C.-W. BORCHARDT

Sur la transformation des équations de l'élasticité en coordonnées orthogonales générales

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 8 (1875), p. 191-207

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1875__8__191_1>

MÉLANGES.

SUR LA TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS DE L'ÉLASTICITÉ EN COORDONNÉES ORTHOGONALES GÉNÉRALES;

PAR M. C.-W. BORCHARDT (1).

Nous devons à Lamé un résultat important dans la théorie de l'élasticité des corps solides isotropes (2), relativement à la transformation des équations différentielles des déplacements élastiques en un système de coordonnées orthogonales générales.

Ce résultat, qu'il a établi dans le *Journal de Liouville*, 1841, p. 52, et dans ses célèbres *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, p. 290, à l'aide d'un calcul assez long, mais conduit avec sa dextérité habituelle, peut s'énoncer sous une forme qui ne laisse rien à désirer pour la simplicité.

Soient x, y, z les coordonnées rectilignes orthogonales d'un point d'un corps solide élastique dans l'état d'équilibre élastique initial; $x+u, y+v, z+w$ les coordonnées après l'introduction d'une déformation élastique; la détermination de u, v, w dépend alors, comme on sait, de trois équations linéaires simultanées aux dérivées partielles du second ordre, ayant lieu dans toute l'étendue du

(1) *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. LXXVI, p. 45-58; 1873.

(2) C'est-à-dire dont l'elasticité est indépendante de la direction.

corps élastique, et de trois conditions aux limites, du premier ordre, ayant lieu pour la surface du corps. Si l'on forme les neuf dérivées par rapport à x, y, z des trois déplacements u, v, w, et au moyen de ces dérivées les six quantités

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial z}$$

et

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

que l'on peut appeler, avec M. de Saint-Venant (1), les trois dilatations et les trois glissements; les conditions aux limites pour les corps élastiques d'espece quelconque pourront être formées au moyen de ces six quantités elles-mêmes, et les équations aux dérivées partielles au moyen des dérivées de ces quantités par rapport à x, y, z.

Mais, dans le cas de l'isotropie, il y a pour les équations aux dérivées partielles une forme plus simple. Si, outre les trois dilatations et les trois glissements, on considère les trois doubles des composantes de la rotation élémentaire

$$\mathrm{U} = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \mathrm{V} = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \mathrm{W} = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x},$$

et que l'on forme, au moyen des trois dilatations, la dilatation de volume

$$p = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

les équations aux dérivées partielles des déplacements élastiques des corps isotropes auront la propriété caractéristique de pouvoir s'exprimer à l'aide des dérivées des quatre combinaisons p, U, V, W.

Cela posé, le résultat de Lamé peut s'énoncer en disant que la propriété caractéristique des équations aux dérivées partielles que nous venons d'expliquer subsiste aussi pour les coordonnées curvilignes orthogonales. Si l'on forme, pour un système général de coordonnées orthogonales, les expressions de la dilatation de vo-

(1) *Journal de Liouville*, 1863, p. 260, 262.

lume et des trois composantes de la rotation élémentaire, prises dans le sens des coordonnées croissantes, on pourra, au moyen de ces quatre quantités et de leurs dérivées par rapport aux trois coordonnées, former les équations aux dérivées partielles des déplacements élastiques des corps isotropes.

Il est évident qu'un résultat susceptible d'une expression aussi simple doit pouvoir s'obtenir sans le secours du calcul.

Jacobi a montré (1) que la transformation en général, et particulièrement la transformation en coordonnées orthogonales des équations aux dérivées partielles provenant de la variation d'une intégrale multiple, se trouve notablement simplifiée quand on l'effectue, non sur l'équation différentielle, mais sur l'intégrale.

Cette idée, développée par Jacobi à propos de problèmes à *une seule* variable indépendante, a été étendue par M. Carl Neumann au problème à *trois* variables indépendantes qui se présente dans l'élasticité des corps isotropes (2); mais, dans le cas actuel, la méthode de Jacobi seule n'est pas suffisante pour déduire d'une manière satisfaisante la forme des équations transformées trouvée par Lamé. En effet, les dilatations et les glissements, d'une part, et d'autre part les rotations élémentaires constituent deux groupes de quantités, pour chacun desquels il existe un mode de transformation particulier et très-simple. Si l'on mêle, au contraire, les deux groupes, on ne peut plus reconnaître de loi simple dans la transformation d'un tel groupe combiné.

Dans les pages suivantes, je vais montrer que, si l'on sépare convenablement les deux groupes, et qu'en outre on considère, dans la transformation des coordonnées les unes dans les autres, les différentielles totales au lieu des dérivées partielles, on obtient presque sans calcul le résultat de Lamé.

