BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Revue bibliographique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 8 (1875), p. 7-17

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1875__8__7_0>

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

Carton-Modelle von Flächen zweiter Ordnung, construirt nach Angabe von Dr A. Brill, ordentl. Professor am Grossh. Polytechnikum zu Darmstadt; dargestellt durch ineinandergefügte Kreise aus farbigem Cartonpapier. Modell Nr 1 und 2 : *Ellipsoid* verschiedener Construction. Nr 3 und 4 : *Hyperboloid*. Ganze Serie 3 Thlr.; einzelnes Modell 16 Ngr. (1).

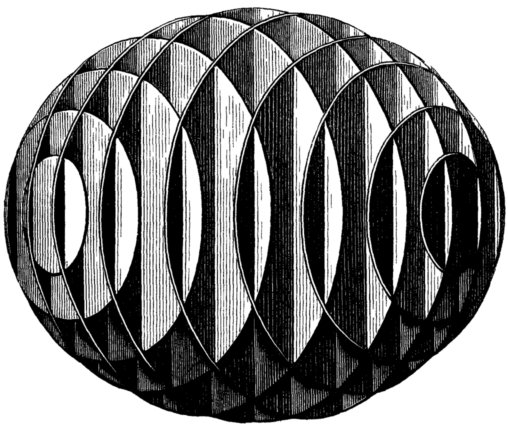
L'idée sur laquelle repose le nouveau mode de représentation matérielle des surfaces, que nous devons à M. Brill, est extrêmement ingénieuse; elle pourrait être étendue à la construction de surfaces plus compliquées que celles du second ordre : aussi allons-nous essayer d'en exposer le principe d'une manière générale.

Étant donnée une surface, il y a plusieurs moyens pour se la représenter d'une manière nette, et voici l'un de ceux que l'on emploie le plus fréquemment dans les applications. On coupe la surface par des plans parallèles, et l'on obtient une série de sections qui, dans leur ensemble, donnent des notions suffisamment précises sur la forme de la surface. Imaginons maintenant qu'au lieu d'une

---

(1) Modèles en carton de surfaces du second ordre, construits d'après les indications du Dr Brill, Professeur ordinaire à l'École Polytechnique grand-ducale de Darmstadt. Représentés par des cercles imbriqués en papier-carton colorié. Modèles nos 1 et 2 : Ellipsoïde; nos 3 et 4 : Hyperboloïde. Prix de la Série entière : 3 Thlr; un seul modèle : 16 Ngr.

seule série de sections on emploie deux séries de sections planes, et que ces séries de sections planes soient réalisées matériellement, au moyen de feuilles de papier. L'ensemble de ces feuilles donnera une idée de la surface, d'autant plus précise que les deux séries de sections parallèles seront plus rapprochées. M. Brill a choisi, pour représenter les surfaces du second ordre, les deux systèmes de sections circulaires : on a donc deux séries de cercles formés de



feuilles de papier se traversant mutuellement, et dont l'ensemble suffit à représenter très-convenablement la surface du second degré.

Mais voici la propriété intéressante d'un tel mode de représentation. Il est facile de voir que le système ainsi formé n'est pas absolument solide; il est susceptible d'un mouvement de déformation, dans lequel les sections planes demeurent invariables de forme, mais peuvent tourner autour de leurs lignes d'intersection. La limite de ce mouvement sera atteinte quand les deux séries viendront se placer dans un même plan, en reposant les unes sur les autres. Dans cet état limite, le système pourra être placé dans une enveloppe et pressé sans inconvénient. Les différents cercles seront venus s'appliquer sur un plan et y formeront alors la double série des cercles doublement tangents à une section conique. Il suffira de presser légèrement les deux extrémités de l'axe de cette section pour voir apparaître une surface du second degré, dont la forme variera suivant l'inclinaison des plans des deux séries de sections circulaires.

Nous avons à notre disposition l'ellipsoïde et l'hyperboloïde à une nappe.

