BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

A.-L. CAUCHY

Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 8 (1875), p. 43-55

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1875__8__43_0>

MÉLANGES.

MÉMOIRE SUR LES INTÉGRALES DÉFINIES, PRISES ENTRE DES LIMITES IMAGINAIRES (1).

PAR M. A.-L. CAUCHY.

(Suite.)

13. Lorsque la fonction $f(x+y\sqrt{-1})$ s'évanouit pour $x=\pm\infty$, quel que soit y, et pour $y=\pm\infty$, quel que soit x, alors, en posant

$$x_0=-\infty,\quad X=\infty,\quad y_0=-\infty,\quad Y=\infty,$$

on tire généralement de la formule (88)

$$\Delta=0. \tag{135}$$

Lorsque la fonction $f(x)$ devient rationnelle, la formule (135) reproduit un théorème que j'ai démontré dans le XVIIe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique,* et à l'aide duquel on peut établir immédiatement la formule d'interpolation de Lagrange.

Lorsque l'équation (19) a une infinité de racines, la formule (135) renferme un nombre infini de termes, et peut être appliquée à la sommation des séries. Ainsi, par exemple, si l'on prend successivement

$$f(x)=\varphi(x)\frac{\cos rx}{\sin\pi x},\quad f(x)=\varphi(x)\frac{\sin rx}{\sin\pi x}, \tag{136}$$

r désignant un nombre entier inférieur à π, et $\varphi(x)$ une fonction rationnelle dans laquelle le numérateur soit d'un degré plus petit que le dénominateur, on déterminera immédiatement, à l'aide de la formule (135), les sommes des séries

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\varphi(0)-\frac{\varphi(1)+\varphi(-1)}{2}\cos r+\frac{\varphi(2)+\varphi(-2)}{2}\cos 2r-\ldots, \\ \qquad -\frac{\varphi(1)-\varphi(-1)}{2}\sin r+\frac{\varphi(2)-\varphi(-2)}{2}\sin 2r-\ldots. \end{array}\right. \tag{137}$$

(1) Voir *Bulletin,* t. VII, p. 265.

Si l'on fait d'ailleurs

$$(138) \qquad s = \pm(2m+1)\pi \pm r,$$

m étant un nombre entier quelconque, l'arc s restera entièrement arbitraire, et les séries (137) deviendront

$$(139) \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2}\varphi(0) + \frac{\varphi(1)+\varphi(-1)}{2}\cos s + \frac{\varphi(2)+\varphi(-2)}{2}\cos 2s + \ldots, \\ &\frac{\varphi(1)-\varphi(-1)}{2}\sin s + \frac{\varphi(2)-\varphi(-2)}{2}\sin 2s + \ldots. \end{aligned} \right.$$

Enfin, si l'on pose $s = 0$, la première des séries (139) sera réduite à

$$(140) \qquad \frac{1}{2}\varphi(0) + \frac{\varphi(1)+\varphi(-1)}{2} + \frac{\varphi(2)+\varphi(-2)}{2} + \ldots.$$

En attribuant à $\varphi(x)$ les valeurs particulières

$$\frac{1}{u^2 \pm x^2}, \quad \frac{x}{u^2 \pm x^2}, \ldots,$$

on obtiendra les formules connues

$$(141) \quad \frac{1}{2}\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^2-1} + \frac{1}{u^2-4} + \frac{1}{u^2-9} + \ldots = \frac{\pi}{2u}\cot\pi u,$$

$$(142) \quad \frac{1}{2}\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^2+1} + \frac{1}{u^2+4} + \frac{1}{u^2+9} + \ldots = \frac{\pi}{2u}\frac{e^{\pi u}+e^{-\pi u}}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}},$$

$$(143) \quad \frac{1}{2}\frac{1}{u^2} + \frac{\cos s}{u^2-1} + \frac{\cos 2s}{u^2-4} + \frac{\cos 3s}{u^2-9} + \ldots = \frac{\pi}{2u}\frac{\cos ru}{\sin\pi u},$$

$$(144) \quad \frac{1}{2}\frac{1}{u^2} + \frac{\cos s}{u^2+1} + \frac{\cos 2s}{u^2+4} + \frac{\cos 3s}{u^2+9} + \ldots = \frac{\pi}{2u}\frac{e^{ru}+e^{-ru}}{e^{\pi u}+e^{-\pi u}},$$