1. *Équation fondamentale de l'élasticité, sa transformation dans le cas de l'isotropie.* — Les équations de l'élasticité ont été ramenées par Green à une équation unique, exprimant que la variation d'une intégrale triple est égale au moment des forces données. Si les déplacements sont traités comme des infiniment petits, on

(1) *Journal de Crelle*, t. 36, p. 113.
(2) *Ibid.*, t. 57, p. 281.

aura, pour le cas des corps isotropes, cette équation fondamentale, en prenant les notations de Kirchhoff [1],

$$(1) \qquad \delta P = K\delta\Omega.$$

Dans cette formule,

$$(1)^* \quad \left\{ \begin{aligned} \delta P &= \delta^{(3)} P + \delta^{(2)} P \\ &= \int dT (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w) + \int d\omega [(X)\delta u + (Y)\delta v + (Z)\delta w] \end{aligned} \right.$$

désigne le moment des forces données, et l'intégrale $\delta^{(3)}P$, étendue aux éléments de volume dT, embrasse les forces agissant sur tous les points intérieurs du corps, tandis que l'intégrale $\delta^{(2)}P$, étendue aux éléments superficiels $d\omega$, embrasse les forces agissant sur tous les points de la limite du corps. Ω désigne l'intégrale

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \Omega &= \int dT (\mathfrak{E} + \theta p^2 - \mathfrak{g} s p), \\ \mathfrak{E} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2, \\ p &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}; \end{aligned} \right.$$

K et $K\theta$ sont les deux constantes de l'élasticité. Le terme $-\mathfrak{g}sp$ contenu dans l'intégrale Ω, et qui ne se trouve pas dans les recherches de Kirchhoff, a été introduit pour comprendre le cas, étudié par Duhamel et par M. Franz Neumann, dans lequel un échauffement

$$s(x, y, z),$$

inégalement distribué dans les diverses parties du corps élastique, vient contribuer aux déformations élastiques. La constante $\mathfrak{g}$, qui entre comme facteur dans ce terme, dépend, au moyen de l'équation

$$\mathfrak{g} = 2(1 + 3\theta)\mathfrak{c},$$

---

[1] *Journal de Crelle*, t. 40, p. 55.

du coefficient de dilatation linéaire thermique ϵ du corps élastique [1].

Si l'on réduit, d'après les règles du calcul des variations, la variation $\delta\Omega$ à sa forme la plus simple

$$\delta\Omega = \delta^{(3)}\Omega + \delta^{(2)}\Omega,$$

$\delta^{(3)}$ désignant la partie de la variation formée d'une intégrale de volume, $\delta^{(2)}$ la partie formée d'une intégrale de surface, l'équation fondamentale (1) se partagera dans les deux équations

$$(1)^a \qquad \delta^{(3)}P = K\delta^{(3)}\Omega,$$

$$(1)^b \qquad \delta^{(2)}P = K\delta^{(2)}\Omega.$$

La dernière, qui comprend les trois conditions pour la surface du corps élastique, n'est pas généralement susceptible d'une plus grande simplification. La première, au contraire, qui comprend les trois équations aux dérivées partielles, admet une simplification essentielle, qui s'obtient par une transformation de $\delta^{(3)}\Omega$, équivalente à la propriété caractéristique des équations aux dérivées partielles, mentionnée plus haut, et qui a lieu dans le cas de l'isotropie.

Posons

$$4\mathfrak{F} = U^2 + V^2 + W^2, \quad \mathfrak{G} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C},$$

U, V, W désignant, comme ci-dessus, les doubles composantes de la rotation élémentaire

$$U = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}, \quad V = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}, \quad W = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x},$$

et $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ les déterminants fonctionnels du second ordre

$$\mathfrak{A} = \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\mathfrak{B} = \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\mathfrak{C} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x};$$

(1) *Voir* Franz Neumann. *Les lois de la double réfraction de la lumière dans les corps non cristallisés ou non uniformément échauffés* (*Mémoires de l'Académie de Berlin, pour l'année* 1841), où l'auteur a pris $\theta = \frac{1}{2}$.

on pourra mettre $\mathfrak{E}$ sous la forme

$$\mathfrak{E} = p^2 + 2\mathfrak{F} - 2\mathfrak{G}.$$

Si l'on introduit, à côté de Ω, les nouvelles intégrales

$$\Omega' = \int d\mathrm{T}[2\mathfrak{F} + (1+\theta)p^2 - \mathfrak{g}sp], \quad \Gamma = \int d\mathrm{T}\mathfrak{G},$$

on aura

$$\Omega = \Omega' - 2\Gamma.$$

Mais l'intégrale Γ n'est pas une intégrale triple ou une intégrale de volume dans le sens propre : c'est une intégrale de surface. De même, en effet, qu'une intégrale simple

$$\int dx \frac{\partial f}{\partial x},$$

sous laquelle entre une dérivée, n'est pas une intégrale proprement dite, mais dépend seulement des valeurs de la fonction f correspondantes aux limites de l'intégration; de même, en général, une intégrale n-uple

$$\int dx_1 \ldots dx_n \mathfrak{M} = \int dx_1 \ldots dx_n \frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)}, \quad m \leqq n,$$

sous laquelle entre un déterminant fonctionnel $\mathfrak{M}$, pris par rapport à m des n variables d'intégration $x_1, \ldots, x_n$, n'est pas une intégrale n-uple proprement dite, mais au plus une intégrale $(n-1)$-uple; car, $\mathfrak{M}$ pouvant se mettre sous la forme

$$\mathfrak{M} = \frac{\partial(f_1\mathfrak{M}_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(f_1\mathfrak{M}_2)}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial(f_1\mathfrak{M}_m)}{\partial x_m}, \quad \mathfrak{M}_\mu = \frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial\frac{\partial f_1}{\partial x_\mu}} \quad [1],$$

l'intégrale considérée ne dépend pas des valeurs des fonctions $f_1, \ldots, f_m$ à l'intérieur de la région d'intégration formant un *continu* n-uple, mais seulement des valeurs correspondantes aux limites de ce *continu*. Dans cette catégorie, il faut ranger, pour $n = 3$,

