BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

G. DARBOUX

Mémoire sur le théorème de Sturm

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 8 (1875), p. 56-63

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1875__8__56_0>

MÉMOIRE SUR LE THÉORÈME DE STURM;

PAR M. G. DARBOUX.

PREMIÈRE PARTIE.

Le beau théorème que l'Algèbre doit à Sturm n'est pas très-ancien, et déjà son étude a donné lieu à un grand nombre d'intéressantes recherches, dont l'ensemble constitue un des chapitres les plus importants de la théorie des équations. On connaît les beaux Mémoires que plusieurs géomètres : MM. Sylvester, Hermite, Cayley, Brioschi, Kronecker, etc., ont consacrés à l'étude approfondie de cette grande découverte. Ces travaux ont été résumés dans un Ouvrage de M. Hattendorff dont la deuxième édition a paru dans ces derniers temps. M'étant proposé, il y a deux ans, d'enseigner les éléments de cette théorie aux élèves de l'École Normale, j'ai cru reconnaître qu'au lieu d'exposer à part les deux démonstrations que l'on connaît du théorème de Sturm, celle de l'inventeur et celle de M. Hermite, et d'établir ensuite le lien de ces deux démonstrations au moyen de l'expression des fonctions de Sturm, due à M. Sylvester, il y avait le plus grand avantage à développer la théorie tout entière, en employant uniquement la méthode de M. Hermite. J'ai été ainsi conduit à tous les résultats connus et à plusieurs formules nouvelles dont le développement constitue la première Partie de ce travail. La seconde Partie, communiquée en même temps que la première à la Société Philomathique au mois de mars 1874, contiendra la définition de plusieurs suites très-générales, renfermant un grand nombre de constantes arbitraires et d'une loi de formation facile, qu'on peut substituer aux fonctions de Sturm, ainsi qu'un moyen relativement simple de *former des fonctions* analogues dans le cas des équations à plusieurs inconnues.

I.

Soient $f(x)$, $\varphi(x)$ deux fonctions entières de x,

$$(1)\qquad \begin{cases} f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n, \\ \varphi(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n, \end{cases}$$

et désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les n racines de la première. La seconde de ces fonctions sera supposée du degré n ou $n-1$; il suffira d'annuler b_0 dans les formules qui vont suivre pour obtenir les résultats relatifs au cas où elle est de degré $n-1$. On a, comme on sait,

$$(2)\qquad \frac{f(x)}{x-\alpha_i} = a_0 x^{n-1} + \begin{array}{l|l|l} a_0\alpha_i & a_0\alpha_i^2 & \\ +a_1 & +a_1\alpha_i & \\ & +a_2 & \end{array} \!\!\begin{array}{l} \\ \end{array} x^{n-2} + \ldots \quad \text{i.e.}\quad \begin{array}{l|l|l} a_0 x^{n-1} + a_0\alpha_i & x^{n-2} + a_0\alpha_i^2 & x^{n-3} + \ldots + a_0\alpha_i^{n-1} \\ \phantom{a_0 x^{n-1}} + a_1 & \phantom{x^{n-2}} + a_1\alpha_i & \phantom{x^{n-3} + \ldots} + a_1\alpha_i^{n-2} \\ & \phantom{x^{n-2}} + a_2 & \phantom{x^{n-3} + \ldots} \;\cdots \\ & & \phantom{x^{n-3} + \ldots} + a_{n-1} \end{array}$$

et aussi

$$(3)\qquad \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{b_0}{a_0} + \sum \frac{\varphi(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)(x-\alpha_i)},$$

la somme qui figure dans le second membre étant étendue à toutes les racines α_i.

Cela posé, considérons la fraction

$$F = \frac{f(z)\varphi(z_1) - f(z_1)\varphi(z)}{z - z_1},$$

qu'on peut immédiatement ramener à la forme entière en divisant le numérateur par $z - z_1$. On obtient ainsi, comme on sait, le résultat suivant :

Posons

$$(4)\qquad d_{ik} = a_{n-i}\, b_{n-k} - a_{n-k}\, b_{n-i},$$

$$(5)\qquad c_{ik} = d_{0,\,i+k+1} + d_{1,\,i+k} + \ldots + d_{i,\,k+1},$$

on a

$$c_{ik} = c_{ki},$$

et la fraction F développée prend la forme

$$(6)\qquad F = -\sum c_{ik}\, z^i z_1^k.$$

Si, au lieu d'exprimer F en fonction des coefficients des deux équations (1), on veut mettre en évidence les racines de $f(x)$, on déduira $\varphi(z)$, $\varphi(z_1)$ de la formule (3), et l'on obtiendra ainsi

$$(7)\qquad F = \sum \frac{\varphi(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)} \frac{f(z)}{z-\alpha_i} \frac{f(z_1)}{z_1-\alpha_i}.$$

Enfin nous allons donner un troisième développement de F qui nous sera indispensable dans la suite.

