Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

G. Darboux

Mémoire sur le théorème de Sturm

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 8 (1875), p. 92-112

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1875__8__92_0>

MÉLANGES.

MÉMOIRE SUR LE THÉORÈME DE STURM [1];

PAR M. G. DARBOUX.

PREMIÈRE PARTIE.

V.

La méthode précédente conduit naturellement à la détermination des fonctions de Sturm, exprimées soit au moyen des coefficients, soit au moyen des racines. Parmi les différents procédés qu'on peut employer, voici celui qui nous paraît le plus simple.

Dans la formule

$$(26) \qquad F = m\psi(z)\psi(z_1) + m_1\psi_1(z)\psi_1(z_1) + \ldots,$$

on aura une fonction bilinéaire égale à $-\Sigma c_{ik} z^i z_1^k$ ou à

$$(27) \qquad \sum \frac{\varphi(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)} \frac{f(z)}{z-\alpha_i} \frac{f(z_1)}{z_1-\alpha_i},$$

en concevant que dans cette dernière expression, après avoir effectué les divisions, on remplace les puissances de z et de z_1 par des indéterminées indépendantes. Cela posé, établissons entre les indéterminées z^k des relations qui annulent les coefficients de $z_1^{n-1}, \ldots, z_1^{n-p}$. D'après la formule (26), ces relations sont équivalentes aux suivantes :

$$\psi(z), \ \psi_1(z), \ldots, \ \psi_{p-1}(z) = 0,$$

et alors, dans la formule (26), le coefficient de la puissance z_1^{n-p-1} devient $A_p m_p \psi_p(z)$, et de là résulte la règle suivante :

Si dans la fonction F *on établit entre les indéterminées* z^k *des relations qui fassent disparaître de cette forme les variables*

---

[1] Voir *Bulletin*, t. VIII, p. 56.

$z_1^{n-1}, \ldots, z_1^{n-p}$, *c'est-à-dire si l'on annule les coefficients de ces variables, la fonction* $\psi_p(z)$ *sera égale, à un facteur constant près, au coefficient de* z_1^{n-p-1}, *après qu'on aura chassé de ce coefficient les indéterminées* $z^{n-1}, \ldots, z^{n-p}$ *au moyen des* p *relations établies entre les* n *indéterminées* z^k.

Appliquons cette règle à la formule (27). Les équations qu'on obtient en égalant à zéro les coefficients de $z_1^{n-1}, \ldots, z_1^{n-p}$ se ramènent immédiatement aux suivantes :

$$\sum \frac{\varphi(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)} \frac{f(z)}{z-\alpha_i} = 0, \quad \sum \alpha_i \frac{\varphi(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)} \frac{f(z)}{z-\alpha_i} = 0, \quad \sum \alpha_i^{p-1} \frac{\varphi(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)} \frac{f(z)}{z-\alpha_i} = 0,$$

et l'on a, pour $\psi_p(z)$,

$$(28) \qquad m_p A_p \psi_p(z) = a_0 \sum \frac{\varphi(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)} \alpha_i^p \frac{f(z)}{z-\alpha_i}.$$

Il faut éliminer entre ces équations $z^{n-1}, \ldots, z^{n-p}$, ce qui nous conduit à la relation

$$0 = \begin{vmatrix} \sum \frac{\varphi(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)} & \sum \alpha_i \frac{\varphi(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)} & \cdots & \sum \alpha_i^{p-1} \frac{\varphi(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)} & \sum \frac{\varphi(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)} \frac{f(z)}{z-\alpha_i} \\ \sum \alpha_i \frac{\varphi(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)} & \sum \alpha_i^2 \frac{\varphi(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)} & \cdots & \sum \alpha_i^p \frac{\varphi(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)} & \sum \alpha_i \frac{\varphi(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)} \frac{f(z)}{z-\alpha_i} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \sum \alpha_i^p \frac{\varphi(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)} & \cdots\cdots & \cdots & \sum \alpha_i^{2p-1} \frac{\varphi(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)} & \sum \alpha_i^p \frac{\varphi(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)} \frac{f(z)}{z-\alpha_i} - \frac{A_p m_p \psi_p(z)}{a_0} \end{vmatrix},$$

qui va nous donner $\psi_p(z)$.

Posons

$$(29) \qquad \Delta_{p-1} = \begin{vmatrix} \sum \frac{\varphi(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)} & \cdots & \sum \frac{\varphi(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)} \alpha_i^{p-1} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \sum \frac{\varphi(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)} \alpha_i^{p-1} & \cdots & \sum \frac{\varphi(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)} \alpha_i^{2p-2} \end{vmatrix}.$$

D'après un théorème bien connu ([1]) relatif au produit des déter-

---

([1]) On aura évidemment

$$\Delta_0 = \sum \frac{\varphi(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)} = + \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{a_0^2}.$$

minants et dû à Binet et à Cauchy, on aura

$$(30)\qquad \Delta_{p-1}=\sum\frac{\varphi(\alpha_{r_1})\varphi(\alpha_{r_2})\ldots\varphi(\alpha_{r_p})}{f'(\alpha_{r_1})f'(\alpha_{r_2})\ldots f'(\alpha_{r_p})}\zeta^2(\alpha_{r_1},\alpha_{r_2},\ldots,\alpha_{r_p}),$$

la somme étant étendue à toutes les combinaisons possibles de p racines, et l'expression $\zeta(\alpha_{r_1},\ldots,\alpha_{r_p})$ indiquant, suivant la notation de M. Sylvester, le produit des différences des racines α_{r_1}, $\alpha_{r_2},\ldots,\alpha_{r_p}$.