---

[1] JACOBI, *Theoria novi multiplicatoris*. (*Journal de Crelle*, t. 27, p. 203.)

$m = 2$, l'intégrale ([1])

$$\Gamma = \int dx\,dy\,dz\,(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}),$$

en sorte que Γ, et par suite $\delta\Gamma$ ne sont que des intégrales superficielles ([2]). En ayant égard à l'équation

$$\Omega = \Omega' - 2\Gamma,$$

et effectuant aussi pour les autres intégrales la décomposition des variations δ dans les parties $\delta^{(3)}$ et $\delta^{(2)}$, on a donc

$$\delta^{(3)}\Gamma = 0, \quad \text{et} \quad \delta^{(3)}\Omega = \delta^{(3)}\Omega'.$$

Par cette transformation, $(1)^a$ se change en $\delta^{(3)}P = K\delta^{(3)}\Omega'$. *On a donc, dans le cas de l'isotropie, la forme simplifiée suivante, sous laquelle on peut réunir dans une seule équation les équations aux dérivées partielles de l'élasticité*

$$\delta^{(3)}P = K\,\delta^{(3)}\Omega', \tag{3}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\Omega' = \int dT\,[2\mathfrak{F} + (1+\theta)p^2 - gsp],\\ &4\mathfrak{F} = U^2+V^2+W^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2,\\ &p = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

2. *Transformation des dilatations linéaires.* — Dans ce qui va

---

([1]) La valeur de Γ, comme intégrale de surface, est donnée par la formule

$$2\Gamma = \int d\omega\,[(up - \varepsilon u)\cos(\nu, x) + (vp - \varepsilon v)\cos(\nu, y) + (wp - \varepsilon w)\cos(\nu, z)],$$

en désignant, pour une fonction quelconque f de x, y, z, par εf l'expression

$$\varepsilon f = \frac{\partial f}{\partial x}u + \frac{\partial f}{\partial y}v + \frac{\partial f}{\partial z}w,$$

et par (ν, x), (ν, y), (ν, z) les angles que forme avec les directions positives des axes coordonnés la portion de la normale à l'élément superficiel $d\omega$ dirigée vers l'extérieur.

([2]) On n'a pas ici l'occasion de considérer le cas particulier où la région d'intégration de Γ se restreint encore davantage.

suivre, j'emploierai, comme je l'ai déjà fait au n° 1, la lettre ε comme signe d'opération pour les variations élastiques, de sorte que, si f désigne une fonction quelconque des coordonnées, $f + \varepsilon f$ représentera la valeur de f après qu'une déformation élastique aura eu lieu.

Les déplacements qui ont lieu à une petite distance du point (x, y, z) peuvent, comme on sait, se former par l'addition de deux espèces de variations de l'élément $d\mathrm{T}$, la première espèce consistant dans les dilatations linéaires sans rotation.

Soient x', y', z' les coordonnées d'un point appartenant à l'élément $d\mathrm{T}$, dans la position primitive de ce point; r la longueur de la droite qui va de (x, y, z) en (x', y', z'); α, α_1, α_2 les cosinus des angles que cette droite fait avec les directions positives des axes des x, y, z. Par la déformation élastique, r se changeant en $r + \varepsilon r$, la dilatation linéaire $\frac{\varepsilon r}{r}$ est donnée, comme on sait, par l'équation

$$\frac{\varepsilon r}{r} = \sum a_{ik}\alpha_i\alpha_k, \quad (i, k = 0, 1, 2),$$

où l'on a

$$\alpha^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1,$$

et

$$a_{00} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad a_{11} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad a_{22} = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$a_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \quad a_{02} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), \quad a_{01} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Les deux expressions $\mathfrak{G}$, p, qui entrent dans l'intégrale Ω, peuvent être représentées au moyen des coefficients a_{ik}, sous la forme [1]

$$\mathfrak{G} = \sum_{ik} a_{ik}^2,$$

$$p = \sum_i a_{ii};$$

---

[1] Dans les sommes simples ou doubles que l'on rencontrera dans ce qui suit, on donnera à l'indice i ou à l'indice k ou à tous les deux les valeurs 0, 1, 2.

ce sont les invariants simultanés des deux formes quadratiques

$$\sum_{ik} a_{ik}\alpha_i\alpha_k, \quad \sum_i \alpha_i^2,$$

et par suite elles restent invariables dans toutes les transformations orthogonales, c'est-à-dire que, si l'on représente, dans un système quelconque de coordonnées orthogonales, rectilignes ou curvilignes, la dilatation linéaire sous la forme

$$\frac{\varepsilon r}{r} = \sum_{ik} b_{ik}\beta_i\beta_k,$$

β, β_1, β_2 étant les cosinus de direction relatifs à ce système, $\mathfrak{C}$ et p seront exprimés au moyen des quantités b_{ik} de la même manière qu'ils l'étaient au moyen des quantités a_{ik}.