$$(145) \quad \frac{\sin s}{u^2-1} + \frac{2\sin 2s}{u^2-4} + \frac{3\sin 3s}{u^2-9} + \ldots = \pm\frac{\pi}{2}\frac{\sin ru}{\sin\pi u},$$

$$(146) \quad \frac{\sin s}{u^2+1} + \frac{2\sin 2s}{u^2+4} + \frac{3\sin 3s}{u^2+9} + \ldots = \mp\frac{e^{ru}-e^{-ru}}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}}.$$

Il est important d'observer que, dans les seconds membres des équations (145) et (146), le signe supérieur se rapporte au cas où l'on a $s = \pm (2m+1)\pi + r$, et le signe inférieur au cas où l'on a $s = \pm (2m+1)\pi - r$.

Si, après avoir multiplié par $2u\,du$ les deux membres de la formule (141), on les intègre par rapport à u et à partir de $u = 0$, on trouvera

$$l\frac{\sin\pi u}{\pi u} = l(1-u^2) + l\left(1-\frac{u^2}{4}\right) + l\left(1-\frac{u^2}{9}\right) + \ldots,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(147)\quad l\sin\pi u = l(\pi) + l(u) + l(1-u^2) + l\left(1-\frac{u^2}{4}\right) + l\left(1-\frac{u^2}{9}\right) + \ldots,$$

et, par suite,

$$(148)\qquad \sin\pi u = \pi u(1-u^2)\left(1-\frac{u^2}{4}\right)\left(1-\frac{u^2}{9}\right)\ldots$$

Si l'on pose maintenant $u = \frac{1}{2}$, on obtiendra la formule de Wallis, savoir :

$$(149)\qquad \frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\ldots$$

Enfin, comme on aura évidemment

$$\int_0^1 l\sin\pi u\,du = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} l\sin p\,dp$$

et qu'on tirera de l'équation (119), en réduisant la constante r à zéro,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l\sin p\,dp = \frac{\pi}{2}\,l\left(\frac{1}{2}\right),$$

il suffira d'intégrer de nouveau la formule (147) par rapport à la variable u, et entre les limites $u = 0$, $u = 1$, pour établir l'équation

$$(150)\left\{\begin{aligned} l\left(\frac{1}{2}\right) &= l(\pi) - 1 + l\left(\frac{2^2}{e^2}\right) + l\left(\frac{3^3}{1.2^2e^2}\right) + l\left(\frac{4^4}{2^2.3^3e^2}\right)\\ &\quad + l\left(\frac{5^5}{3^3.4^4e^2}\right) + \ldots + l\left[\frac{(n+1)^{n+1}}{(n-1)^{n-1}n^2e^2}\right] + \ldots.\end{aligned}\right.$$

En conséquence, on aura, sans erreur sensible, pour de grandes valeurs de n,

$$(151)\qquad l\left(\frac{1}{2}\right)=l\left(\frac{\pi}{e}\right)+l\left[\frac{n^n(n+1)^{n+1}}{(1.2.3\ldots n)^2e^{2n}}\right].$$

Si l'on observe d'ailleurs que l'expression

$$(n+1)^{n+1}=n^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

diffère très-peu du produit $n^{n+1}e$, et si, après avoir réduit à moitié les deux membres de la formule (150), on passe des logarithmes aux nombres, on trouvera

$$(152)\qquad 1=(2\pi)^{\frac{1}{2}}\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{1.2.3\ldots n.e^n}=\frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n\Gamma(n)}.$$

La formule (152), qui est d'autant plus exacte que l'on attribue à n des valeurs plus considérables, est très-utile dans le calcul des produits composés d'un grand nombre de facteurs. Elle a été donnée, pour la première fois, par M. Laplace.