Δ_{p-1} sera le dénominateur de la valeur de $\psi_p(z)$; on calculera par les mêmes principes le numérateur, qui a pour expression

$$(31)\qquad \sum\frac{\varphi(\alpha_{r_1})\varphi(\alpha_{r_2})\ldots\varphi(\alpha_{r_{p+1}})}{f'(\alpha_{r_1})f'(\alpha_{r_2})\ldots f'(\alpha_{r_{p+1}})}\zeta^2(\alpha_{r_1},\alpha_{r_2},\ldots,\alpha_{r_{p+1}})\frac{f(z)}{(z-\alpha_{r_1})(z-\alpha_{r_2})\ldots(z-\alpha_{r_{p+1}})},$$

et l'on aura enfin

$$(32)\qquad m_p A_p\psi_p(z)=\frac{a_0}{\Delta_{p-1}}\sum\frac{\varphi(\alpha_{r_1})\ldots\varphi(\alpha_{r_{p+1}})}{f'(\alpha_{r_1})\ldots f'(\alpha_{r_{p+1}})}\zeta^2(\alpha_{r_1},\ldots,\alpha_{r_{p+1}})\frac{f(z)}{(z-\alpha_{r_1})\ldots(z-\alpha_{r_{p+1}})}.$$

En égalant les coefficients des plus hautes puissances de z, on a

$$(33)\qquad m_p A_p^2=\frac{a_0^2\Delta_p}{\Delta_{p-1}},$$

ou encore, d'après la formule (14),

$$A_{p-1}A_p=a_0^2\frac{\Delta_p}{\Delta_{p-1}},\qquad a_0 A=a_0^2\Delta_0.$$

Il suit de ces formules que les premiers termes des fonctions de Sturm,

$$a_0,\ A,\ A_1,\ldots,A_{n-1},$$

présentent les mêmes suites de signes que

$$1,\ \Delta_0,\Delta_1,\ldots,\Delta_{n-1}.$$

On aura donc

$$\psi_p(z)=\lambda_p\sum\frac{\varphi(\alpha_1)\ldots\varphi(\alpha_{p+1})}{f'(\alpha_1)\ldots f'(\alpha_{p+1})}\zeta^2(\alpha_1,\ldots,\alpha_{p+1})\frac{f(z)}{(z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_{p+1})},$$

où λ_p sera un facteur essentiellement positif, déterminé par les équations

$$(34)\qquad \lambda_{p-1}\lambda_p = \frac{a_0^2}{\Delta_2^{p-1}}, \quad \lambda_0 = 1.$$

Ces équations donnent sans difficulté les valeurs des coefficients λ. On trouve

$$\lambda_{2p} = \left(\frac{\Delta_0\Delta_2\ldots\Delta_{2p-2}}{\Delta_1\Delta_3\ldots\Delta_{2p-1}}\right)^2, \quad \lambda_{2p+1} = \left(\frac{a_0\Delta_1\Delta_3\ldots\Delta_{2p-1}}{\Delta_0\Delta_2\ldots\Delta_{2p}}\right)^2.$$

Remarquons cette conséquence, que la suite des premiers termes des fonctions de Sturm présente le même nombre de permanences et de variations que la série

$$1,\ \Delta_0,\ \Delta_1,\ldots,\ \Delta_{n-1}.$$

Le nombre des permanences de cette suite indique donc le nombre des carrés positifs de la forme, celui des variations le nombre des carrés négatifs.

VI.

Appliquons la même méthode à la recherche des expressions des fonctions de Sturm en fonction des coefficients. Soit

$$(35)\qquad \Phi = -c_{ik}z^i z_1^k.$$

Égalons à zéro les coefficients de $z_1^{n-1},\ldots,z_1^{n-p}$; nous aurons ainsi les équations

$$L_1 = \frac{\partial\Phi}{\partial z_1^{n-1}} = -\Sigma c_{i,n-1}z^i = 0,$$

$$L_2 = \frac{\partial\Phi}{\partial z_1^{n-2}} = -\Sigma c_{i,n-2}z^i = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$L_p = \frac{\partial\Phi}{\partial z_1^{n-p}} = -\Sigma c_{i,n-p}z^i = 0,$$

et alors on aura

$$m_p A_p \psi_p(z) = -\Sigma c_{i,n-p-1}z^i = L_{p+1}.$$

Faisant l'élimination des indéterminées $z^n, z^{n-1},\ldots, z^{n-p}$, on obtient

$$\begin{vmatrix} c_{n-1,n-1} & c_{n-2,n-1} & \cdots & c_{n-p,n-1} & L_1 \\ c_{n-1,n-2} & c_{n-2,n-2} & \cdots & c_{n-p,n-2} & L_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & c_{n-p,n-p} & L_p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n-1,n-p-1} & \cdots & \cdots & c_{n-p,n-p-1} & L_{p+1} - m_p A_p \psi_p(z) \end{vmatrix} = 0.$$

On déduit de là, en posant

$$(36) \qquad D_{p-1} = \begin{vmatrix} c_{n-1,n-1} & \cdots & c_{n-p,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n-1,n-p} & \cdots & c_{n-p,n-p} \end{vmatrix} = 0,$$

$$(37) \qquad m_p A_p \psi_p(z) = \frac{1}{D_{p-1}} \begin{vmatrix} c_{n-1,n-1} & \cdots & c_{np,n-1} & L_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n-1,n-p-1} & \cdots & c_{n-p,n-p-1} & L_{p+1} \end{vmatrix},$$

et en comparant les plus hautes puissances de z,

$$(38) \qquad m_p A_p^2 = \frac{-D_p}{D_{p-1}}.$$

En rapprochant cette formule de l'expression (34), on en déduit

$$\frac{(-1)^p D_p}{a_0^{2p}\Delta_p} = \frac{(-1)^{p-1} D_{p-1}}{a_0^{2(p-1)}\Delta_{p-1}} = \cdots = \frac{D_0}{\Delta_0} = -a_0^2.$$