Nous saisirons cette occasion pour rappeler l'attention sur un ouvrage peu connu, et qui pourrait être extrêmement utile aux commençants : c'est la *Géométrie stéréographique, ou reliefs des polyèdres pour faciliter l'étude des corps,* en vingt-cinq planches gravées, dont vingt-quatre sur carton et découpées, d'après l'Ouvrage anglais de John-Lodge Cowley, avec des Notes contenant les démonstrations des formules pour calculer les Tables des surfaces et volumes des polyèdres réguliers, par F.-C.-M. Marie, qui a paru en 1835 ([1]). Les vingt-quatre planches découpées que renferme cet Ouvrage contiennent le rabattement des principaux solides de la Géométrie des polyèdres réguliers, par exemple; il suffit de relever les faces de ces rabattements pour obtenir la représentation en relief du solide que l'on veut obtenir. Le principe est, comme on voit, beaucoup plus simple que celui de M. Brill; mais l'application pourrait être aussi utile aux commençants en Géométrie pure que le sera le nouvel appareil de M. Brill à ceux qui se proposent l'étude de la Géométrie analytique.

HOÜEL (J.), professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux. — ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES QUATERNIONS. — Paris, 1874; Gauthier-Villars, in-8°, VII-298 p. Prix : 8 fr.

L'Ouvrage dont nous avons à rendre compte constitue la fin du travail considérable sur la *Théorie des quantités complexes,* commencé il y a bientôt sept ans. Nous avons rendu compte, t. V, p. 60 du *Bulletin,* de la troisième Partie intitulée : *Théorie des fonctions multiformes,* qui comprend surtout l'étude des conceptions nouvelles de Riemann.

La quatrième Partie, que M. Hoüel publie aujourd'hui, contient une exposition élémentaire du *Calcul des Quaternions.* Cette branche de l'Analyse, une des plus belles créations d'Hamilton, n'a pas été accueillie avec la même faveur par les geomètres que la

---

([1]) Paris, BACHELIER, quai des Augustins, 55; prix : 5 fr.

Théorie des fonctions de variables imaginaires, source des plus brillantes découvertes faites en Analyse dans ce siècle. Cela tient, suivant nous, à deux causes. D'abord il a manqué à cette théorie la sanction de brillantes et importantes découvertes faites par son seul secours. En second lieu, les règles du Calcul algébrique ordinaire y sont complétement changées. On n'a pas le droit, par exemple, d'intervertir l'ordre des facteurs, ce qui complique extrêmement les applications de cette méthode. Quoi qu'il en soit, quelque jugement que l'on veuille porter sur les Quaternions, au point de vue pratique, nul ne pourra méconnaître que leur création fait le plus grand honneur à Hamilton, et que leur étude est indispensable à tous les esprits curieux et philosophiques qui veulent connaître les plus secrets ressorts des opérations algébriques.

C'est en Angleterre, cela est naturel, que cette théorie a été le plus complétement étudiée. En dehors des Ouvrages d'Hamilton, d'autres Traités, moins étendus et plus élémentaires, ceux de Tait, de Kelland, par exemple, dont nous avons rendu compte, ont contribué à répandre les principes de cette intéressante étude; mais, même dans leur pays d'origine, les Quaternions, il faut le reconnaître, n'ont pas rencontré un assentiment universel, et, parmi les innombrables travaux d'illustres géomètres, comme les Cayley, les Sylvester, les Thomson, etc., on aurait peine à en citer un grand nombre où la théorie des Quaternions soit supposée connue et employée.

Une des causes qui ont le plus contribué à empêcher, dans notre pays, la propagation de cette méthode, est, croyons-nous, le manque d'un ouvrage qui pût être abordé facilement par le lecteur privé du secours d'un maître. M. Hoüel s'est préoccupé de combler cette lacune, et nous osons affirmer qu'il y a complétement réussi. Après la lecture de son Ouvrage, on aura une idée nette du Quaternion, et l'on pourra apprécier dans leur ensemble la portée et l'intérêt des recherches de l'illustre géomètre de Dublin et de ses successeurs.

L'Ouvrage débute par une étude de la Théorie générale des opérations. Quelques notions sur ce point sont, en effet, indispensables à celui qui veut se rendre compte de la nature des Quaternions. Dans un Chapitre spécial l'auteur traite des quantités complexes les plus générales et, en particulier, de ce système si remarquable d'unités complexes, proposé pour la première fois par

Grassmann en 1844, et étudié depuis par Cauchy, sous le nom de *Clefs algébriques*.