Soient ρ, ρ_1, ρ_2 trois fonctions de x, y, z, formant un système orthogonal, et par suite $d\rho$, $d\rho_1$, $d\rho_2$ des fonctions linéaires de dx, dy, dz, satisfaisant à l'équation

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{d\rho^2}{h^2} + \frac{d\rho_1^2}{h_1^2} + \frac{d\rho_2^2}{h_2^2}.$$

Dans le système rectangulaire rectiligne des coordonnées x, y, z, les quantités u, v, w sont à la fois les variations élastiques des coordonnées et les déplacements dans le sens de ces coordonnées. Dans le système des ρ, ρ_1, ρ_2, il n'en est plus ainsi; les variations élastiques $\varepsilon\rho$, $\varepsilon\rho_1$, $\varepsilon\rho_2$ des coordonnées et les déplacements R, R_1, R_2 dans le sens des ρ, ρ_1, ρ_2 croissants sont liés ensemble par les équations

$$R_i = \frac{\varepsilon\rho_i}{h_i}.$$

Désignons les coordonnées des deux points infiniment voisins (x, y, z) et (x', y', z') dans le nouveau système par ρ, ρ_1, ρ_2 et ρ', ρ'_1, ρ'_2; alors leur distance r est donnée par l'équation

$$r^2 = \left(\frac{\rho' - \rho}{h}\right)^2 + \left(\frac{\rho'_1 - \rho_1}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{\rho'_2 - \rho_2}{h_2}\right)^2.$$

Après qu'a eu lieu la déformation élastique, r^2 se change en

$$(r+\varepsilon r)^2 = \left(\frac{\rho'-\rho+\varepsilon\rho'-\varepsilon\rho}{h+\varepsilon h}\right)^2 + \left(\frac{\rho'_1-\rho_1+\varepsilon\rho'_1-\varepsilon\rho_1}{h_1+\varepsilon h_1}\right)^2 + \left(\frac{\rho'_2-\rho_2+\varepsilon\rho'_2-\varepsilon\rho_2}{h_2+\varepsilon h_2}\right)^2.$$

Des trois fractions dont la somme des carrés compose le second membre de cette équation, transformons la première, les variations élastiques devant être traitées comme des infiniment petits, au moyen des équations

$$\frac{\rho'-\rho+\varepsilon\rho'-\varepsilon\rho}{h+\varepsilon h} = \frac{1}{h}\left[\left(1-\frac{\varepsilon h}{h}\right)(\rho'-\rho)+\varepsilon\rho'-\varepsilon\rho\right],$$

$$\varepsilon\rho'-\varepsilon\rho = \frac{\partial.\varepsilon\rho}{\partial\rho}(\rho'-\rho)+\frac{\partial.\varepsilon\rho}{\partial\rho_1}(\rho'_1-\rho_1)+\frac{\partial.\varepsilon\rho}{\partial\rho_2}(\rho'_2-\rho_2),$$

ce qui donne

$$\frac{\rho'-\rho+\varepsilon\rho'-\varepsilon\rho}{h+\varepsilon h} = \left(1+\frac{\partial.\varepsilon\rho}{\partial\rho}-\frac{\varepsilon h}{h}\right)\frac{\rho'-\rho}{h}+\frac{\partial.\varepsilon\rho}{\partial\rho_1}\frac{\rho'_1-\rho_1}{h}+\frac{\partial.\varepsilon\rho}{\partial\rho_2}\frac{\rho'_2-\rho_2}{h}.$$

En substituant cette expression et les deux autres analogues dans la valeur précédente de $(r+\varepsilon r)^2$, on trouve, pour la dilatation $\frac{\varepsilon r}{r}$, cette valeur

$$\frac{\varepsilon r}{r} = \sum_{ik} b_{ik}\beta_i\beta_k,$$

où l'on a posé

$$b_{ii} = \frac{\partial.\varepsilon\rho_i}{\partial\rho_i}-\frac{\varepsilon h_i}{h_i}, \quad b_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{h_i}{h_k}\frac{\partial.\varepsilon\rho_k}{\partial\rho_i}+\frac{h_k}{h_i}\frac{\partial.\varepsilon\rho_i}{\partial\rho_k}\right),$$

$$\beta_i = \frac{\rho'_i-\rho_i}{rh_i}, \quad \beta^2+\beta_1^2+\beta_2^2 = 1.$$