On a donc

$$(39) \qquad D_p = (-1)^{p-1} a_0^{2p+2} \Delta_p.$$

Ainsi la suite des quantités Δ peut être remplacée par celle des quantités D, et le nombre des carrés positifs de la forme est égal à celui des variations comprises dans la suite

$$1,\ D_0,\ D_1, \ldots,\ D_{n-1},$$

et l'on aura

$$(40) \quad \psi_p(z) = \frac{(-1)^{p-1}\lambda_p}{a_0^{2p+2}} \begin{vmatrix} C_{n-1,n-1} & \cdots & C_{n-p,n-p} & L_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{n-1,n-p-1} & \cdots & C_{n-p,n-p-1} & L_p \end{vmatrix},$$

λ_p ayant la valeur déjà indiquée [(formules 34)].

VII.

Les polynômes L_k qui figurent dans les expressions précédentes des fonctions de Sturm peuvent prendre une forme très-simple que nous allons indiquer.

La fonction

$$F = \frac{f(z)\varphi(z_1) - f(z_1)\varphi(z)}{z - z_1}$$

peut évidemment s'écrire de la manière suivante :

$$(41) \qquad F = f(z)\frac{\varphi(z_1) - \varphi(z)}{z - z_1} - \varphi(z)\frac{f(z_1) - f(z)}{z - z_1},$$

ou, en effectuant les divisions,

$$(42) \qquad \left\{ \begin{aligned} F = \sum [&\varphi(z)(a_0 z^{p-1} + a_1 z^{p-2} + \ldots + a_{p-1}) \\ &- f(z)(b_0 z^{p-1} + b_1 z^{p-2} + \ldots + b_{p-1})] z_1^{n-p}. \end{aligned} \right.$$

On a donc

$$(43) \qquad \left\{ \begin{aligned} L_p &= -\sum C_{i,n-p} z^i \\ &= \varphi(z)(a_0 z^{p-1} + \ldots + a_{p-1}) - f(z)(b_0 z^{p-1} + \ldots + b_{p-1}). \end{aligned} \right.$$

Telles sont les expressions des quantités L_p.

Il résulte de cette formule et de l'équation (40) que les fonctions $\psi_p(x)$, qui dépendent linéairement des quantités L_k, prennent la forme

$$(44) \qquad \psi_p(x) = D_p \varphi(x) - N_p f(x),$$

où D_p et N_p sont des polynômes de degré p dont la détermination résulte sans difficulté de la formule (40); mais on peut aussi déduire de la formule précédente un nouveau mode d'expression des fonctions de Sturm dû à M. Cayley. Posons

$$(45) \quad \psi_p(x) = (m_0 x^p + m_1 x^{p-1} + m_2 x^{p-2} + \ldots)\varphi(x) - (n_0 x^p + \ldots) f(x),$$

et écrivons que les puissances de x supérieures à la $(n-p-1)^{\text{ième}}$

disparaissent du second membre. Nous aurons ainsi

$$(46)\quad \begin{cases} m_0 b_0 - n_0 a_0 = 0, \\ m_0 b_1 + m_1 b_0 - n_0 a_1 - n_1 a_0 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ m_0 b_{2p} + m_1 b_{2p-1} + \ldots - n_0 a_{2p} - n_1 a_{2p-1} - \ldots = 0. \end{cases}$$

Si, entre ces équations et la précédente, nous éliminons les rapports des quantités m, n, nous obtiendrons

$$(47)\qquad \psi(x) = \lambda'_p \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{2p} & x^p f(x) \\ \ldots & a_0 & \ldots & a_{2p-1} & x^{p-1} f(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & a^p & f(x) \\ b_0 & \ldots & \ldots & b_{2p} & x^p \varphi(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & b^p & \varphi(x) \end{vmatrix},$$

λ'_p étant un coefficient à déterminer. Cette forme des fonctions ψ rend évidente leur propriété d'être du degré $n-p$. Le coefficient de la plus haute puissance de x est

$$\lambda' \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & \ldots & a_{2p+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & a_{p-1} & a_p & a_{p+1} \\ b_0 & \ldots & \ldots & \ldots & b_{2p+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & b_p & b_{p+1} \end{vmatrix}.$$

Le déterminant qui multiplie λ'^p est évidemment identique, à un facteur numérique près, à celui qui a été désigné par D_p. Or ce déterminant a pour terme principal $(a_0 b_{p+1})^{p+1}$, et $a_0 b_{p+1}$ qui figure avec le signe — dans $d_{n-p-1,n}$ se trouve par conséquent avec ce signe dans tous les éléments $c_{n-\alpha,n-\beta}$ pour lesquels $\alpha+\beta = p+2$. Il se trouve donc dans D_p avec le signe $(-1)^{\frac{(p+1)(p+2)}{2}}$, et l'on a

$$(48)\qquad D_p = (-1)^{\frac{(p+1)(p+2)}{2}} \begin{vmatrix} a_0 & \ldots & \ldots & a_{2p+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & a_p & a_{p+1} \\ b_0 & \ldots & \ldots & b_{2p+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & b_p & b_{p+1} \end{vmatrix};$$

par suite

$$\lambda'^p(-1)^{\frac{(p+1)(p+2)}{2}} = \frac{(-1)^{p-1}\lambda_p}{a_0^{2p+2}}, \quad \lambda'_p = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \frac{\lambda_p}{a_0^{2p+2}}.$$

VIII.