Le reste de l'Ouvrage traite des Quaternions. Leur définition et leurs propriétés sont d'abord exposées avec une extrême simplicité. La plus grande difficulté qui se présente dans cette étude, c'est la nécessité d'employer une nouvelle Algèbre, dont les règles sont moins simples que celles de l'Algèbre ordinaire, et dont la pratique demande une plus grande attention. En outre, cette théorie fait usage de symboles particuliers, dont il importe, avant tout, de bien fixer le sens. L'auteur fait comprendre la raison de toutes ces règles, l'utilité de l'introduction de tous ces symboles.

Le Chapitre III traite de la composition des mouvements de translation. Une translation parallèle est complétement définie par une droite donnée en grandeur et en direction, ce que Hamilton appelle un *vecteur*. La composition des translations jouissant des mêmes propriétés générales que l'addition arithmétique, on lui donne le nom d'*addition des vecteurs*. Quelques exemples sont indiqués de l'emploi de cette opération pour la solution des questions géométriques.

Le Chapitre IV traite des quantités élémentaires qui servent à déterminer les changements de direction, combinés ou non avec les changements de distance. Un vecteur tournant autour d'un point fixe peut, d'une part, varier de longueur et, d'autre part, tourner dans un certain plan, d'un angle de grandeur donnée. La quantité complexe formée avec les éléments numériques nécessaires pour fixer ce mouvement s'appelle une *biradiale*. Si un vecteur subit consécutivement les altérations correspondantes à deux biradiales données, la biradiale unique qui aurait produit le même déplacement final et qui peut remplacer l'action combinée des deux autres est dite le *produit de leur multiplication*. La multiplication ainsi définie jouit, en effet, de presque toutes les propriétés de la multiplication arithmétique, sauf une seule, la possibilité de changer à volonté l'ordre des facteurs, à moins que les deux mouvements successifs ne s'effectuent dans le même plan.

Dans ce dernier cas, c'est-à-dire lorsque tous les déplacements se font dans un plan fixe, la position d'un point peut être représentée au moyen des quantités imaginaires de l'Algèbre ordinaire, ce qui simplifie considérablement les calculs.

Après avoir indiqué quelques considérations générales sur la représentation des points dans l'espace, M. Hoüel consacre un Chapitre à un aperçu sommaire de la belle méthode des équipollences de M. Bellavitis, et de son usage dans l'étude des courbes planes. C'est M. Hoüel, nos lecteurs le savent, qui a fait connaître le premier, en France, les beaux travaux de M. Bellavitis, que tout le monde peut maintenant étudier dans la publication nouvelle et plus complète que nous devons à M. Laisant (1).

Dans le Chapitre VI sont établies les règles de la multiplication des biradiales situées dans des plans différents. Une *biradiale* peut s'exprimer par la somme géométrique de quatre termes, dont l'un est un nombre pur, les trois autres pouvant être regardés comme les projections sur trois axes rectangulaires fixes d'une droite perpendiculaire au plan de la biradiale. Ce mode de représentation constitue ce que Hamilton a nommé un *Quaternion*. Ce Chapitre contient les règles fondamentales du calcul des Quaternions, et se termine par la démonstration de quelques formules essentielles concernant les transformations des produits de vecteurs.

Le Chapitre VII traite de la résolution des équations entre Quaternions. Ce problème peut se résoudre dans quelques cas simples par des méthodes directes; mais, pris dans toute sa généralité, il présente des difficultés qui dépassent actuellement les forces de l'Analyse. Le seul cas pour lequel on possède une solution directe et générale est celui des équations du premier degré, pour lequel Hamilton a découvert une remarquable méthode dont l'auteur expose les principes, d'après l'excellent Ouvrage de Tait. Cette méthode est fondée sur l'emploi d'un symbole représentatif d'une fonction linéaire, symbole qui joue un rôle extrêmement important dans les applications géométriques et mécaniques.

La même cause qui complique le calcul des quantités finies apporte également des difficultés dans le problème de la différentiation des fonctions de Quaternions, principalement en ce qui concerne les fonctions implicites. Cette question est traitée dans le Chapitre VIII.

---

(1) *Exposition de la méthode des Équipollences*, par G. Bellavitis, traduite de l'italien par C.-A. Laisant. (Extrait des *Nouvelles Annales de Mathématiques*. Voir *Bulletin*, t. VI, p. 185.) 1 vol. in-8°, 183 p. — Paris, Gauthier-Villars, 1874; prix : 4 fr. 50 c.

