frac{2m\pi}{a}$ deux nombres entiers x et y tels que $x^2 - ay^2 = 1$. J'ai trouvé même une généralisation du problème de Pell qui me paraît être très-remarquable et qui se rapporte au cas où a est le produit de deux ou de plusieurs facteurs. En effet, supposons que a soit le produit des deux facteurs b et c, on peut, d'une infinité de manières, trouver quatre nombres entiers u, v, w, x tels, que le produit des quatre facteurs

$$\begin{gathered}(u + v\sqrt{b} + w\sqrt{c} + x\sqrt{bc})\,(u + v\sqrt{b} - w\sqrt{c} - x\sqrt{bc})\\ \times (u - v\sqrt{b} + w\sqrt{c} + x\sqrt{bc})\,(u - v\sqrt{b} - w\sqrt{c} + x\sqrt{bc})\end{gathered}$$

soit égal à l'unité. On donne aisément à ce produit les trois formes : $y^2 - bz^2, y'^2 - cz'^2, y''^2 - az''^2$; donc, a étant $= bc$, on peut faire dépendre les six nombres y, z, y', z', y'', z'', lesquels donnent $y^2 - bz^2 = 1, y'^2 - cz'^2 = 1, y''^2 - az''^2 = 1$, des quatre nombres plus simples u, v, w, x. Vous voyez aisément comment cela doit être étendu au cas où a est le produit d'un nombre quelconque de facteurs. Dans tous les cas, je donne les nombres $u, v, w, x, \ldots$ par des formules générales et trigonométriques. Si vous le jugez convenable, et s'il ne vous fait pas de peine en aucune sorte, vous pourriez communiquer à l'Académie des Sciences la Notice que je viens de vous donner sur cette nouvelle manière de résoudre le fameux problème de Pell. Je remarque, en outre, qu'il doit exister des algorithmes, analogues aux fractions continues, qui pourront servir à trouver les nombres u, v, w, x et leurs analogues dans le cas d'un plus grand nombre de facteurs de a, et je crois que la recherche de ces algorithmes sera une chose de quelque importance pour la science des nombres.

Les fonctions elliptiques et la science des nombres ne devraient pas manquer à l'avenir dans les leçons données aux élèves de l'École Polytechnique, si l'on veut que ces leçons soient conformes aux progrès du temps. Quant à moi, je donne des leçons régulières sur ces belles théories, et je vois avec plaisir les élèves de notre Université s'emparer avec empressement de ces matières. Vous verrez plusieurs fruits de leurs travaux dans les volumes suivants du *Journal de M. Crelle*. Ce sont encore, monsieur, les fruits de vos travaux que ces branches de la Science, jadis peu connues, vont devenir la possession commune des géomètres.

De mon retour à Königsberg, j'y trouvai votre bel Ouvrage dont votre bonté a bien voulu me gratifier, et je m'empresse de vous dire mes remercîments de ce que votre générosité l'a voulu emporter sur ma négligence. Ajoutez, monsieur, à cette générosité quelques lignes de votre main, qui m'ont toujours été si précieuses et qui pourront me donner l'assurance de ce que vous n'êtes pas fâché de moi.

Je vous prie, Monsieur, de recommander Marie Jacobi aux bonnes grâces de M^me Legendre, et de vouloir bien agréer les assurances de mon dévouement le plus parfait.

Votre serviteur très-humble,

C.-G.-J. Jacobi.

Legendre à Jacobi.

(Sans date, timbré Paris, 30 juin 1832.)

Monsieur,

Je n'ai jamais interprété à votre désavantage la longue lacune qui s'est trouvée dans votre correspondance : j'ai supposé que vous étiez occupé d'un grand travail qui absorbait tout votre temps, ou que des affaires essentielles vous empêchaient de penser à autre chose. Les deux suppositions paraissent avoir eu lieu successivement; c'est en effet une grande époque dans la vie que celle où l'on a le malheur de perdre son père, c'en est une autre non moins importante, mais plus agréable, que celle où l'on se décide à entrer en ménage. Et, pour ne parler que de cette dernière, je vous félicite bien sincèrement d'avoir rencontré une jeune épouse que, d'après une expérience *déjà longue*, vous jugez devoir faire pour toujours votre bonheur.