On déduit des résultats qui précèdent quelques conséquences relatives à la théorie de l'élimination. On a, d'après l'équation (30),

$$(49) \qquad \Delta_{n-1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_n).$$

Donc la condition pour que les deux équations $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$ aient une racine commune est

$$(50) \qquad \Delta_{n-1} = D_{n-1} = 0.$$

Les deux formes sous lesquelles nous avons mis D_p donnent la résultante de Cauchy et de Jacobi et celle de M. Sylvester. Plus généralement, pour que les deux équations aient p racines communes, il faut et il suffit que la fonction quadratique Φ se réduise à une somme de $n-p$ carrés. On sait comment on peut exprimer cette condition. [*Voir* notre Mémoire *Sur la théorie algébrique des formes quadratiques* (*Journal de Liouville*, t. XIX, 2e série)]. Il est clair, d'ailleurs, que dans ce cas la fonction ψ_{n-p} doit se réduire identiquement à zéro.

IX.

Reprenons l'identité déjà donnée

$$(51) \qquad \frac{f(z)\varphi(z_1) - f(z_1)\varphi(z)}{z - z_1} = m\psi(z)\psi(z_1) + m_1\psi_1(z)\psi_1(z_1) + \ldots.$$

Si dans cette équation on fait $z_1 = z$, on obtient

$$(52) \qquad \varphi(z)f'(z) - \varphi'(z)f(z) = m\psi^2(z) + m_1\psi_1^2(z) + \ldots,$$

formule déjà donnée par M. Brioschi. Si l'on y fait $z = \alpha_i$, on aura

$$(53) \qquad \varphi(\alpha_i)f'(\alpha_i) = m\psi^2(\alpha_i) + m_1\psi_1^2(\alpha_i) + \ldots;$$

mais, si dans la formule (51) on fait $z = \alpha_i$, $z_1 = \alpha_k$, on obtient

$$(54) \qquad 0 = m\psi(\alpha_i)\psi(\alpha_k) + m_1\psi_1(\alpha_i)\psi_1(\alpha_k) + \ldots.$$

Il résulte de ces formules que, si l'on pose

$$u_{ik} = \frac{\sqrt{m_k}\,\psi_k(\alpha_i)}{\sqrt{\varphi(\alpha_i)f'(\alpha_i)}},$$

les coefficients u_{ik}, au nombre de n^2, définissent une substitution linéaire orthogonale. On aura donc entre ces quantités les relations bien connues, dont les plus importantes sont les suivantes :

$$(55) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum_i \frac{\psi_k^2(\alpha_i)}{\varphi(\alpha_i)f'(\alpha_i)} = \frac{1}{m_k}, \\ &\sum_i \frac{\psi_k(\alpha_i)\,\psi_{k'}(\alpha_i)}{\varphi(\alpha_i)f'(\alpha_i)} = 0. \end{aligned} \right.$$

Ces deux dernières formules sont fondamentales dans la théorie de l'interpolation.

M. Kronecker a remarqué qu'elles définissent complétement les fonctions de Sturm. En effet, la dernière ayant lieu pour toutes les valeurs de k' inférieures à k, on aura

$$(56) \qquad \sum_i \frac{\psi_k(\alpha_i)\,\alpha_i^{k'}}{f'(\alpha_i)\,\varphi(\alpha_i)} = 0, \quad k' < k,$$

ce qui définit la fonction ψ_k à un facteur constant près.

On pourrait encore remarquer d'autres formules relatives aux déterminants formés avec u_{ik}, et qui ont été signalées par MM. Sylvester et Brioschi. Nous reviendrons plus loin sur ce sujet pour donner quelques formules analogues à la relation fondamentale (51), d'où nous avons déduit toutes celles de cet article.

X.

Nous avons vu (VII) que la fonction $\psi_k(z)$ s'exprime par une équation de la forme

$$(57) \qquad \psi_k(z) = D_k\varphi(z) - N_k f(z),$$

où N_k, D_k sont des polynômes de degré k. On peut facilement trouver l'expression de D_k, et par conséquent celle de N_k en fonction des racines de $f(x)$. On a, en effet,

$$(58) \qquad \psi_k(\alpha_i) = D_k(\alpha_i)\,\varphi(\alpha_i),$$

et cette équation, faisant connaître n valeurs de $D_k(x)$, suffit à la détermination de ce polynôme. On trouve en effet que, si l'on pose

$$(59) \quad \psi_k(z) = \lambda_k \sum \frac{\varphi(\alpha_1)\ldots\varphi(\alpha_{k+1})}{f'(\alpha_1)\ldots f'(\alpha_{k+1})}\zeta^2(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k+1})\frac{f(z)}{(z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_{k+1})},$$

on aura

$$(60) \quad D_k(z) = \lambda_k \sum \frac{\varphi(\alpha_1)\ldots\varphi(\alpha_k)}{f'(\alpha_1)\ldots f'(\alpha_k)}\zeta^2(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)(z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_k).$$

On reconnaît sans peine, *a posteriori*, que les formules (58) sont satisfaites; car, si l'on y remplace z par une racine α_i de $f(z)$ et $\frac{f(z)}{z-\alpha_i}$ par $f'(\alpha_i)$, la fonction $\psi(\alpha_i)$ est égale, terme à terme, à la fonction $D_k(\alpha_i)$ multipliée par le facteur $\varphi(\alpha_i)$.

XI.