Après avoir ainsi établi les principales règles élémentaires de l'algèbre des Quaternions, l'auteur indique dans les Chapitres suivants divers exemples de l'application de ce calcul à la Géométrie et à la Mécanique. Les Chapitres IX et X contiennent la démonstration des formules fondamentales de la Trigonométrie sphérique et de la composition des rotations. Les Chapitres suivants traitent de la Géométrie de la ligne droite et du plan, des propriétés de la sphère et des surfaces du second degré en général, de la courbure des lignes et des surfaces, de quelques questions relatives à la Cinématique du point.

Nous signalerons surtout le Chapitre XIII, qui contient une théorie fort élégamment exposée des lignes et des surfaces courbes.

Ces applications occupent une étendue bien restreinte comparativement au contenu du Livre de M. Tait, et surtout à celui des deux volumes de Hamilton. Mais le but de M. Hoüel n'a pas été de rédiger un Traité complet, même élémentaire ; il a voulu seulement aplanir la voie de ceux qui désireront aborder cette féconde étude dans les Ouvrages de l'illustre inventeur et de son digne continuateur.

La publication de M. Hoüel est un nouveau service que doivent à l'auteur les géomètres français. G. D.

LEVY (Maurice). — La Statique graphique et ses applications aux constructions. Texte grand in-8°, XXIII-323 p. Atlas grand in-8° de 24 planches. — Paris, Gauthier-Villars; 1874. Prix : 16 fr. 50 c.

Nous avons déjà dit quelques mots de cette nouvelle science qui, sous le nom de *Statique graphique,* a reçu un accueil très-favorable à l'étranger, et fait partie du programme des Écoles d'Application en Angleterre, en Allemagne et en Italie. Il nous manquait, en France, un Traité sur cette branche nouvelle des applications de la Mécanique : la publication de l'Ouvrage de M. Maurice Levy constitue donc un service réel rendu aux ingénieurs et aux géomètres, qui pourront se rendre compte ainsi de la portée des nouvelles méthodes.

Pour bien juger la Statique graphique, il faut, croyons-nous, examiner seulement la nature des services qu'elle peut rendre dans la pratique. Elle repose tout entière, comme la Géométrie descriptive, sur des principes d'une extrême simplicité, et dont la valeur théorique est très-minime. C'est là, du reste, l'opinion de M. Maurice Levy.

« Ce qui a valu, dit-il, à cette science d'être érigée en corps de doctrine, ce sont ses applications : aussi, tout en faisant ressortir l'intérêt très-réel qu'elle présente au point de vue géométrique, avons-nous cherché à lui laisser son caractère de science d'application, ne prétendant nullement empiéter sur le domaine de la Statique dont elle emprunte les principes. »

Bien que la Statique graphique ait certaines de ses méthodes applicables aux figures dans l'espace, on peut dire que jusqu'ici ses applications utiles se limitent à l'étude des questions où toutes les forces agissent dans un même plan. Voilà donc une première et considérable limitation du champ d'études qu'un théoricien serait tenté de se proposer. Mais des faits analogues se rencontrent dans toutes les sciences d'application.

Si l'on mettait un géomètre étranger à la Mécanique en possession des principes de cette science, c'est-à-dire des relations qui existent entre les forces et les déplacements, il ne songerait pas même à considérer le cas si particulier où les forces ne dépendent pas du temps et où il y a une fonction des forces. C'est cependant l'étude de ce cas dont les notions, empruntées à l'expérience, font le Chapitre le plus important de la Mécanique rationnelle.

De même, dans l'art des constructions, l'étude des forces agissant dans un même plan a un intérêt capital, et l'on conçoit très-bien que la Statique graphique puisse acquérir une grande importance pratique, bien qu'elle ne s'occupe guère que d'une question qui, théoriquement, pourrait paraître si particulière.

Dans une Introduction de 23 pages, M. Maurice Levy nous indique quels ont été les fondateurs de cette branche de la Statique : Taylor, un simple mécanicien, Rankine (1857), Clerk Maxwell (1864), qui ont établi la Théorie des figures réciproques; enfin et surtout Culmann, qui a le plus contribué au développement de cette étude par son enseignement de l'École Polytechnique de Zurich, et par un Ouvrage très-étendu : *Die graphische Statik*;

publié en 1866. Culmann a surtout employé le polygone des forces et le polygone des pressions ou polygone funiculaire relatif à un plan donné (1). Après ces travaux nous avons encore à citer un Mémoire de M. Fleeming Jenkin, publié en 1869, dans les *Transactions* de la Société Royale d'Édimbourg (2), et un Opuscule très-intéressant de M. Cremona : *Le Figure reciproche nella Statica grafica,* dont il a été aussi rendu compte (t. IV, p. 65).