Si l'on posait successivement

$$f(x)=\varphi(x)\frac{1-e^x}{x-e^x},\quad f(x)=\varphi(x)\frac{1-\cos x}{x-\sin x},$$
$$f(x)=\varphi(x)\frac{x\sin x}{\sin x-x\cos x},\ldots,$$

on déduirait de l'équation (135) les sommes des séries de la forme

$$(153)\qquad \varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\varphi(x_3)+\ldots,$$

x_1, x_2, x_3,... représentant les diverses racines réelles ou imaginaires de l'une des équations

$$(154)\qquad x=e^x,\quad x=\sin x,\quad x=\operatorname{tang} x,\ldots.$$

Ainsi, par exemple, en prenant pour x_1, x_2,... les racines de la première des équations (154), on trouverait

$$(155)\qquad \frac{1}{r^2+x_1^2}+\frac{1}{r^2+x_2^2}+\frac{1}{r^2+x_3^2}+\ldots=\frac{1}{r}\,\frac{r-\sin r-r\cos r}{r^2-2r\sin r+1}.$$

14. Dans les applications que nous avons faites de la formule (88), nous avons supposé que les intégrales comprises dans cette formule s'évanouissaient avec les fonctions qu'elles renferment. C'est ce qui a lieu en général. Néanmoins le contraire arrive dans un petit nombre de cas particuliers, et alors les équations que nous avons établies doivent être modifiées. Ainsi, par exemple, si l'on prend pour $f(x)$ une fraction rationnelle dans laquelle le degré du numérateur soit inférieur au degré du dénominateur, la valeur de la somme Δ, relative à cette fraction rationnelle, sera généralement nulle, et vérifiera l'équation (135). Néanmoins cette valeur de Δ cessera d'être nulle, comme on l'a prouvé dans le XIX[e] Cahier du *Journal de l'École Polytechnique,* si la différence entre le degré du dénominateur et le degré du numérateur est précisément égale à l'unité. Pour retrouver dans cette hypothèse la véritable valeur de Δ, il suffira ou de suivre la méthode indiquée dans le Journal dont il s'agit, et de chercher ce que deviennent les intégrales comprises dans la formule (88) quand les fonctions sous le signe $\int$ s'évanouissent, ou d'appliquer la formule (135) à l'une des fractions rationnelles

$$\frac{f(x)}{1-\varepsilon x},\quad \frac{f(x)}{1-\varepsilon^2 x^2},\quad \frac{f(x)}{1+\varepsilon^2 x^2},\ldots,$$

et de poser ensuite

$$\varepsilon = 0.$$

De même les équations

$$(156)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\sin r}{u^2-1} - \frac{\sin 2r}{u^2-4} + \frac{\sin 3r}{u^2-9} - \ldots = -\frac{\pi}{2}\,\frac{\sin ru}{\sin \pi u},\\ &\frac{\sin r}{u^2+1} - \frac{\sin 2r}{u^2+4} + \frac{\sin 3r}{u^2+9} - \ldots = \frac{\pi}{2}\,\frac{e^{ru}-e^{-ru}}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}},\end{aligned}\right.$$

auxquelles on parvient en supposant

$$f(x) = \frac{x}{u^2 \mp x^2}\,\frac{\sin rx}{\sin \pi x},$$

et qui subsistent pour toutes les valeurs de r comprises entre les limites 0 et π, deviendront inexactes si l'on a précisément $r = \pi$.

Alors, en effet, leurs premiers membres se réduiront à zéro, et leurs derniers membres à l'unité. Mais, pour retrouver les équations exactes qui doivent les remplacer, il suffira de substituer à $f(x)$ la fonction

$$\frac{f(x)}{1+\varepsilon^2 x^2} = \frac{1}{1+\varepsilon^2 x^2}\,\frac{x}{u^2 \mp x^2}\,\frac{\sin rx}{\sin \pi x}.$$

En appliquant à cette dernière fonction la formule (135), et posant ensuite $r=\pi$, puis $\varepsilon = 0$, on obtiendra les équations identiques

$$\frac{\sin\pi}{u^2-1} - \frac{\sin 2\pi}{u^2-4} + \frac{\sin 3\pi}{u^2-9} - \ldots = \frac{\pi}{2}(1-1),$$

$$\frac{\sin\pi}{u^2+1} - \frac{\sin 2\pi}{u^2+4} + \frac{\sin 3\pi}{u^2+9} - \ldots = \frac{\pi}{2}(1-1).$$