Vous étiez dans l'âge convenable pour vous marier; un homme destiné à passer beaucoup de temps dans les travaux du cabinet a besoin d'une compagne qui s'occupe de tout le détail du ménage et qui affranchisse son mari de tous ces petits soins minutieux dont un homme n'est guère capable. Je me suis marié beaucoup plus tard que vous et à la suite d'une révolution sanglante qui avait détruit ma petite fortune; nous avons eu de grands embarras et des moments bien difficiles à passer; mais ma femme m'a aidé puissamment à restaurer progressivement mes affaires et à me donner cette tranquillité d'esprit nécessaire pour me livrer à mes travaux accoutumés et pour composer de nouveaux Ouvrages qui ont ajouté de plus en plus à ma réputation, de manière à me procurer bientôt une existence honorable et une petite fortune dont les débris, après de nouvelles révolutions qui m'ont causé de grandes pertes, suffisent encore pour pourvoir aux besoins de ma vieillesse, et suffiront pour pourvoir à ceux de ma femme bienaimée quand je n'y serai plus. Mais c'est trop parler de moi. Je reviens à vous et à votre lettre.

Je n'ai pas trouvé l'occasion de parler à l'Académie de vos travaux sur l'Analyse indéterminée; peut-être n'en parlerai-je pas, dans la crainte de n'être pas suffisamment entendu. J'obtiendrais plus de faveur si j'avais à parler à l'Académie des travaux dont vous vous occupez sur la théorie des perturbations. C'est un objet d'un grand intérêt auquel j'ai pensé plusieurs fois, et sur lequel j'ai donné par-ci par-là quelques idées; je me suis toujours persuadé que, si je m'en étais occupé sérieusement et d'une manière suivie, j'aurais trouvé quelque chose de plus que mes honorables confrères Lagrange et Laplace. Si on excepte, en effet, les beaux résultats qu'ils ont trouvés pour les différentielles des éléments elliptiques exprimées par la fonction des perturbations, je ne vois pas qu'ils aient avancé la Science au delà de ce qu'elle était du temps d'Euler, Clairaut et d'Alembert. Je verrais donc avec beaucoup de plaisir, mon cher disciple (car vous me permettrez de vous donner ce à raison de mon ancienneté, sauf à vous à user du même dro jour, envers qui il appartiendra), que vous ouvrissiez dans théorie *une nouvelle porte* qui nous conduisît à des résultats précis et plus exacts que tout ce qui a été fait jusqu'ici. J'aura double plaisir si ces nouveaux résultats étaient obtenus par] cours de *nos* fonctions elliptiques, qui vous appartiennent aı qu'à moi, quoique vous ne vouliez pas exprimer la même chos le même nom.

Je ne puis voir ma page finir sans vous remercier de la pein vous avez prise de donner dans le *Journal de M. Crelle* un e de mon troisième Supplément. Je n'ai pas le bonheur d'entend langue dont vous vous êtes servi, mais je sais que vous ave beaucoup de bien de mon nouveau travail qui sera sans dou dernier; car je vais bientôt entrer dans ma 81^{e} année, et, à cet il faut s'appliquer forcément l'adage *solve senescentem*. En atten je vous envoie un petit opuscule de Géométrie élémentaire, qı le résultat d'une longue suite de réflexions faites et renouvel de grands intervalles de temps. Peut-être ce petit opuscule ı vera-t-il plus de lecteurs que mes meilleurs Ouvrages; mais votre approbation, cela me suffit.

Agréez, monsieur, l'expression des sentiments d'estime et d chement bien sincère que je vous ai voués pour toujours. Ma fe vous fait mille compliments ainsi qu'à votre aimable épouse. désire, ainsi que moi, que vous nous l'ameniez quelque jour.

Votre dévoué serviteur,

LEGENDRE.