L'Ouvrage de M. Maurice Levy se distingue des précédents par l'emploi exclusif des notions les plus élémentaires, emploi qui ne peut qu'être favorable à la diffusion de la nouvelle Statique.

En outre, il expose, à un point de vue exclusivement géométrique, tout ce qui tient à la composition des forces, et sans s'appuyer en aucune manière sur les notions de Statique qui peuvent rendre évidents certains théorèmes de Géométrie. Le Chapitre Ier, qui contient cette partie de l'exposition, est intitulé : « Théorie géométrique du polygone des lignes, et notions de calcul graphique. » Les Chapitres II et III sont encore consacrés à des développements de pure Géométrie, à l'étude du polygone funiculaire et des figures dites *réciproques.*

La deuxième Section traite des principes de la Statique graphique, de toutes les questions relatives aux systèmes plans, puis des forces parallèles dans l'espace et des centres de gravité : dans ces deux dernières questions, nous l'avons dit, la Statique graphique n'apporte aucun principe nouveau.

La troisième Section est consacrée aux applications de l'Analyse graphique à l'art des constructions. Voici les titres des différents Chapitres :

Application à un framework en général.

Application aux diverses espèces de ponts fixes.

Application aux ponts tournants et aux grues tournantes.

Application aux diverses espèces de charpentes pour toiture.

Application aux cintres des voûtes et des charpentes diverses.

Application à la détermination graphique des efforts tranchants et des moments fléchissants.

Application à la détermination graphique des moments d'ordre

(1) Voir *Bulletin*, t. III, p. 361.
(2) Voir *Bulletin*, t. I, p. 161.

superieur des forces parallèles dont les points d'application sont situés dans un plan, et particulièrement à l'étude des moments d'inertie.

Étude des forces parallèles dont les points d'application sont situés dans un plan et dont les intensités sont proportionnelles aux distances de leurs points d'application à une droite de ce plan; noyau central des aires planes.

La quatrième Section traite des forces dans l'espace et des figures réciproques qui en découlent.

Le Chapitre XIX, qui commence cette Section, contient l'indication d'un essai de l'auteur pour trouver dans l'espace un élément analogue au polygone funiculaire; mais il n'est fait aucun usage de cette ingénieuse construction, si ce n'est pour établir la réduction à deux des forces appliquées à un corps solide. Le théorème du § 169 est inexact sous la forme absolue qui lui est donnée.

La théorie de la réduction des forces appliquées à un corps solide a conduit Möbius à un nouveau genre de figures réciproques, dont l'étude a servi de base à l'Opuscule déjà cité de M. Cremona. Cette théorie est exposée dans le Chapitre XX.

Dans la Note I, la théorie des figures réciproques est présentée comme une application de la transformation dite *parabolique* de M. Chasles. La Note II est surtout intéressante; elle constitue un Mémoire original sur la recherche des tensions dans les systèmes de barres élastiques et sur les systèmes qui, à volume égal de matière, offrent la plus grande résistance possible. Les résultats de cette recherche nous paraissent très-élégants. Ils peuvent être résumés dans les trois propositions suivantes :

Pour qu'un système de m barres en équilibre sous l'action de forces données puisse être constitué en solide d'égale résistance, il faut en général et il suffit toujours que la figure géométrique, formée par les axes des barres, ne contienne pas de lignes surabondantes.

Toutes les fois qu'une figure formée de m lignes et contenant k lignes surabondantes peut être constituée en solide d'égale résistance, elle le peut d'une k^{uple} infinité de manières.

Lorsqu'un système de barres contenant des lignes surabondantes satisfait aux conditions nécessaires pour qu'on puisse, d'une manière, et, par suite, d'une infinité de manières, le constituer en solide d'égale résistance, il existe nécessairement un système formé par une partie seulement des barres données ne contenant pas de lignes surabondantes et tel que, disposé en système d'égale résistance, il dépense exactement le même volume de matière que le système complet.

L'auteur termine en appliquant ces résultats aux différents systèmes de poutres : les conclusions qui résultent de ces calculs sont extrêmement nettes et donnent des indications très-précises sur la valeur des différents systèmes. G. D.