Puisque $\mathfrak{E}$ et p s'expriment de la même manière en b_{ik} qu'en a_{ik}, on a

$$\mathfrak{E} = \sum_{ik} b_{ik}^2, \quad p = \sum_i b_{ii}.$$

Ainsi les quantités qui entrent dans l'intégrale Ω se trouvent transformées dans le système de coordonnées des ρ, ρ_1, ρ_2, et la nouvelle expression de cette intégrale, en faisant, pour abréger,

$$\mathfrak{r}_i = \varepsilon\rho_i,$$

devient

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\Omega = \int d\mathrm{T}(\mathfrak{C} + \theta p^2 - \mathfrak{g} s p), \quad d\mathrm{T} = \frac{d\rho\, d\rho_1\, d\rho_2}{\varpi}, \quad \varpi = h h_1 h_2, \\ &\mathfrak{C} = \sum_{ik} b_{ik}^2, \quad b_{ii} = \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial \rho_i} - \frac{1}{h_i}\sum_k \frac{\partial h_i}{\partial \rho_k}\mathfrak{r}_k, \\ &b_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{h_i}{h_k}\frac{\partial \mathfrak{r}_k}{\partial \rho_i} + \frac{h_k}{h_i}\frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial \rho_k}\right), \\ &p = \sum_i b_{ii} = \varpi \sum_i \frac{\partial}{\partial \rho_i}\left(\frac{\mathfrak{r}_i}{\varpi}\right), \quad \mathfrak{r}_i = h_i \mathrm{R}_i. \end{aligned}\right.$$

3. *Transformation des rotations élémentaires.* — Dans ce paragraphe, nous considérerons la seconde espèce de changements de l'élément de volume $d\mathrm{T}$ causée par les déformations élastiques, et consistant dans une rotation de l'élément sans dilatations linéaires. Les doubles valeurs des composantes de cette rotation autour des axes des x, y, z sont

$$\mathrm{U} = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \mathrm{V} = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \mathrm{W} = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x};$$

le carré de la rotation totale est donc identique avec la quantité $\mathfrak{F}$, qui entre dans l'intégrale Ω', et qui a été définie par l'équation

$$4\mathfrak{F} = \mathrm{U}^2 + \mathrm{V}^2 + \mathrm{W}^2.$$

Cette interprétation physique fait déjà reconnaître d'avance dans $\mathfrak{F}$ un invariant relatif à la transformation en coordonnées orthogonales générales; mais le caractère d'invariant de $\mathfrak{F}$ est différent de celui des quantités précédemment transformées $\mathfrak{C}$, p. Les développements suivants feront voir que les deux espèces d'invariabilité sont entre elles dans une relation adjointe.

Considérons, avec les différentielles des coordonnées, une autre espèce quelconque d'accroissements infiniment petits, subis en même temps par les deux systèmes de quantités x, y, z et ρ, ρ_1, ρ_2, et désignons ces accroissements par $\delta x, \delta y, \delta z$ et $\delta\rho, \delta\rho_1, \delta\rho_2$; ces variations auront entre elles les mêmes relations linéaires que les différentielles; elles satisferont donc à la même condition du second degré, et l'on aura à la fois

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{d\rho^2}{h^2} + \frac{d\rho_1^2}{h_1^2} + \frac{d\rho_2^2}{h_2^2},$$
$$\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 = \frac{\delta\rho^2}{h^2} + \frac{\delta\rho_1^2}{h_1^2} + \frac{\delta\rho_2^2}{h_2^2}.$$

De la coïncidence des relations linéaires résulte encore, comme il est aisé de s'en convaincre, cette troisième équation

$$dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z = \frac{d\rho\,\delta\rho}{h^2} + \frac{d\rho_1\,\delta\rho_1}{h_1^2} + \frac{d\rho_2\,\delta\rho_2}{h_2^2}.$$

Multiplions entre elles les deux premières de ces trois équations, en appliquant la formule connue pour la représentation du produit de deux sommes de trois carrés sous forme d'une somme de quatre carrés, et soustrayons du résultat le carré de la troisième équation. Il viendra

$$\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2 = \mathfrak{R}^2 + \mathfrak{R}_1^2 + \mathfrak{R}_2^2,$$

en posant

$$\mathfrak{X} = dy\,\delta z - dz\,\delta y, \qquad \mathfrak{Y} = dz\,\delta x - dx\,\delta z, \qquad \mathfrak{Z} = dx\,\delta y - dy\,\delta x,$$
$$\mathfrak{R} = \frac{d\rho_1\,\delta\rho_2 - d\rho_2\,\delta\rho_1}{h_1 h_2}, \quad \mathfrak{R}_1 = \frac{d\rho_2\,\delta\rho - d\rho\,\delta\rho_2}{h_2 h}, \quad \mathfrak{R}_2 = \frac{d\rho\,\delta\rho_1 - d\rho_1\,\delta\rho}{h h_1}.$$