Introduisons la fonction $\psi(z)$ de degré $n-1$, définie par l'équation

$$\varphi(z)-\frac{b_0}{a_0}f(z)=\psi(z), \tag{8}$$

et effectuons sur $f(z)$ et $\psi(z)$ la recherche du plus grand commun diviseur d'après la méthode de Sturm; nous serons conduits aux équations suivantes :

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} f(z)&=(mz+q)\,\psi(z)-\psi_1(z),\\ \psi(z)&=(m_1z+q_1)\,\psi_1(z)-\psi_2(z),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ \psi_{n-3}(z)&=(m_{n-2}z+q_{n-2})\,\psi_{n-2}(z)-\psi_{n-1}(z),\\ \psi_{n-2}(z)&=(m_{n-1}z+q_{n-1})\,\psi_{n-1}(z),\\ \psi_{n-1}(z)&=\text{const.};\end{aligned}\right.$$

alors $\psi_i(z)$ sera du degré $n-i-1$, et les fonctions

$$f(z),\ \psi(z),\ \psi_1(z),\ldots,\ \psi_{n-1}(z)$$

formeront une suite de Sturm. On peut faire la remarque que, si au lieu de commencer par opérer sur $f(z)$ on eût opéré sur $\varphi(z)$ et $\psi(z)$, on eût obtenu les mêmes fonctions ψ à un facteur constant près. En effet, si l'on ajoute à la première des équations (9) l'équation (8) multipliée par $\frac{a_0}{b_0}$, on aura

$$\varphi(z)=\left[(mz+q)\frac{b_0}{a_0}+1\right]\psi(z)-\frac{b_0}{a_0}\psi_1(z).$$

On voit donc que $-\frac{b_0}{a_0}\psi_1(z)$ est le reste de la division de $\varphi(z)$ par $\psi(z)$; la fonction $\psi_1(z)$ sera donc multipliée par un facteur $\frac{b_0}{a_0}$, et les fonctions suivantes $\psi_2(z),\ldots$ demeureront les mêmes dans les deux suites.

Chacune des fonctions ψ s'exprimera en fonction linéaire de $f(x)$ et $\varphi(x)$ par une équation de la forme

$$\psi_i(x)=\mathrm{D}_i\,\varphi(x)-\mathrm{N}_i f(x),$$

où N_i et D_i sont des polynômes de degré i. Ces polynômes et la fonction $\psi_i(x)$ sont ainsi déterminés, à un facteur constant près, par la condition que le second membre de l'équation précédente se réduise au degré $n-i-1$.

Cela posé, au moyen de l'équation (8), éliminons $\varphi(z)$ et $\varphi(z_1)$ de la fonction F, nous aurons

$$(10)\qquad F=\frac{f(z)\psi(z_1)-\psi(z)f(z_1)}{z-z_1}.$$

De la première des équations (9) tirons $f(z), f(z_1)$ en fonction de $\psi(z)$, $\psi(z_1)$, $\psi_1(z)$, $\psi_1(z_1)$, et portons ces valeurs dans l'équation précédente, nous aurons

$$(11)\qquad F=m\psi(z)\psi(z_1)+\frac{\psi(z)\psi_1(z_1)-\psi_1(z)\psi(z_1)}{z-z_1}.$$

En continuant de cette manière jusqu'à la fin de la suite, nous obtiendrons ainsi le nouveau développement de F

$$(11')\quad F=m\psi(z)\psi(z_1)+m_1\psi_1(z)\psi_1(z_1)+\ldots+m_{n-1}\psi_{n-1}(z)\psi_{n-1}(z_1).$$

On a d'ailleurs

$$(12)\qquad \begin{cases}\psi(x)=Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots,\\ \psi_i(x)=A_i x^{n-i-1}+B_i x^{n-i-2}+\ldots,\end{cases}$$

$$(13)\qquad A=b_1-\frac{b_0 a_1}{a_0}=\frac{d_{n,n-1}}{a_0},$$

et les formules (9) nous donnent, en égalant les coefficients des deux plus hautes puissances de z dans les deux membres,

$$(14)\qquad a_0=mA,\quad A_{i-1}=m_i A_i,\quad B_{i-1}=q_i A_i+B_i m_i,$$

en sorte que les expressions des quantités m_i et q_i se déduiront de celles des fonctions $\psi_i(x)$.