15. Concevons maintenant que, la valeur de Δ étant toujours déterminée par l'équation (87), on pose

$$(157) \qquad \frac{Y-y_0}{X-x_0} = \operatorname{tang}\theta,$$

en sorte que θ représente l'angle formé par la droite, menée du point (x_0, y_0) au point (X, Y) avec l'axe des x. Enfin partageons Δ en deux parties Δ', Δ'', dont l'une renferme celles des constantes f_1, $\mathrm{f}_2, \ldots$ qui correspondent à des points du triangle formé par la ligne dont il s'agit et les deux droites $x = x_0$, $y = Y$, tandis que l'autre sera relative aux points du triangle formé par la même ligne et les droites $y = y_0$, $x = X$. Si l'on compare successivement les deux valeurs extrêmes de l'intégrale (4) à la valeur moyenne présentée sous la forme

$$(158)\left\{\begin{aligned}&\int_{x_0}^{X}\left(1+\frac{Y-y_0}{X-x_0}\sqrt{-1}\right)f\left[\left(1+\frac{Y-y_0}{X-x_0}\sqrt{-1}\right)x+\frac{y_0X-Yx_0}{X-x_0}\sqrt{-1}\right]dx\\&\quad=\int_{x_0}^{X}(1+\operatorname{tang}\theta.\sqrt{-1})f[(1+\operatorname{tang}\theta.\sqrt{-1})x+(y_0-x_0\operatorname{tang}\theta)\sqrt{-1}]dx,\end{aligned}\right.$$

on trouvera

$$(159)\left\{\begin{aligned}&\int_{x_0}^{X}(1+\operatorname{tang}\theta.\sqrt{-1})f[x(1+\operatorname{tang}\theta.\sqrt{-1})+(y_0-x_0\operatorname{tang}\theta)\sqrt{-1}]\,dx\\&\quad=\int_{x_0}^{X}f(x+y_0\sqrt{-1})\,dx+\sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y}f(X+y\sqrt{-1})\,dy-\Delta'\end{aligned}\right.$$

et

$$(160)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{x_0}^{\mathrm{X}} (1+\operatorname{tang}\theta\sqrt{-1}) f[x(1+\operatorname{tang}\theta\sqrt{-1})+(y_0-x_0\operatorname{tang}\theta)\sqrt{-1}]\,dx \\ &\quad = \int_{x_0}^{\mathrm{X}} f(x+y\sqrt{-1})\,dx + \sqrt{-1}\int_{y_0}^{\mathrm{Y}} f(x_0+y\sqrt{-1})\,dy + \Delta''. \end{aligned}\right.$$

Si la fonction $f(x+y\sqrt{-1})$ s'évanouit pour $x=\infty$, quel que soit y, et si l'on pose $x_0=0$, $\mathrm{X}=\infty$, $y_0=0$, on tirera de l'équation (159), en écrivant dans le premier membre $x\cos\theta$ au lieu de x,

$$(161)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{\infty} f[(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)x]\,dx \\ &\quad = (\cos\theta-\sqrt{-1}\sin\theta)\left[\int_0^{\infty} f(x)\,dx - \Delta'\right]. \end{aligned}\right.$$

Cette dernière équation comprend, comme cas particuliers, des formules connues. Si l'on suppose, par exemple,

$$f(x)=x^{a-1}e^{-x},$$

a désignant une quantité positive, Δ' s'évanouira, et l'on tirera de la formule (161)

$$\int_0^{\infty} x^{a-1}e^{-x(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)}\,dx = (\cos a\theta-\sqrt{-1}\sin a\theta)\int_0^{\infty} x^{a-1}e^{-x}dx;$$

puis, en égalant : 1° les parties réelles; 2° les coefficients de $\sqrt{-1}$, on trouvera

$$(162)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{\infty} x^{a-1}e^{-x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)\,dx = \cos a\theta \int_0^{\infty} x^{a-1}e^{-x}dx, \\ &\int_0^{\infty} x^{a-1}e^{-x\cos\theta}\sin(x\sin\theta)\,dx = \sin a\theta \int_0^{\infty} x^{a-1}e^{-x}dx. \end{aligned}\right.$$