En remplaçant, dans l'équation

$$dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z = \frac{d\rho\,\delta\rho}{h^2} + \frac{d\rho_1\,\delta\rho_1}{h_1^2} + \frac{d\rho_2\,\delta\rho_2}{h_2^2},$$

les variations δ par les variations élastiques, et posant

$$\sigma_i = \frac{\varepsilon\rho_i}{h_i^2} = \frac{R_i}{h_i},$$

on trouve

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = \sigma\,d\rho + \sigma_1\,d\rho_1 + \sigma_2\,d\rho_2,$$

ou, en faisant, pour abréger,

$$f(dx) = u\,dx + v\,dy + w\,dz, \quad g(d\rho) = \sigma\,d\rho + \sigma_1\,d\rho_1 + \sigma_2\,d\rho_2,$$
$$f(dx) = g(d\rho).$$

Cette équation est identiquement satisfaite par les relations linéaires entre dx, dy, dz et $d\rho$, $d\rho_1$, $d\rho_2$; elle subsiste donc encore lorsqu'on remplace les différentielles par les variations, et l'on a ainsi

$$f(\delta x) = g(\delta\rho).$$

En variant la première de ces équations, différentiant la seconde et prenant la différence des deux résultats, il vient (¹)

$$\delta f(dx) - df(\delta x) = \delta g(d\rho) - dg(\delta\rho),$$

ou, sous forme développée,

$$\mathfrak{X}\mathrm{U} + \mathfrak{Y}\mathrm{V} + \mathfrak{Z}\mathrm{W} = \mathfrak{R}\mathfrak{S} + \mathfrak{R}_1\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{R}_2\mathfrak{S}_2,$$

en posant

$$\mathfrak{S} = h_1 h_2\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial\rho_2} - \frac{\partial\sigma}{\partial\rho_1}\right), \quad \mathfrak{S}_1 = h_2 h\left(\frac{\partial\sigma_2}{\partial\rho} - \frac{\partial\sigma}{\partial\rho_2}\right), \quad \mathfrak{S}_2 = h h_1\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\rho_1} - \frac{\partial\sigma_1}{\partial\rho}\right).$$

Or on a, comme on sait, le théorème algébrique suivant :

Soient $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ *et* $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ *deux systèmes de variables dépendant linéairement les unes des autres et satisfaisant en même temps à la condition*

$$\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2 = \mathfrak{R}^2 + \mathfrak{R}_1^2 + \mathfrak{R}_2^2,$$

et supposons ces deux systèmes liés à deux autres systèmes U, V, W *et* $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ *par l'équation identique*

$$\mathfrak{X}\mathrm{U} + \mathfrak{Y}\mathrm{V} + \mathfrak{Z}\mathrm{W} = \mathfrak{R}\mathfrak{S} + \mathfrak{R}_1\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{R}_2\mathfrak{S}_2;$$

les deux nouveaux systèmes dépendront aussi entre eux linéairement et satisferont en même temps à la condition

$$\mathrm{U}^2 + \mathrm{V}^2 + \mathrm{W}^2 = \mathfrak{S}^2 + \mathfrak{S}_1^2 + \mathfrak{S}_2^2.$$

Ainsi se trouve effectuée la transformation de

$$2\mathfrak{F} = \frac{1}{2}(\mathrm{U}^2 + \mathrm{V}^2 + \mathrm{W}^2) = \frac{1}{2}(\mathfrak{S}^2 + \mathfrak{S}_1^2 + \mathfrak{S}_2^2)$$

(¹) *Voir* le Memoire de M. Lipschitz, *Journal de Borchardt*, t. 70, p. 77, et *Bulletin*, t. IV. p. 97 et suivantes.

dans les nouvelles coordonnées; les quantités $\frac{1}{2}\mathfrak{S}$, $\frac{1}{2}\mathfrak{S}_1$, $\frac{1}{2}\mathfrak{S}_2$ sont, comme il est aisé de s'en convaincre, les composantes de la rotation élémentaire autour des directions des ρ, ρ_1, ρ_2 croissants. p ayant déjà été transformé au n° 2, toutes les quantités qui entrent dans l'intégrale Ω' sont maintenant exprimées au moyen des nouvelles coordonnées, et l'on a, pour Ω', la valeur

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned} &\Omega' = \int d\mathrm{T}[2\mathfrak{F} + (1+\theta)p^2 - gsp],\\ &d\mathrm{T} = \frac{d\rho\, d\rho_1\, d\rho_2}{\varpi}, \quad \varpi = hh_1h_2,\\ &4\mathfrak{F} = \sum_i \mathfrak{S}_i^2, \quad \mathfrak{S}_i = h_k h_l\left(\frac{\partial\sigma_k}{\partial\rho_l} - \frac{\partial\sigma_l}{\partial\rho_k}\right),\\ &p = \varpi\sum_i \frac{\partial}{\partial\rho_i}\left(\frac{h_i^2\sigma_i}{\varpi}\right), \quad \sigma_i = \frac{\mathrm{R}_i}{h_i}, \end{aligned}\right.$$

ikl étant une permutation positive des indices 0, 1, 2.