Des conséquences intéressantes se déduisent de la considération de la forme adjointe de la fonction quadratique Φ. Soit

$$(61) \qquad \Phi = \sum \frac{\varphi(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)}\left[\frac{f(z)}{z-\alpha_i}\right]^2,$$

en supposant toujours qu'après la division on ait remplacé les puissances de z par des variables indépendantes. On aura, en posant pour abréger

$$(62) \qquad B_i = \frac{\varphi(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)},$$

les formules suivantes, qui définissent la substitution à effectuer pour obtenir la forme adjointe :

$$(63)\quad \begin{cases} X_0 = \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial z^0} = \sum B_i \frac{f(z)}{z-\alpha_i}(a_0\alpha_i^{n-1}+\ldots+a_{n-1}), \\ X_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial z^1} = \sum B_i \frac{f(z)}{z-\alpha_i}(a_0\alpha_i^{n-2}+\ldots+a_{n-2}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_{n-1} = \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial z^{n-1}} = \sum B_i \frac{f(z)}{z-\alpha_i}a_0. \end{cases}$$

On déduit de là l'identité

$$(64)\quad X_0 + hX_1 + \ldots + h^{n-1}X_{n-1} = \sum B_i \frac{f(z)}{z-\alpha_i}\frac{f(h)}{h-\alpha_i},$$

et, si dans cette formule on fait $h = \alpha_i$, on trouve

$$(65)\quad \frac{f(z)}{z-\alpha_i} = \frac{X_0 + \alpha_i X_1 + \ldots + \alpha_i^{n-1}X_{n-1}}{B_i f'(\alpha_i)},$$

et, en substituant dans Φ,

$$(66)\quad \Phi = \sum \frac{1}{\varphi(\alpha_i)f'(\alpha_i)}(X_0 + \alpha_i X_1 + \ldots + \alpha_i^{n-1}X_{n-1})^2.$$

La fonction adjointe Φ_1 sera égale à Φ multipliée par le discriminant de Φ, qui a pour valeur

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_n).$$

On connaît d'ailleurs l'expression de la forme adjointe Φ_1 en fonction des coefficients de Φ. Elle est égale au déterminant

$$(-1)^n \begin{vmatrix} c_{n-1,n-1} & \ldots & c_{n-1,0} & X_{n-1} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ c_{0,n-1} & \ldots & c_{0,0} & X_0 \\ X_{n-1} & \ldots & X_0 & 0 \end{vmatrix},$$

ou, en appelant A_{ik} le coefficient de $-c_{ik}$ dans le discriminant, on aura

$$(67)\quad \Phi_1 = \sum A_{ik}X_iX_k.$$

Si nous comparons cette nouvelle expression à la formule (66), nous aurons

$$(68)\qquad A_{ik} = \Delta \sum \frac{a^{i+k}}{\varphi(\alpha_i) f'(\alpha_i)}.$$

On aura donc

$$A_{ik} = A_{i'k'},$$

toutes les fois que $i + k$ sera égal à $i' + k'$. Ce résultat est dû à Jacobi; nous pouvons donc remplacer A_{ik} par A_{i+k}, et nous voyons que la forme adjointe ne dépend que de $2n - 1$ coefficients. Son discriminant

$$\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & \ldots & A_{n-1} \\ A_1 & A_2 & \ldots & \ldots & A_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n-1} & \ldots & \ldots & \ldots & A_{2n-1} \end{vmatrix}$$

appartient à la classe des déterminants appelés *persymétriques* par M. Sylvester.

Nous voyons donc que ces formes quadratiques, introduites dans la science par M. Hermite, ont, comme il était facile de s'y attendre, un caractère tout spécial. Leur propriété essentielle se manifeste clairement dans la proposition que nous venons de démontrer, relativement à leurs formes adjointes. Réciproquement, il est facile de démontrer que toute forme quadratique ayant pour adjointe une fonction à déterminant persymétrique se rattache d'une manière directe à un problème d'élimination de la nature de ceux qui sont considérés ici.

Supposons, en effet, qu'on se donne la forme adjointe, c'est-à-dire les $2n - 1$ quantités A_i, et proposons-nous de déterminer les fonctions entières $f(x)$, $\varphi(x)$. On aura, d'après l'équation (68),

$$(69)\qquad A_{r+s} = \Delta \sum \frac{\alpha_i^{r+s}}{\varphi(\alpha_i) f'(\alpha_i)}.$$

On déduit de ces équations les suivantes :

$$(70)\qquad \begin{cases} a_0 A_n + a_1 A_{n-1} + \ldots + a_n A_0 = 0, \\ a_0 A_{n+1} + a_1 A_n + \ldots + a_n A_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_0 A_{2n-1} + \ldots + a_n A_{n-2} = 0, \end{cases}$$

$a_0, a_1, \ldots, a_n$ désignant, comme auparavant, les coefficients de $f(x)$.

Les équations (69) peuvent être remplacées par les équations (70) et par n d'entre elles qui détermineront les n quantités $\varphi(\alpha_1), \ldots, \varphi(\alpha_n)$ quand $f(x)$ sera connu. Δ étant le discriminant, il doit en effet être considéré comme connu.

Les équations (70) étant un nombre insuffisant pour déterminer $f(x)$, on déduira pour ce polynôme une expression

$$f(x) = \lambda f_1(x) + \mu\varphi_1(x).$$

Comme d'ailleurs $\varphi(x)$ est déterminé par n valeurs seulement, $\varphi(x)$ contiendra aussi une arbitraire. Rien ne distinguant dans les développements qui précèdent $\varphi(x)$ de $f(x)$, on aura

$$\varphi(x) = \lambda_1 f_1(x) + \mu_1\varphi_1(x).$$

Telle est donc l'expression de nos deux fonctions. La fonction Φ qui leur correspond contiendra en facteur $\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1$, et ne différera que par un facteur constant de celle que nous avons prise pour point de départ. Il suffira donc que le déterminant $\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1$ ait une valeur déterminée pour que la forme Φ soit identique à celle qui a été proposée.