16. En suivant les principes établis dans le n° **11**, on peut évaluer non-seulement la différence qui existe entre les valeurs extrêmes et la valeur moyenne de l'intégrale (4), mais encore la différence entre deux intégrales ou deux sommes d'intégrales semblables à l'intégrale (14), et correspondant à deux systèmes de courbes tracées arbitrairement dans le plan des x, y, de manière à lier le point (x_0, y_0) au point (X, Y). Or, pour obtenir un pareil système, il suffit de prendre à volonté, dans le plan des x, y, une suite de points dont les coordonnées soient respectivement désignées par

$$x_0,\quad y_0;\quad x_1,\quad y_1;\quad x_2,\quad y_2,\ldots;\quad x_{n-1},\quad y_{n-1};\quad X,\quad Y;$$

puis de lier par une première courbe le point (x_0, y_0) au point (x_1, y_1); par une deuxième courbe le point (x_1, y_1) au point $(x_2, y_2),\ldots$; enfin par une dernière courbe le point (x_{n-1}, y_{n-1}) au point (X, Y). Cela posé, représentons par

$$\varphi(p, q, r,\ldots),\quad \chi(p, q, r,\ldots)$$

deux fonctions réelles de n variables p, q, $r,\ldots$, et par p_0, q_0, $r_0,\ldots$, P, Q, R,... des valeurs particulières de p, q, $r,\ldots$ propres à vérifier les équations

$$(163)\qquad \left\{\begin{array}{ll} x_0 = \varphi(p_0, q_0, r_0,\ldots), & y_0 = \chi(p_0, q_0, r_0,\ldots), \\ x_1 = \varphi(P, q_0, r_0,\ldots), & y_1 = \chi(P, q_0, r_0,\ldots), \\ x_2 = \varphi(P, Q, r_0,\ldots), & y_2 = \chi(P, Q, r_0,\ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X = \varphi(P, Q, R,\ldots); & Y = \chi(P, Q, R,\ldots). \end{array}\right.$$

Pour lier par une première courbe le point (x_0, y_0) au point (x_1, y_1), il suffira évidemment d'assujettir les coordonnées x et y à la relation que déterminent les deux équations simultanées

$$(164)\qquad x = \varphi(p, q_0, r_0,\ldots),\quad y = \chi(p, q_0, r_0,\ldots).$$

Cette relation étant admise, on obtiendra l'intégrale correspondant à la première courbe, en remplaçant dans la formule (12) la variable t par la variable p, les fonctions $\varphi(t)$, $\chi(t)$ par les fonctions $\varphi(p, q_0, r_0,\ldots)$, $\chi(p, q_0, r_0,\ldots)$, et les limites t_0, T par p_0 et P. En conséquence, l'intégrale correspondant à la première courbe deviendra

$$(165)\qquad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_p^P \frac{d[\varphi(p, q_0, r_0,\ldots) + \sqrt{-1}\,\chi(p, q_0, r_0,\ldots)]}{dp} \\ \qquad\qquad \times f[\varphi(p, q_0, r_0,\ldots) + \sqrt{-1}\,\chi(p, q_0, r_0,\ldots)]\,dp. \end{array}\right.$$

De même, comme il suffit d'assujettir les variables x, y aux équations simultanées

$$(166) \qquad x=\varphi(\mathrm{P}, q, r_0, \ldots), \quad y=\chi(\mathrm{P}, q, r_0, \ldots)$$

pour qu'elles représentent les coordonnées d'une courbe tracée de manière à lier le point (x_1, y_1) au point (x_2, y_2), l'intégrale relative à cette seconde courbe pourra s'écrire sous la forme

$$(167) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{q_0}^{\mathrm{Q}} \frac{d[\varphi(\mathrm{P}, q, r_0, \ldots)+\sqrt{-1}\,\chi(\mathrm{P}, q, r_0, \ldots)]}{dq} \\ &\qquad \times f[\varphi(\mathrm{P}, q, r_0, \ldots)+\sqrt{-1}\,\chi(\mathrm{P}, q, r_0, \ldots)]\,dq. \end{aligned} \right.$$