II.

On déduit des calculs précédents d'importantes conséquences. La fonction F, définie par les équations (6), (7), (11), a été transformée par M. Hermite de la manière suivante :

Cette fonction contient les $n-1$ puissances de z

$$z,\ z^2,\dots,\ z^{n-1},$$

et si, dans les termes qui ne contiennent aucune de ces puissances, on introduit z^0, elle devient un polynôme homogène et linéaire par rapport aux indéterminées

$$z^0,\ z^1,\dots,\ z^{n-1}.$$

De la même manière elle peut être considérée comme une fonction linéaire et homogène des n puissances de z_1

$$z_1^0,\ z_1^1,\ z_1^2,\dots,\ z_1^{n-1}.$$

D'après cela, si, au lieu de considérer ces $2n$ variables respectivement comme des puissances de deux d'entre elles z, z_1, on suppose que les exposants soient transformés en indices supérieurs propres à distinguer des variables indépendantes, la forme F deviendra une fonction de deux séries de variables indépendantes

$$z^0,\ z^1,\ \dots,\ z^{n-1},\quad z_1^0,\ z_1^1,\dots,\ z_1^{n-1},$$

linéaire et homogène par rapport aux variables de chacune des deux séries.

Mais si l'on pose, quel que soit k,

$$z^k = z_1^k,$$

la fonction F se transformera en une fonction quadratique des n variables

$$z^0,\ z^1,\dots,\ z^{n-1}.$$

Cette forme quadratique, que nous appellerons Φ, sera d'abord définie par la formule

$$(15)\qquad \Phi = -\Sigma c_{ik}\, z^i z^k,$$

déduite de la formule (6). Les autres expressions de F vont nous donner aussi de nouvelles expressions de Φ.

Si, dans l'équation (7), on fait $z_1 = z$, on aura

$$(16)\qquad \Phi = \sum \frac{\varphi(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)}\left[\frac{f(z)}{z-\alpha_i}\right]^2,$$

pourvu que, après la division de $f(z)$ par $z-\alpha_i$, on considère les diverses puissances de z comme des variables indépendantes. Enfin on déduit de l'équation (11)

$$(17)\qquad \Phi = m\psi^2(z) + m_1\psi_1^2(z) + \ldots + m_{n-1}\psi_{n-1}^2(z).$$

Nous avons donc trois formes distinctes de Φ. Les deux dernières constituent deux décompositions de cette forme en carrés.

III.

On sait que, étant donnée une forme quadratique à coefficients réels, dans toute décomposition en carrés de cette forme, le nombre des carrés positifs demeurera invariable. Les formules (16) et (17) donnant deux décompositions de la forme Φ, nous pouvons appliquer la proposition que nous venons de rappeler.

Il est vrai que, dans la formule (16), certains carrés seront à coefficients imaginaires quand toutes les racines α_i ne seront pas réelles; mais M. Hermite a montré que l'on peut remplacer les deux carrés correspondant à deux racines imaginaires conjuguées par deux carrés réels affectés, l'un d'un coefficient positif, l'autre d'un coefficient négatif. Donc *la différence entre le nombre π des carrés positifs de la forme Φ et le nombre ν des carrés négatifs est égale à l'excès du nombre des racines réelles de l'équation $f(x)=0$ pour lesquelles $\frac{\varphi(x)}{f'(x)}$ est positif sur celui des racines réelles de la même équation pour lesquelles $\frac{\varphi(x)}{f'(x)}$ est négatif.* En d'autres termes, la différence $\pi-\nu$ est l'indice intégral de la fraction $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ou de son inverse. On a

$$(18)\qquad \mathcal{J}_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \pi - \nu.$$