Il est donc démontré que tout déterminant persymétrique se rattache à l'étude d'un problème d'élimination. Cette proposition est essentielle dans l'étude de cette classe de déterminants.

XII.

Nous avons démontré dans ce qui précède, par rapport aux fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$, dont la seconde peut être de degré $n-1$, que, si l'on forme la suite

$$1,\ \Delta_0,\ \Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1},$$

où

$$(71) \qquad \Delta_{p-1} = \sum \frac{\varphi(\alpha_1)\ldots\varphi(\alpha_p)}{f'(\alpha_1)\ldots f'(\alpha_p)}\zeta^2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p),$$

la différence $\pi - \nu$ entre le nombre des permanences π de la suite précédente et celui ν des variations de cette suite est égale à l'indice intégral de $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$. On peut déduire de cette proposition le théorème de Sturm dans toute sa généralité.

En effet, déterminons une nouvelle fonction de degré $n-1$, $\varphi_1(x)$, par la condition

$$\varphi(x)+\mathrm{A}f(x)=(t-x)\varphi_1(x), \tag{72}$$

et appliquons le théorème précédent à $\varphi_1(x)$ et à $f(x)$. En remarquant que

$$\varphi_1(\alpha_i)=\frac{\varphi(\alpha_i)}{t-\alpha_i},$$

on voit que le nombre des variations contenues dans la suite

$$\begin{aligned}
&f(t),\\
&\Delta_0 f(t)=\sum\frac{\varphi(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)}\,\frac{f(t)}{t-\alpha_i},\\
&\Delta_1 f(t)=\sum\frac{\varphi(\alpha_i)\,\varphi(\alpha_j)}{f'(\alpha_i)f'(\alpha_j)}\,\frac{f(t)\,(\alpha_i-\alpha_j)^2}{(t-\alpha_i)(t-\alpha_j)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\Delta_{p-1} f(t)=\sum\frac{\varphi(\alpha_1)\ldots\varphi(\alpha_p)}{f'(\alpha_i)\ldots f'(\alpha_p)}\,\zeta^2(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)\,\frac{f(t)}{(t-\alpha_i)\ldots(t-\alpha_p)}
\end{aligned}$$

sera précisément égal au nombre des racines imaginaires de $f(x)$, augmenté du nombre des racines réelles pour lesquelles $\frac{\varphi(x)}{(t-x)f'(x)}$ est négatif; ce dernier nombre sera égal à celui des racines supérieures à t pour lesquelles $\frac{\varphi(x)}{f'(x)}$ est positif, diminué de celui des racines inférieures à t pour lesquelles $\frac{\varphi(x)}{f'(x)}$ est négatif. Donc, si nous substituons deux nombres t_0 et t_1 ($t_0 < t_1$), nous arriverons à cette conclusion que, en désignant par (t_0) et (t_1) les nombres des variations de la suite correspondante, la différence $(t_0)-(t_1)$ indiquera le nombre des racines comprises entre t_0 et t_1 pour lesquelles $\frac{\varphi(x)}{f'(x)}$ est positif, diminué du nombre des racines comprises dans l'intervalle considéré pour lesquelles $\frac{\varphi(x)}{f'(x)}$ est négatif. En d'autres termes, $(t_0)-(t_1)$ sera l'indice intégral de $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ entre les limites t_0 et t_1. On aura

$$(t_0)-(t_1)=\mathcal{J}_{t_0}^{t_1}\frac{f(x)}{\varphi(x)}. \tag{73}$$

Du reste, la suite des fonctions précédentes est évidemment identique à celle des fonctions de Sturm, dont nous avons déjà donné l'expression. Le théorème de Sturm se trouve donc établi dans toute sa généralité.

Si nous avions déterminé une fonction φ_2 par la condition

$$\varphi_2(x) = \mathrm{A}f(x) + (t - x)\,\varphi(x),$$

nous aurions obtenu à la place de la suite (72) celle qui est formée des polynômes D_k, ce qui est conforme aux résultats connus.

Plus généralement, étant données deux fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$, déterminons-en une nouvelle par les conditions

$$(t - x)\,\varphi(x) = (t' - x)\,\varphi_1(x) + \mathrm{A}f(x),$$

on obtiendra une suite de fonctions

$$(74)\quad \left\{\begin{array}{l} f(t),\ldots, \\ \Delta_{p-1}f(t) = \sum \dfrac{f'(\alpha_1)\ldots f'(\alpha_p)}{\varphi(\alpha_1)\ldots\varphi(\alpha_p)}\,\dfrac{f(t)\zeta^2(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p)}{(t-\alpha_1)\ldots(t-\alpha_p)}\,(t'-\alpha_1)\ldots(t'-\alpha_p), \end{array}\right.$$

contenant deux variables t, t' et qui ont été définies par M. Hermite. Le nombre π relatif à cette suite est égal à celui des racines pour lesquelles $\dfrac{\varphi(x)(t'-x)}{(t-x)f(x)}$ est positif, augmenté du nombre des racines imaginaires; si, pour plus de simplicité, on suppose que $\varphi(x)$ soit la dérivée de $f'(x)$, on voit que π deviendra le nombre des racines imaginaires augmenté de celui des racines réelles non comprises dans l'intervalle de t à t'.