En continuant de la même manière, on finira par reconnaître que la somme des intégrales relatives aux différentes courbes peut être réduite à

$$(168) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{p_0}^{\mathrm{P}} \frac{d[\varphi(p, q_0, r_0, \ldots)+\sqrt{-1}\,\chi(p, q_0, r_0, \ldots)]}{dp} \\ &\qquad \times f[\varphi(p, q_0, r_0, \ldots)+\sqrt{-1}\,\chi(p, q_0, r_0, \ldots)]\,dp \\ &+\int_{q_0}^{\mathrm{Q}} \frac{d[\varphi(\mathrm{P}, q, r_0, \ldots)+\sqrt{-1}\,\chi(\mathrm{P}, q, r_0, \ldots)]}{dq} \\ &\qquad \times f[\varphi(\mathrm{P}, q, r_0, \ldots)+\sqrt{-1}\,\chi(\mathrm{P}, q, r_0, \ldots)]\,dq \\ &+\int_{r_0}^{\mathrm{R}} \frac{d[\varphi(\mathrm{P}, \mathrm{Q}, r, \ldots)+\sqrt{-1}\,\chi(\mathrm{P}, \mathrm{Q}, r, \ldots)]}{dr} \\ &\qquad \times f[\varphi(\mathrm{P}, \mathrm{Q}, r, \ldots)+\sqrt{-1}\,\chi(\mathrm{P}, \mathrm{Q}, r, \ldots)]\,dr \\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

Ainsi la différence entre deux sommes de cette espèce pourra être facilement déterminée à l'aide des principes établis n° 11.

Si l'on réduit les variables $p, q, r, \ldots$ aux deux suivantes p, r, la somme (168) deviendra

$$(169) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{p_0}^{\mathrm{P}} \frac{d[\varphi(p, r_0)+\sqrt{-1}\,\chi(p, r_0)]}{dp} f[\varphi(p, r_0)+\sqrt{-1}\,\chi(p, r_0)]\,dp \\ &+\int_{r_0}^{\mathrm{R}} \frac{d[\varphi(\mathrm{P}, r)+\sqrt{-1}\,\chi(\mathrm{P}, r)]}{dr} f[\varphi(\mathrm{P}, r)+\sqrt{-1}\,\chi(\mathrm{P}, r)]\,dr. \end{aligned} \right.$$

Si, dans cette dernière formule, on échange entre elles les variables

p, r, on obtiendra une nouvelle somme qui, étant comparée à la précédente, fournira l'équation

$$(170)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{p_0}^{\mathrm{P}} \frac{d[\varphi(p,r_0)+\sqrt{-1}\chi(p,r_0)]}{dp} f[\varphi(p,r_0)+\sqrt{-1}\chi(p,r_0)]dp \\ &+\int_{r_0}^{\mathrm{R}} \frac{d[\varphi(\mathrm{P},r)+\sqrt{-1}\chi(\mathrm{P},r)]}{dr} f[\varphi(\mathrm{P},r)+\sqrt{-1}\chi(\mathrm{P},r)]dr \\ &=\int_{r_0}^{\mathrm{R}} \frac{d[\varphi(p_0,r)+\sqrt{-1}\chi(p_0,r)]}{dr} f[\varphi(p_0,r)+\sqrt{-1}\chi(p_0,r)]dr \\ &+\int_{p_0}^{\mathrm{P}} \frac{d[\varphi(p,\mathrm{R})+\sqrt{-1}\chi(p,\mathrm{R})]}{dp} f[\varphi(p,\mathrm{R})+\sqrt{-1}\chi(p,\mathrm{R})]dp \\ &+\Delta, \end{aligned}\right.$$

Δ étant composé de termes relatifs à celles des racines de l'équation (19) qui représentent des valeurs particulières de l'expression imaginaire

$$\varphi(p,q)+\sqrt{-1}\chi(p,q)$$

correspondant à des valeurs de p renfermées entre les limites p_0, P, et à des valeurs de q renfermées entre les limites q_0, Q. L'équation (170) coïncide avec la formule générale que j'ai donnée dans le XIX^e Cahier du *Journal de l'École royale Polytechnique*, p. 574. On en déduit immédiatement celles que j'ai rapportées dans les pages 575 et suivantes du même cahier, et dans le *Bulletin de la Société Philomathique* de 1822. Si l'on fait en particulier