Considérons la suite

$$(19)\qquad a_0,\ \mathrm{A},\ \mathrm{A}_1,\ \ldots,\ \mathrm{A}_{n-1}$$

des premiers termes de $f(x)$ et des fonctions ψ. On a, d'après les équations (14),

$$a_0 = m\mathrm{A},\quad \mathrm{A}_{p-1} = m_p\mathrm{A}_p;$$

donc le nombre des coefficients m, m_1, m_2,... qui sont négatifs est égal à celui des variations de la suite (19). Il y a, au contraire, autant de coefficients m_i positifs qu'il y a de permanences dans la suite (19). Si l'on se reporte à l'expression (17) de la forme Φ, on peut donc énoncer le théorème suivant :

L'indice intégral de la fraction $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *est égal à la différence entre le nombre des permanences et le nombre des variations que présente la suite des premiers termes des fonctions de Sturm, ou, ce qui est identique, au degré de* $\varphi(x)$, *diminué du double du nombre des variations de cette suite.*

Si $\varphi(x)$ est la dérivée de $f(x)$, $\frac{\varphi(x)}{f'(x)}$ sera égal à l'unité et, par conséquent, positif pour toutes les racines réelles. Donc le nombre des couples de racines imaginaires est égal au nombre des variations de signes que présente la suite des premiers termes des fonctions de Sturm : c'est la proposition connue, démontrée, on le voit, sans aucune considération de continuité.

IV.

On déduit aussi des résultats qui précèdent un moyen simple et nouveau de former les fonctions de Sturm. Soit, en effet, la fonction quadratique Φ écrite sous la forme

$$-\Sigma c_{ik} z^i z^k,$$

et décomposons-la en carrés par la méthode la plus simple; nous obtiendrons

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned}\Phi = {} & h(fz^{n-1} + gz^{n-2} + \ldots + lz^0)^2 \\ & + h_1(f_1 z^{n-2} + \ldots + lz^0)^2 \\ & + h_2(f_2 z^{n-3} + \ldots + lz^0)^2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + h_{n-1}(f_{n-1} z^0)^2.\end{aligned}\right.$$

Il n'y a qu'à comparer ce développement à la formule (17) pour reconnaître que les différentes fonctions

$$fz^{n-1} + gz^{n-2} + \ldots,\quad f_1 z^{n-2} + \ldots;\quad \ldots,\quad f_{n-1} z^0$$

sont identiques, à un facteur constant près, aux fonctions de Sturm. $\psi(z), \psi_1(z), \ldots; h, h_1, \ldots$ sont en outre de même signe que $m, m_1, \ldots$. Comme les signes des fonctions de Sturm ont seuls de l'importance, on pourra substituer aux fonctions $\psi(z)$ les suivantes :

$$\pm(fz^{n-1}+\ldots),\quad \pm(f_1 z^{n-2}+\ldots),\quad \ldots,\quad \pm f_{n-1} z_0,$$

et l'on déterminera les signes de la manière suivante : le premier coefficient de la première fonction doit avoir le signe de A, et les autres signes seront choisis par la condition que $\dfrac{\pm f_i}{\pm f_{i-1}}$ ait même signe que h_i.

Mais on peut aussi trouver les expressions exactes des fonctions ψ de la manière suivante. Posons

$$(21)\qquad f_i z^{n-i-1}+\ldots=\lambda_i \psi_i(z);$$

on devra avoir

$$(22)\qquad h_i \lambda_i^2 = m_i,$$

et aussi, en égalant les coefficients des plus hautes puissances de z,

$$(23)\qquad f_i = \lambda_i \mathrm{A}_i,$$

d'où l'on déduit, d'après les formules (14) et (22),

$$(24)\qquad \mathrm{A}_{i-1}\mathrm{A}_i = h_i f_i^2.$$

Ces équations feront connaître les inconnues A_i, λ_i. On trouvera, par exemple,

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\mathrm{A}_{2i}}{\mathrm{A}} &= \frac{h_2 h_4 \ldots h_{2i}}{h_1 h_3 \ldots h_{2i-1}}\left(\frac{f_2 f_4 \ldots f_{2i}}{f_1 f_3 \ldots f_{2i-1}}\right)^2,\\ \mathrm{A}\mathrm{A}_{2i+1} &= \frac{h_1 h_3 \ldots h_{2i+1}}{h_2 h_4 \ldots h_{2i}}\left(\frac{f_1 f_3 \ldots f_{2i+1}}{f_2 f_4 \ldots f_{2i}}\right)^2. \end{aligned}\right.$$

(*A suivre.*)