A la transformation des déplacements, qui est contenue dans l'équation employée plus haut

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = \sum_i \sigma_i\,d\rho_i = \sum_i \frac{\mathrm{R}_i}{h_i}\,d\rho_i,$$

on en peut joindre une autre semblable, relative aux moments des forces données, savoir :

$$\mathrm{X}\,\delta u + \mathrm{Y}\,\delta v + \mathrm{Z}\,\delta w = \sum_i \frac{\mathrm{P}_i}{h_i}\,\delta\mathrm{r}_i = \sum_i \mathrm{P}_i h_i\,\delta\sigma_i,$$

et l'on transforme d'après cela les moments des forces données, au moyen des équations

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned} &\delta^{(2)}\mathrm{P} = \int d\omega\,[(\mathrm{X})\delta u + (\mathrm{Y})\delta v + (\mathrm{Z})\delta w] = \int d\omega \sum_i \frac{(\mathrm{P}_i)}{h_i}\,\delta\mathrm{r}_i,\\ &\delta^{(3)}\mathrm{P} = \int d\mathrm{T}(\mathrm{X}\,\delta u + \mathrm{Y}\,\delta v + \mathrm{Z}\,\delta w) = \int d\mathrm{T}\sum_i \mathrm{P}_i h_i\,\delta\sigma_i, \end{aligned}\right.$$

P_i et (P_i) désignant les composantes des forces données, intérieures et extérieures, dans le sens des ρ_i croissants.

4. *Équations aux dérivées partielles et conditions à la surface en coordonnées orthogonales générales.* — Pour obtenir les équations aux dérivées partielles et les conditions à la surface sous une forme commode, il reste encore à développer les variations $\delta^{(2)}\Omega$ et $\delta^{(3)}\Omega'$. Étant donnée une intégrale

$$\Omega = \int d\mathrm{T} f\left(\ldots, \rho_k, \ldots, \mathfrak{r}_i, \ldots, \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial \rho_k}, \ldots\right), \quad d\mathrm{T} = \frac{d\rho\, d\rho_1\, d\rho_2}{\varpi}, \quad (i, k = 0, 1, 2),$$

la forme définitive de sa variation est, comme on sait,

$$\delta\Omega = \sum_i \int d\mathrm{T}\, \delta\mathfrak{r}_i \left[f^i - \sum_k \varpi \frac{\partial}{\partial \rho_k}\left(\frac{1}{\varpi} f_k^i\right)\right] + \sum_i \int d\omega\, \delta\mathfrak{r}_i \sum_k \frac{1}{h_k} f_k^i \cos(\nu, \rho_k),$$

où l'on a posé

$$f^i = \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{r}_i}, \quad f_k^i = \frac{\partial f}{\partial \dfrac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial \rho_k}},$$

(ν, ρ_k) étant l'angle que fait la normale à l'élément de surface $d\omega$, dirigée vers l'extérieur, avec la direction des ρ_k croissants. On tire de là

$$\delta^{(2)}\Omega = \sum_i \int d\omega\, \delta\mathfrak{r}_i \sum_k \frac{1}{h_k} f_k^i \cos(\nu, \rho_k),$$

où

$$f = \mathfrak{E} + \theta p^2 - \mathfrak{g} s p.$$

On a de même

$$-\delta^{(3)}\Omega' = \sum_i \int d\mathrm{T}\, \delta\sigma_i \left[-\mathrm{F}^i + \sum_k \varpi \frac{\partial}{\partial \rho_k}\left(\frac{1}{\varpi} \mathrm{F}_k^i\right)\right],$$

$$\mathrm{F} = 2\mathfrak{F} + (1 + \theta) p^2 - \mathfrak{g} s p,$$

$$\mathrm{F}^i = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \sigma_i}, \quad \mathrm{F}_k^i = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \dfrac{\partial \sigma_i}{\partial \rho_k}}.$$

Si l'on remplace, dans f, $\mathfrak{E}$ et p par leurs expressions

$$\mathfrak{E} = \sum_{ik} b_{ik}^2, \quad b_{ii} = \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial \rho_i} - \frac{1}{h_i} \sum_k \frac{\partial h_i}{\partial \rho_k} \mathfrak{r}_k, \quad b_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{h_i}{h_k} \frac{\partial \mathfrak{r}_k}{\partial \rho_i} + \frac{h_k}{h_i} \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial \rho_k}\right),$$

$$p = \sum_i b_{ii} = \varpi \sum_i \frac{\partial}{\partial \rho_i}\left(\frac{\mathfrak{r}_i}{\varpi}\right).$$

on obtient, pour les dérivées f_i^i, f_k^i de f qui entrent dans $\delta^{(2)}\Omega$, les valeurs

$$f_i^i = 2\left(b_{ii} + \theta p - \frac{1}{2}\,\mathfrak{g}s\right), \quad f_k^i = 2\,b_{ik}\,\frac{h_k}{h_i},$$

et par suite

$$\delta^{(2)}\Omega = 2\sum\int d\omega\,\frac{1}{h_i}\sum_k c_{ik}\cos(\nu, \rho_k),$$

où l'on a

$$c_{ii} = b_{ii} + \theta p - \frac{1}{2}\,\mathfrak{g}s, \quad c_{ik} = b_{ik}.$$

En substituant cette valeur de $\delta^{(2)}\Omega$ et la valeur (7) de $\delta^{(2)}P$ dans l'équation fondamentale des conditions à la surface

$$\delta^{(2)}P = K\,\delta^{(2)}\Omega,$$

on obtient les trois équations de condition à la surface, exprimées au moyen des nouvelles coordonnées, sous la forme qui les représente toutes les trois,

$$(8)\quad \left[b_{ii} + \theta p - \frac{1}{2}\,\mathfrak{g}s\right]\cos(\nu, \rho_i) + b_{ik}\cos(\nu, \rho_k) + b_{il}\cos(\nu, \rho_l) = \frac{1}{2K}(P_i),$$

où ikl désigne une permutation des indices 0, 1, 2, et où l'on a

$$(8)^\star\quad b_{ii} = \frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial \rho_i} - \frac{1}{h_i}\sum_k \frac{\partial h_i}{\partial \rho_k}\,\mathfrak{r}_k, \quad b_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{h_i}{h_k}\,\frac{\partial \mathfrak{r}_k}{\partial \rho_i} + \frac{h_k}{h_i}\,\frac{\partial \mathfrak{r}_i}{\partial \rho_k}\right),$$

résultat qui coïncide, en posant $s = 0$, avec les formules de Lamé (*Leçons sur les coordonnées curvilignes*, p. 281 et 282).

Si, dans F, on remplace $\mathfrak{F}$ et p par leurs expressions

$$4\mathfrak{F} = \sum_i \mathfrak{S}_i^2, \quad \mathfrak{S}_i = h_k h_l\left(\frac{\partial \sigma_k}{\partial \rho_l} - \frac{\partial \sigma_l}{\partial \rho_k}\right), \quad p = \varpi\sum_i\left(\frac{h_i^2}{\varpi}\,\frac{\partial \sigma_i}{\partial \rho_i} + \sigma_i\,\frac{\partial}{\partial \rho_i}\,\frac{h_i^2}{\varpi}\right),$$

ikl désignant une permutation positive de 0, 1, 2, et qu'on introduise la quantité

$$q = 2(1 + \theta)p - \mathfrak{g}s,$$

on obtient, pour les dérivées F^i, F_i^i, F_k^i de F, qui entrent dans

$\delta^{(3)}\Omega'$, les valeurs

$$F^{\iota} = \varpi \frac{\partial}{\partial\rho_\iota}\frac{h_\iota^2}{\varpi}\cdot q, \quad F_\iota^\iota = h_\iota^2 q, \quad F_k^\iota = (ikl)\, h_\iota h_k \mathfrak{S}_l,$$

(ikl) désignant l'unité positive ou négative, suivant que ikl est une permutation positive ou négative de 0, 1, 2. On trouve, d'après cela, pour $\delta^{(3)}\Omega'$, l'expression définitive

$$-\delta^{(3)}\Omega' = \sum_\iota \int d\mathrm{T}\,\delta\sigma_\iota\left[h_\iota^2 \frac{\partial q}{\partial\rho_\iota} + (ikl)\varpi\left(\frac{\partial}{\partial\rho_k}\frac{\mathfrak{S}_l}{h_l} - \frac{\partial}{\partial\rho_l}\frac{\mathfrak{S}_k}{h_k}\right)\right].$$

Substituant cette valeur de $\delta^{(3)}\Omega'$ et la valeur (7) de $\delta^{(3)}\mathrm{P}$ dans l'équation fondamentale pour les équations aux dérivées partielles

$$\delta^{(3)}\mathrm{P} = \mathrm{K}\,\delta^{(3)}\Omega',$$

et convenant que ikl représentera une permutation positive de 0, 1, 2, on obtient les trois équations aux dérivées partielles, exprimées au moyen des nouvelles coordonnées, sous la forme qui les représente toutes les trois,

$$\frac{\partial}{\partial\rho_l}\frac{\mathfrak{S}_k}{h_k} - \frac{\partial}{\partial\rho_k}\frac{\mathfrak{S}_l}{h_l} = \frac{h_\iota}{h_k h_l}\frac{\partial q}{\partial\rho_\iota} + \frac{1}{\mathrm{K}}\frac{\mathrm{P}_\iota}{h_k h_l}, \tag{9}$$

en désignant par ikl une permutation positive de 0, 1, 2, et posant

$$(9)^* \quad \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{S}_\iota = h_k h_l\left(\frac{\partial\sigma_k}{\partial\rho_l} - \frac{\partial\sigma_l}{\partial\rho_k}\right), \quad q = 2(1+\theta)p - \mathfrak{g}s, \\ &p = \varpi\sum_\iota \frac{\partial}{\partial\rho_\iota}\left(\frac{h_\iota^2\sigma_\iota}{\varpi}\right), \quad \sigma = \frac{\mathrm{R}_\iota}{h_\iota}. \end{aligned}\right.$$

Ces équations, en y faisant $s = 0$, concordent avec les systèmes (25), (26), (27) de Lamé (*Leçons sur les coordonnées curvilignes*, p. 290 et 291).

Berlin, janvier 1873.