$$f(p,r)=re^{p\sqrt{-1}}=r(\cos p+\sqrt{-1}\sin p),$$

l'équation (170) deviendra

$$(171)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{r_0}^{\mathrm{R}} e^{p\sqrt{-1}} f(re^{p\sqrt{-1}})\,dr+\sqrt{-1}\int_{p_0}^{\mathrm{P}} r_0e^{p\sqrt{-1}}f(r_0e^{p\sqrt{-1}})\,dp \\ &=\int_{r_0}^{\mathrm{R}} e^{p_0\sqrt{-1}} f(re^{p_0\sqrt{-1}})\,dr+\sqrt{-1}\int_{p_0}^{\mathrm{P}} \mathrm{R}e^{p\sqrt{-1}}f(\mathrm{R}e^{p\sqrt{-1}})\,dp+\Delta, \end{aligned}\right.$$

et l'on aura

$$(172)\qquad \Delta=-2\pi(\mathfrak{f}_1+\mathfrak{f}_2+\ldots)\sqrt{-1},$$

les termes $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$,... étant relatifs aux racines de l'équation (19) qui peuvent représenter des valeurs de l'expression imaginaire

$$r(\cos p + \sqrt{-1}\sin p)$$

correspondant à des valeurs de r comprises entre les limites r_0, R, et à des valeurs de p comprises entre les limites p_0, P.

Si, dans l'équation (171), on pose

$$r_0 = 0, \quad R = 1, \quad p_0 = 0, \quad P = \pi,$$

on en tirera

$$(173) \quad \int_0^1 [f(r) + f(-r)]\,dr = -\sqrt{-1}\int_0^\pi e^{p\sqrt{-1}} f(e^{p\sqrt{-1}})\,dp - \Delta,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(174) \qquad \int_0^\pi e^{p\sqrt{-1}} f(e^{p\sqrt{-1}})\,dp = \sqrt{-1}\int_{-1}^1 f(r)\,dr + \Delta\sqrt{-1}.$$

Cette dernière formule, que j'ai donnée dans le *Bulletin de la Société Philomathique*, comprend, comme cas particulier, une équation du même genre, que M. Vernier a démontrée à l'aide du développement en série.

Si l'on supposait

$$r_0 = 0, \quad R = 1, \quad p_0 = 0, \quad P = \pi,$$

on tirerait des formules (171) et (172)

$$(175) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} e^{p\sqrt{-1}} f(e^{p\sqrt{-1}})\,dp = 2\pi(\mathrm{f}_1 + \mathrm{f}_2 + \ldots),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(176) \quad \int_0^\pi \frac{e^{p\sqrt{-1}} f(e^{p\sqrt{-1}}) + e^{-p\sqrt{-1}} f(e^{-p\sqrt{-1}})}{2}\,dp = \pi[\mathrm{f}_1 + \mathrm{f}_2 + \ldots].$$

La formule (175) coïncide avec l'équation (17) des additions au dernier des Mémoires insérés dans le XIX^e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*. De plus, si l'on désigne par $z_1, z_2, \ldots$ celles des racines de l'équation $\frac{1}{f(z)} = 0$ qui ont pour valeur numérique ou pour module un nombre inférieur à l'unité, et si, dans la formule (176), on remplace $f(z)$ par $\frac{f(z)}{z}$, on en conclura

$$(177)\quad \int_0^{\pi} \frac{f(e^{p\sqrt{-1}}) + f(e^{-p\sqrt{-1}})}{2}\,dp = \pi\left[f(0) + \frac{\mathrm{f}_1}{z_1} + \frac{\mathrm{f}_2}{z_2} + \ldots\right],$$

chacune des constantes f_1, f_2, ... devant être réduite à moitié toutes les fois que la racine correspondante aura l'unité pour module. Enfin, si dans l'équation précédente on écrit $2p$ au lieu de p, on en tirera

$$(178)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(e^{2p\sqrt{-1}}) + f(e^{-2r\sqrt{-1}})}{2}\,dp = \frac{\pi}{2}\left[f(0) + \frac{\mathrm{f}_1}{z_1} + \frac{\mathrm{f}_2}{z_2} + \ldots\right].$$