Ces nouvelles fonctions à deux variables s'obtiendront évidemment en appliquant la méthode de Sturm aux deux polynômes $f(x)$ et $\mathrm{A}f(x) + (t' - x)f'(x)$, A se déterminant par la condition que cette dernière fonction se réduise au degré $n - 1$, ce qui exige que $\mathrm{A} = n$. On aura donc

$$f(x),\quad f'_y(x, 1) + t' f'_x(x, 1)$$

pour les expressions des deux premières fonctions; les autres s'en déduiront par la division : c'est le résultat de M. Hermite.

Enfin on peut déterminer une fonction $\varphi_1(x)$ par la condition

$$\varphi(x)(t - x)(t' - x) = \varphi_1(x) + (\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}x + \mathrm{C})f(x);$$

alors on aura la suite des fonctions

$$f(t),$$
$$\Delta_{p-1}f(t)=\sum\frac{\varphi(\alpha_1)\ldots\varphi(\alpha_p)}{f'(\alpha_1)\ldots f'(\alpha_p)}\zeta^2(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)(t-\alpha_1)\ldots(t-\alpha_p)(t'-\alpha_1)\ldots(t'-\alpha_p),$$

qui jouira des mêmes propriétés que la suite (74), et qui est d'ailleurs formée des fonctions réduites D_k qu'on obtient en formant la suite (74).

XIII.

D'après ce qui précède, nous voyons que, si l'on veut trouver le nombre des racines réelles d'une équation comprises entre deux limites données, on aura à procéder de la manière suivante.

On prendra la forme quadratique

$$\text{(A)} \qquad \frac{f(z)f'(z_1)-f'(z_1)f(z)}{z-z_1},$$

et on la décomposera en carrés, comme nous l'avons indiqué (IV). Alors *les différents carrés donneront, à des facteurs constants près dont le signe sera immédiatement connu, la suite des fonctions de Sturm.* En substituant dans cette suite deux nombres t_0, t_1, la différence des nombres de variations indiquera le nombre des racines réelles comprises dans l'intervalle considéré.

M. Hermite a donné une méthode un peu différente. On considère la fraction

$$\text{(B)} \qquad \frac{f(z)f'(z_1)(t-z_1)-f(z_1)f'(z)(t-z)}{z-z_1},$$

et on la décompose en carrés. Le nombre π des carrés positifs indique le nombre des racines imaginaires augmenté du nombre des racines inférieures à t. En effet, nous avons vu que π est égal au nombre des racines imaginaires augmenté de celui des racines réelles pour lesquelles $\frac{f'(z)(t-z)}{f'(z)}$ ou $t-z$ est positif. C'est précisément la proposition de M. Hermite.

Si l'on revient à la forme quadratique (A), on sait que le nombre de ses carrés négatifs indique le nombre de couples de racines imaginaires, et $\pi - \nu$ est le nombre total des racines réelles. On déduit de là le théorème suivant énoncé par M. Hermite :

Introduisons l'homogénéité dans la forme (A), qui pourra s'écrire

$$\frac{f(x,y)\,y_0 f'_{x_0}(x_0,y_0) - f(x_0,y_0)\,y f'_x(x,y)}{xy_0 - yx_0},$$

et remplaçons nf par $xf'_x + yf'_y$; nous aurons

$$f'_x f'_{x_0} + yy_0 \frac{f'_y f'_{x_0} - f'_{y_0} f'_x}{xy_0 - yx_0}.$$

Le terme $f'_x f'_{x_0}$ donnera un carré positif dans la forme Φ, et, par suite, la forme

$$\frac{f'_y(x,1) f'_{x_0}(x_0,1) - f'_{y_0}(x_0,1) f'_x(x,1)}{x - x_0}$$

contiendra une indéterminée de moins et un carré positif de moins que la forme (A). Nous voyons donc que le nombre $\pi - \nu$ relatif à cette forme sera celui des racines réelles diminué d'une unité. Le nombre ν demeurera celui des couples de racines imaginaires. On voit, de plus, qu'en décomposant en carrés, d'après la méthode déjà indiquée plusieurs fois, on obtiendra celle des fonctions de Sturm qui suivent la dérivée première f'_x.

Appliquons, par exemple, la méthode précédente à l'équation du troisième degré

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0;$$

nous aurons

$$\frac{(bx^2 + 2cx + d)(ax_0^2 + 2bx_0 + c) - (ax^2 + 2bx + c)(bx_0^2 + 2cx_0 + d)}{x - x_0},$$

et, en effectuant la division,

$$2(b^2 - ac)xx_0 + (bc - ad)(x + x_0) + 2(c^2 - bd),$$

ou, en remplaçant x_0 par x et introduisant y pour l'homogénéité,

$$(b^2 - ac)x^2 + (bc - ad)xy + (c^2 - bd)y^2.$$

Pour que les racines soient réelles, il faut que cette forme soit décomposable en deux carrés de même signe; ils seront alors affectés de coefficients positifs, puisqu'il ne peut y avoir quatre racines imaginaires. On a donc

$$(bc - ad)^2 - 4(b^2 - ac)(c^2 - bd) < 0$$

pour la condition de réalité des racines de l'équation du troisième degré, ce qui est d'accord avec les résultats connus.

XIV.

On peut ajouter aux formules de l'article IX quelques relations intéressantes, que nous allons donner avant de terminer cette partie de notre travail.

