BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

CREMONA

Des transformations rationnelles dans l'espace

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 7 (1874), p. 37-48

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1874__7__37_1>

MÉLANGES.

DES TRANSFORMATIONS RATIONNELLES DANS L'ESPACE.

Travaux de M. CREMONA.

GