BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Revue bibliographique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 7 (1874), p. 97-106

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1874__7__97_0>

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

ZEUTHEN (H.-G.). — ALMINDELIGE EGENSKABER VED SYSTEMER AF PLANE KURVER, MED ANVENDELSE TIL BESTEMMELSE AF KARAKTERISTIKERNE I DE ELEMENTÆRE SYSTEMER AF FJERDE ORDEN. Med 5 Tavler (109 p. in-4°) (¹). — *Avec un Resumé en français* (Mémoires de la Société Danoise des Sciences et Lettres; 5ᵉ série, t. X; 1873).

(Compte rendu par l'auteur.)

Les courbes d'ordre n, douées de d points doubles et de e points cuspidaux, et assujetties à $\frac{n(n+3)}{2} - d - 2e - 1$ conditions, forment un système. Je désigne par

μ le nombre des courbes du système qui passent par un point donné;

b l'ordre du lieu des points doubles;

c l'ordre du lieu des points cuspidaux;

p la classe de l'enveloppe des tangentes aux points doubles;

q la classe de l'enveloppe des tangentes aux points cuspidaux;

u la classe de l'enveloppe des tangentes issues des points doubles;

ν la classe de l'enveloppe des tangentes issues des points cuspidaux;

x la classe de l'enveloppe des droites joignant deux points doubles;

y la classe de l'enveloppe des droites joignant un point double à un point cuspidal;

z la classe de l'enveloppe des droites joignant deux points cuspidaux;

$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$ le nombre des courbes douées d'un nouveau point double, α_0 étant celui des courbes où aucune des branches qui forment le point double n'est une droite, α_1 celui des courbes où une de ces deux branches est une droite, α_2 celui des courbes où les branches sont toutes les deux des droites;

(¹) *Recherche des propriétés générales des systèmes de courbes planes, suivie d'une application à la détermination des caractéristiques des systèmes élémentaires du quatrième ordre.* Avec 5 planches.

β le nombre des courbes où un point double est dégénéré en un point cuspidal ;

$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1$ le nombre des courbes où un point cuspidal est dégénéré en un point de contact de deux branches, γ_0 étant celui des courbes où aucune de ces branches n'est une droite, γ_1 celui des courbes où l'une des branches est une droite ;

$(2d)$ le nombre des courbes où deux points doubles coïncident ;

(de) le nombre des courbes où un point double coïncide avec un point cuspidal ;

$(2e)$ le nombre des courbes où deux points cuspidaux coïncident ;

$(3d)$ le nombre des courbes où trois points doubles coïncident en un point triple ;

$(2de)$ le nombre des courbes où deux points doubles et un point cuspidal coïncident ;

$(d2e)$ le nombre des courbes où un point double et deux points cuspidaux coïncident.

En ajoutant des accents aux notations précédentes n', μ', je forme les notations des nombres réciproques qu'on obtient par le principe de dualité ; γ'_1, $(2d')$, $(d'e')$, $(2e')$ ne seront pas différents de γ_1, $(2d)$, (de), $(2e)$.

Si le système ne contient pas d'autres courbes singulières que celles qui sont nommées ici, les nombres énumérés doivent satisfaire aux équations suivantes :

$$2(n-1)\mu = \mu' + 2b + 3c + \alpha',$$

$$d.\mu' + n'.b = 2p + u + \beta,$$

$$e.\mu' + n'.c = 3q + v + \gamma,$$

$$2(d-1)b = 2x + (2d) + 6(3d) + 3(2de) + (n-6)\alpha'_0 + (n-4)\alpha'_1 + (n-2)\alpha'_2,$$

$$e.b + d.c = y + (de) + 2(2de) + 3(d2e),$$

$$2(e-1)c = 2z + (2e) + 3(d2e) + 4\alpha'_0 + 2\alpha'_1 + \beta' + 12\gamma'_0,$$

$$(n-2)\mu' + (n+n'-4)\mu = c' + p + 2q,$$

$$(n-2)b + d.\mu = p + 3(3d) + 3(2de) + 2(d2e) + (n-6)\alpha'_0 + (n-4)\alpha'_1 + (n-2)\alpha'_2,$$

$$(n-2)c+e.\mu=2q+(2de)+4(d2e)+4\alpha'_0+2\alpha'_1+8\gamma'_0,$$

$$(n-3)[(n-2)\mu'+2(n'-2)\mu]$$
$$=2b'+2u+3v+n'\alpha'_0+(n'-1)\alpha'_1+(n'-2)\alpha'_2,$$

$$(n-3)[(n-2)b+2d.\mu=u+4x+3y+[d-2(n-6)]\alpha'_0$$
$$+[d-2(n-4)]\alpha'_1+[d-2(n-2)]\alpha'_2,$$

$$(n-3)[(n-2)c+2e.\mu]=v+2y+6z+(e-6)\alpha'_0+(e-3)\alpha'_1+e\alpha'_2,$$

$$2p=2b+\beta+2(2d)+3(de)+(d2e),$$

$$2(n-1)\mu+2\mu'=q'+2b+2c+\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha'+2\beta'+3\gamma',$$

et aux équations qu'on en forme en substituant des notations accentuées à celles qui n'ont pas d'accent, et réciproquement.

Je démontre, dans la *deuxième Partie* de mon Mémoire, ces formules par le principe de correspondance, en me servant, pour déterminer les coefficients numériques des différents termes, de la règle que j'ai exposée dans le cinquième volume de ce *Bulletin*. Mais, pour faire usage de cette règle, il faut connaître non-seulement les propriétés des courbes singulières elles-mêmes, mais aussi celles des courbes du système qui en sont infiniment voisines. C'est à cette connaissance que conduisent les études particulières des différentes courbes singulières que j'ai entreprises dans la *première Partie* de mon Mémoire. On y trouve aussi le moyen de déterminer pour combien compte une courbe singulière dans le nombre α, α',... auquel elle appartient.

Comme les recherches, dans la première *Partie*, sur la formation de nouveaux points singuliers ou de nouvelles tangentes singulières peuvent avoir un intérêt spécial, j'en ai rendu les résultats visibles par des figures (Planches I-III).

Les vingt-huit équations que nous venons de nommer ne forment qu'un système de vingt-trois équations indépendantes. Elles peuvent servir à exprimer vingt-trois des nombres μ, μ', b, b', c, c', p, p', q, q', u, u', v, v', x, x', y, y', z, z', α_0, α_1, α_2, α'_0, α'_1, α'_2, β, β', γ_0, γ_1, γ'_0, $(2d)$, (de), $(2e)$, $(3d)$, $(3d')$, $(2de)$, $(2d'e')$, $(d2e)$, $(d'2e')$ linéairement par les dix-sept autres, qu'on peut ainsi regarder comme les caractéristiques des systèmes qui ne présentent pas d'autres courbes singulières que celles que nous avons nommées. Le principe de correspondance peut servir à exprimer les nombres des courbes du système qui satisfont à une condition donnée linéairement par ces dix-sept caractéristiques. J'en ai donné quelques exemples (II[e] *Partie*). Dans le cas où la condition nouvelle est un contact avec une courbe indépendante des conditions du système, le nombre cherché ne dépendra que des deux caractéristiques μ et μ' : il est égal à $a'\mu + a\mu'$, a et a' étant l'ordre et la classe de la courbe donnée (théorème de M. Chasles).

Pour rendre nos formules applicables à des systèmes où il existe d'autres courbes singulières (et où le nombre des caractéristiques est, par conséquent, plus grand), il suffit d'y ajouter des termes formés des nombres de ces nouvelles courbes multipliés de coefficients numériques (¹). On détermine ces coefficients par les mêmes principes que les autres coefficients de nos formules. Dans le dernier numéro de la *deuxième Partie*, je considère un exemple où ces nouveaux coefficients sont faciles à déterminer, celui où les courbes du système sont les projections centrales des sections faites dans une surface donnée par les plans d'un faisceau. En étendant mes formules au cas où le système contient, à côté des courbes singulières dont nous avons déjà parlé, une droite n-uple, j'obtiens une démonstration des formules de MM. Salmon et Cayley, exprimant les dépendances des nombres des singularités d'une surface algébrique.

Les courbes singulières auxquelles j'ai eu égard dans les formules nommées ci-dessus appartiennent à celles que j'appelle *courbes singulières ordinaires*, en désignant de cette manière celles qu'on rencontre dans les systèmes dont les conditions données sont des contacts avec des courbes indépendantes entre elles. Mais il existe encore d'autres courbes singulières ordinaires, dont nous n'avons pu nous occuper dans les précédentes recherches générales, parce qu'elles sont différentes pour les différentes valeurs de n, d et e : ce sont les *courbes à branches multiples* (²). Dans la *troisième Partie* de mon Mémoire, je m'occupe des courbes à

(¹) Comme dans les termes déjà considérés, ces coefficients peuvent dépendre de n, d, e, etc.

(²) Les courbes dont nous avons désigné les nombres par α et α' appartiennent en quelque sorte à cette catégorie. Les courbes α en sont même les seules, si les courbes du système doivent passer par un nombre suffisant de points indépendants entre eux, et en général si elles sont données par une équation en coordonnées-points; ce sont les courbes α' dans les cas réciproques. Alors nos équations seront applicables sans termes supplémentaires.

branches multiples, qu'on trouve *ordinairement* dans les systèmes de courbes du *troisième* ou du *quatrième ordre ;* j'étudie leurs propriétés et celles de leurs courbes voisines dans les systèmes (une partie de ces propriétés est rendue visible par les figures des Planches IV et V), et j'applique ces résultats à la détermination des termes auxquels elles donnent lieu dans les équations dont nous avons parlé [1].

Je me borne à indiquer ici quelles sont les courbes singulières ordinaires des systèmes de courbes *générales* du quatrième ordre ($n = 4$, $d = e = 0$). On trouve dans ces systèmes :

ξ courbes composées d'une conique et d'une droite double, et ayant des sommets [2] doubles aux points d'intersection de ces deux parties et six sommets simples sur la droite double [3] ;

η courbes composées d'une conique et d'une droite double qui lui est tangente, et ayant un sommet triple au point de contact et sept sommets simples sur la droite double ;

ζ courbes composées de deux droites simples et d'une droite double passant par leur point d'intersection, et ayant un sommet quadruple en ce point d'intersection et huit sommets simples sur la droite double ;

$\varkappa$ courbes composées de deux droites doubles, et ayant un sommet triple à leur point d'intersection, six sommets simples sur l'une, trois sur l'autre des deux droites [4] ;

λ courbes composées d'une droite simple et d'une droite triple, et ayant un sommet double au point d'intersection et dix sommets simples sur la droite triple ;

---

(1) Quant aux courbes du troisième ordre, une partie de mes résultats n'est qu'une reproduction de ceux qui se trouvent dans des Mémoires antérieurs de M. Maillard et de moi-même. (Voir *Bulletin*, t. III.)

(2) Un sommet est un point d'une courbe singulière, doué de la propriété que toute droite passant par lui est une tangente.

(3) Je ferai observer que le nombre ν dont je parle dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 23 septembre 1872 est, à cause d'une manière différente de compter les courbes, égal à ce que j'appelle ici $\frac{\xi}{2}$.

(4) M. *Cayley* avait antérieurement trouvé ces courbes $\varkappa$ (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 11 mars 1872).

ν droites quadruples présentant douze sommets simples ;

θ coniques doubles présentant huit sommets.

Pour représenter algébriquement les courbes ξ, η, ζ et leurs courbes voisines, je prends pour axe des x la droite double, et je désigne par A_r, B_r,... des polynômes en x et y du degré r, et par a_r, b_r,... les polynômes en x qui en résultent pour $y = 0$; k est le périmètre variable du système, et ψ est une fonction de x, y, k, qui peut être irrationnelle en k, et qui ne devient pas infinie pour $k = 0$. Les courbes singulières correspondent à la valeur $k = 0$.

Les courbes ξ seront représentées par l'équation

$$A_2 y^2 + 2B_3 yk + C_4 k^2 + \psi k^3 = 0,$$

et leurs six sommets simples seront déterminés par

$$b_3^2 - a_2 c_4 = 0.$$

Cette équation devient identique lorsque $a_2 = a_1^2$, $b_3 = a_1 b_2$, $c_4 = b_2^2$. Alors on obtient l'équation

$$(a_1 y + b_2 k)^2 + C_1 y^3 + C_2 y^2 k + C_3 y k^2 + C_4 k^3 + \psi k^4 = 0,$$

qui donne, pour $k = 0$, une courbe η, dont les sept sommets simples sont déterminés par l'équation

$$b_2^3 c_1 - a_1 b_2^2 c_2 + a_1^2 b_2 c_3 - a_1^3 c_4 = 0.$$

Si cette équation devient identique, on obtient l'équation

$$\begin{aligned}(a_1 y + b_2 k)^2 &+ 2(c_0 y^2 + c_1 y k + c_2 k^2)(a_1 y + b_2 k) \\ &+ d_0 y^4 + D_1 y^3 k + D_2 y^2 k^2 + D_3 y k^3 + D_4 k^4 + \psi k^5 = 0,\end{aligned}$$

qui donne pour $k = 0$ une courbe ζ, dont les huit sommets simples se déterminent par l'équation

$$(b_2^2 c_0 - a_1 b_2 c_1 + a_1^2 c_2)^2 - (b_2^4 d_0 - a_1 b_2^3 d_1 + a_1^2 b_2^2 d_2 - a_1^3 b_2 d_3 + a_1^4 d_4) = 0,$$

En ayant égard aux cas où $b_3^2 - a_2 c_4 = 0$ devient identique d'une autre manière que celle que nous avons supposée, ou à celui où l'équation dernièrement trouvée devient identique, on parvient soit à des représentations de courbes singulières qui ne sont pas ordinaires, soit à de nouvelles représentations des courbes ξ, η, ζ, ou bien à des représentations de courbes qui comptent pour 2, 3,... courbes ξ, η, ζ.

Nous ne nous arrêterons pas ici à la représentation des courbes $\varkappa$, λ, ν, θ, qui n'est pas difficile.

Pour les systèmes de courbes du quatrième ordre douées de points singuliers, on trouve soit des modifications de ces mêmes courbes singulières, soit quelques nouvelles espèces ordinaires.

Nous ne nommerons ici que quatre des équations auxquelles nous sommes conduit par l'introduction des nouvelles courbes singulières; ces quatre équations se rapportent toutes au cas de $n = 4$, $d = e = 0$:

$$(1)\quad \begin{cases} 6\mu = \mu' + 2\xi + 3\eta + 4\zeta + 3\varkappa + 6\lambda + 12\nu + 2\theta, \\ 22\mu' = \mu + 2b' + 3c' + \alpha + 2\xi + 2\eta + 6\zeta + 2\varkappa + \lambda + 2\theta, \\ 2\mu' + 12\mu = c' + 2\xi + 2\eta + 4\zeta + 2\varkappa + 12\lambda + 24\nu + 2\theta, \\ 2\mu' + 20\mu = 2b' + 4\xi + 6\eta + 4\zeta + 14\varkappa + 4\lambda + 24\nu + 10\theta. \end{cases}$$

On trouve, en éliminant μ', b', c',

$$(2)\quad \alpha = 27\mu - 20\xi - 32\eta - 46\zeta - 24\varkappa - 45\lambda - 72\nu - 14\theta.$$

Ce sont les formules (1) et (2), et les formules analogues pour les courbes du quatrième ordre à points multiples, qui m'ont servi dans la *quatrième Partie* de mon Mémoire *à déterminer les caractéristiques des systèmes élémentaires*. Si l'on pouvait déterminer d'une manière directe pour tous les systèmes élémentaires les valeurs de ξ, η, ζ, $\varkappa$, λ, ν, θ, les formules (1) suffiraient, parce que dans le système déterminé seulement par des points donnés $\mu = 1$, et ensuite le μ' d'un système sera égal au μ du système précédent. Cette détermination directe est possible pour ξ, η, ζ, $\varkappa$, θ; toutefois les recherches géométriques et même les calculs sont tellement pénibles, qu'on a besoin de pouvoir contrôler chaque pas qu'on fait ([1]). Mais, quant aux nombres λ et ν, ils sont composés de termes contenant des coefficients pour la détermination desquels je ne connais aucun moyen direct. Une des causes de ces coefficients est la circonstance

([1]) C'est même par ces moyens de contrôle numérique que j'ai trouvé l'*existence* des courbes η et ζ, et la plupart des coefficients de (1) et (2), avant d'en connaître aucune représentation ou deduction directe. On a ainsi un exemple des services que, dans beaucoup de questions, la Géométrie numérique peut rendre aux autres parties de la Géométrie, notamment à la Géométrie infinitésimale.

que, pour les courbes λ et ν, les situations des sommets ne sont pas indépendantes entre elles ; les coefficients seront égaux aux degrés des équations qui expriment ces dépendances, par rapport aux différentes quantités qui y entrent (ou à des multiples de ces degrés).

J'ai donc eu recours à l'équation (2), mais pour en tirer les valeurs de α il a fallu déterminer antérieurement les caractéristiques des systèmes élémentaires de courbes du quatrième ordre, à un point double libre, placé sur une droite ou en un point donné. Ces recherches demandent d'autres recherches antérieures, de façon que, pour parvenir aux caractéristiques des systèmes élémentaires de courbes générales du quatrième ordre ($n = 4, d = 0$, $e = 0$), il m'a été nécessaire d'étudier successivement les suites des systèmes élémentaires suivants : 1° ($n = 4$, $d = 3$, $e = 0$) ; 2° ($n = 4$, $d = 2$, $e = 0$) ; 3° les systèmes $n = 4$, où il y a un point de contact de deux branches ; 4° et 5° les systèmes ($n = 4$, $d = 2$, $e = 0$), où un des points doubles est fixe ou se trouve sur une droite ; 6°, 7° et 8° les systèmes ($n = 4$, $d = 1$, $e = 0$), point double fixe, sur une droite libre ; et enfin 9° les systèmes ($n = 4$, $d = e = 0$) eux-mêmes. Dans les cas où je ne le dis pas expressément, j'ai pu me passer de considérer séparément les systèmes où la situation des points singuliers est assujettie à des conditions, mais les résultats qui y ont rapport se présentent là d'eux-mêmes.

La série de résultats qu'on obtient ainsi donne le moyen de trouver aussi, sans de nouvelles difficultés, mais non pas sans augmentation de travail, les caractéristiques élémentaires des systèmes de courbes du quatrième ordre qui restent encore.

Le travail, qui a été très-pénible dans ces recherches, augmenterait d'une manière très-considérable si l'on voulait s'occuper de même des courbes d'un ordre plus élevé ; mais quand même on ne se laisserait pas rebuter par ce travail, ou qu'on trouverait des moyens de le réduire, il faudrait encore avoir à sa disposition de nouveaux moyens pour déterminer les coefficients analogues à ceux de λ et ν dont nous avons parlé, car le nombre de ces coefficients augmentera dans une proportion plus forte que celui des équations servant à les déterminer.

Je me permets d'ajouter encore que j'ai essayé par le *Résumé en* *français*, dont les numéros correspondent à ceux du Mémoire, d'expliquer toutes les formules et tous les résultats numériques du Mémoire, et de montrer, du moins, les voies qui y conduisent.

H. Z.

FRISCHAUF (J.), Professor an der Universität Graz. — ABSOLUTE GEOMETRIE, NACH JOHANN BOLYAI. — Leipzig, Verlag von B.-G. Teubner, 1872. — 1 vol. in-8°, XII-96 p.

L'auteur de cet opuscule a eu principalement pour but de faire connaître les travaux qu'ont laissés deux des fondateurs de la Philosophie géométrique moderne, J. Bolyai et W. Bolyai (père du précédent), par une traduction libre, remaniée et simplifiée, de l'Ouvrage capital de J. Bolyai et de quelques parties des OEuvres de son père.

M. Frischauf a rendu ainsi aux lecteurs allemands le service que M. Hoüel rendit, il y a quelques années, aux lecteurs français, par une autre traduction publiée dans les *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, et par quelques extraits insérés dans son *Essai critique* sur les fondements de la Géométrie.

Si, écartant le point de vue historique, on voulait juger les Ouvrages de J. et de W. Bolyai, même remaniés par M. Frischauf, avec les idées actuelles, on ne pourrait s'empêcher de les trouver un peu arriérés.

Une exposition scientifique des principes fondamentaux de la Géométrie, écrite aujourd'hui, différerait probablement de celle des deux géomètres hongrois par les points suivants : on y apporterait plus de rigueur dans l'établissement des principes antérieurs à l'axiome XI d'Euclide ; une fois ces principes admis, on ne recourrait plus aux trois dimensions pour la recherche des lois de la Géométrie plane ; enfin on déduirait d'une même théorie les *trois* systèmes de Géométrie possibles, dont le dernier a été signalé par Riemann, tandis que J. Bolyai n'en trouve que deux.

Mais ce n'est point là une critique adressée, soit aux auteurs des méthodes exposées, soit à leur commentateur. Les premiers ont plus fait par eux-mêmes, pour l'établissement rigoureux des fondements de la Géométrie, qu'ils n'ont laissé à faire à leurs successeurs. Le dernier a écrit un Livre digne d'éloges, que nous considérons surtout comme un hommage rendu à deux mathématiciens de génie, dont le nom doit rester dans l'histoire de la Science.

D. T.