Rappelons la formule

$$\psi_k(z) = \mathrm{D}_k \varphi(z) - \mathrm{N}_k f(z).$$

Si l'on substitue les valeurs de $\psi_k(z)$ dans l'équation fondamentale

$$\frac{f(z)\varphi(z_1) - f(z_1)\varphi(z)}{z - z_1} = \sum m_k \psi_k(z)\psi_k(z_1),$$

on aura

$$f(z)\frac{\varphi(z_1) - \varphi(z)}{z - z_1} + \varphi(z)\frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1}$$
$$= \varphi(z)\sum m_k \mathrm{D}_k \psi_k(z_1) - f(z)\sum m_k \mathrm{N}_k \psi_k(z_1),$$

d'où en égalant les coefficients de $f(z)$ et $\varphi(z)$ dans les deux membres, ce qui est évidemment permis,

$$(75)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} &= \sum m_k \psi_k(z_1)\mathrm{D}_k(z) = \sum m_k \psi_k(z)\mathrm{D}_k(z_1), \\ \frac{\varphi(z) - \varphi(z_1)}{z - z_1} &= \sum m_k \mathrm{N}_k(z)\psi_k(z_1) = \sum m_k \mathrm{N}_k(z_1)\psi_k(z). \end{aligned}\right.$$

On peut dans ces formules faire $z = z_1$, donner à z et à z_1 deux valeurs différentes, racines de $f(z)$ ou de $\varphi(z)$. Nous ne nous arrêterons pas aux conséquences qu'on obtiendrait, et nous allons donner d'autres relations.

Les deux dernières fonctions N, D, dont l'expression est connue, donnent, si on les divise par une constante, les deux fonctions M, N, de degré $n-1$, satisfaisant à l'équation

$$(76)\qquad Mf + N\varphi = 1;$$

par suite, les deux polynômes

$$Mf_1 + N_1\varphi - 1,\quad M_1 f + N\varphi_1 - 1,$$

où l'on désigne par l'indice 1 le résultat de la substitution de z_1 à z, seront divisibles par $z - z_1$. Cela posé, on peut écrire l'identité suivante :

$$F = \frac{f\varphi_1 - \varphi f_1}{z - z_1} = -f\varphi_1 \frac{Mf_1 + N_1\varphi - 1}{z - z_1}$$
$$+ \varphi f_1 \frac{M_1 f + N\varphi_1 - 1}{z - z_1} - ff_1 \frac{M_1\varphi - M\varphi_1}{z - z_1} - \varphi\varphi_1 \frac{Nf_1 - N_1 f}{z - z_1},$$

et en remplaçant dans F, $\psi_k(z)$, $\psi_k(z_1)$ par leurs expressions en f, φ, N_k, D_k, on aura aussi

$$(77)\qquad \left\{\begin{aligned} F = {} & \varphi\varphi_1 \sum m_k D_k(z) D_k(z_1) + ff_1 \sum m_k N_k(z) N_k(z_1) \\ & - \varphi f_1 \sum m_k D_k(z) N_k(z_1) - \varphi_1 f \sum m_k D_k(z_1) N_k(z). \end{aligned}\right.$$

En égalant dans les deux expressions de F les coefficients des produits $\varphi\varphi_1$, ff_1, φf_1, $\varphi_1 f$, on aura les quatre formules

$$(78)\qquad \sum m_k D_k(z) D_k(z_1) = \frac{N_1 f - Nf_1}{z - z_1},$$

$$(79)\qquad \sum m_k N_k(z) N_k(z_1) = \frac{M\varphi_1 - M_1\varphi}{z - z_1},$$

$$(80)\qquad \sum m_k D_k(z) N_k(z_1) = \frac{1 - M_1 f - N\varphi_1}{z - z_1},$$

$$(81)\qquad \sum m_k D_k(z_1) N_k(z) = \frac{1 - Mf_1 - N_1\varphi}{z - z_1}.$$

La première de ces équations met en évidence que les réduites D_k constituent une suite de Sturm relative aux deux fonctions f et N. Comme d'ailleurs, pour chaque racine de f, on a, d'après l'équation (76), $N = \frac{1}{\varphi}$, l'indice des deux fractions $\frac{N}{f}$, $\frac{\varphi}{f}$ sera le même :

c'est ce qui explique pourquoi la suite des réduites peut tenir lieu de celle des fonctions.

Nous ne nous arrêterons pas aux différentes hypothèses qu'on peut faire sur z et sur z_1 dans les formules (80) et (81).

XV.

On sait que d'importantes recherches de M. Hesse reposent sur une transformation des équations des courbes du troisième et du quatrième ordre. Il est avantageux, dans l'étude d'un grand nombre de questions, de mettre le premier membre de l'équation de ces courbes sous la forme d'un déterminant dont les éléments sont des fonctions linéaires des coordonnées. Il ne sera donc pas inutile de montrer que le premier membre de toute équation algébrique peut être mis, et d'une infinité de manières, sous la forme d'un déterminant symétrique d'un ordre égal à celui de l'équation, et dont les éléments sont des fonctions linéaires de la variable indépendante.

Soit

$$f(x) = 0$$

une équation algébrique d'ordre n, et désignons par $\varphi(x)$ un polynôme quelconque de degré $n-1$. Nous emploierons les polynômes

$$f(x) \quad \text{et} \quad \varphi(x)(x-t),$$

qui donneront naissance, par la méthode que nous avons suivie, à une fonction quadratique

$$\sum c_{ik} z^i z^k,$$

où les éléments c_{ik} seront de la forme

$$c_{ik} = \alpha_{ik} + \beta_{ik} t.$$

Cela posé, considérons le discriminant

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

de la forme quadratique. D'après l'article VIII, il sera la résultante de $f(x)$ et $\varphi(x)(x-t)$. Il se composera donc du produit de deux expressions : 1° la résultante R de $f(x)$ et de $\varphi(x)$, qui est une constante; 2° $f(t)$ qui est la résultante de $f(x)$ et de $x-t$. On aura donc

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix} = \mathrm{R}f(x),$$

équation qui réalise la transformation que nous avions en vue.

(*Fin de la première Partie.*)