Soient maintenant s une quantité positive et $\mathrm{f}(x)$ une fonction de x, choisie de telle manière que l'expression

$$\mathrm{f}(re^{p\sqrt{-1}}),$$

reste finie et continue entre les limites $r = 0$, $r = 1$; $p = -\pi$, $p = \pi$. Si l'on pose successivement

$$f(x) = \left(\frac{1}{1 - sx} - \frac{1}{1 - \frac{s}{x}}\right)\mathrm{f}(x), \quad f(x) = \left(\frac{1}{1 - sx} + \frac{1}{1 - \frac{s}{x}}\right)\mathrm{f}(x),$$

on tirera de l'équation (178) :

1° Pour $s < 1$,

$$(179)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{s\sin 2p}{1 - 2s\cos 2p + s^2}\,\frac{\mathrm{f}(e^{2p\sqrt{-1}}) - \mathrm{f}(e^{-2p\sqrt{-1}})}{2\sqrt{-1}}\,dp = \frac{\pi}{4}[\mathrm{f}(s) - \mathrm{f}(0)],\\ &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - s\cos 2p}{1 - 2s\cos 2p + s^2}\,\frac{\mathrm{f}(e^{2p\sqrt{-1}}) + \mathrm{f}(e^{-2p\sqrt{-1}})}{2}\,dp = \frac{\pi}{4}[\mathrm{f}(s) + \mathrm{f}(0)];\end{aligned}\right.$$

2° Pour $s > 1$,

$$(180)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{s\sin 2p}{1 - 2s\cos 2p + s^2}\,\frac{\mathrm{f}(e^{2p\sqrt{-1}}) - \mathrm{f}(e^{-2p\sqrt{-1}})}{2\sqrt{-1}}\,dp = \frac{\pi}{4}\left[\mathrm{f}\left(\frac{1}{s}\right) - \mathrm{f}(0)\right],\\ &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - s\cos 2p}{1 - 2s\cos 2p + s^2}\,\frac{\mathrm{f}(e^{2p\sqrt{-1}}) + \mathrm{f}(e^{-2p\sqrt{-1}})}{2}\,dp = \frac{\pi}{4}\left[\mathrm{f}(0) - \mathrm{f}\left(\frac{1}{s}\right)\right].\end{aligned}\right.$$

On trouverait, au contraire, en réduisant s à l'unité et la première des intégrales (179) ou (180) à sa valeur principale,

$$(181)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2p}{1-\cos 2p}\,\frac{f(e^{2p\sqrt{-1}})-f(e^{-2p\sqrt{-1}})}{2\sqrt{-1}}\,dp = \frac{\pi}{2}[f(1)-f(0)], \\ &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(e^{2p\sqrt{-1}})+f(e^{-2p\sqrt{-1}})}{2}\,dp = \frac{\pi}{2}f(0). \end{aligned} \right.$$

Les équations (179), (180), (181) peuvent être déduites directement du théorème de M. Parseval sur la sommation des séries. Elles s'accordent avec une formule donnée par M. Guillaume Libri dans le tome XXVIII des *Mémoires de l'Académie des Sciences de Turin* et avec celles que nous avons insérées, M. Poisson et moi, dans le *Bulletin de la Société Philomathique de* 1822. Si l'on remplace dans ces équations la lettre s par la lettre r, et si l'on y pose successivement

$$f(x) = l(1+x),\quad f(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^a,\quad f(x) = l\left(\frac{1+x}{2}\right),$$
$$f(x) = l\left(\frac{1-x}{2}\right),\quad f(x) = l\left(\frac{1-x}{1+x}\right),\ldots,$$

on retrouvera précisément la formule de la page 301 [1].

17. Jusqu'à présent nous n'avons considéré que des intégrales simples; mais les principes que nous avons établis sont également applicables à la détermination et à la transformation des intégrales doubles ou multiples, prises entre des limites réelles ou imaginaires. Nous ne nous étendrons pas ici sur cet objet, que nous nous proposons de développer une autre fois, et nous terminerons le présent Mémoire en indiquant l'usage de quelques-unes des formules que nous avons obtenues dans le problème relatif à la propagation des ondes. (*A suivre.*)

---

(1) Voir *Bulletin*, t. VII.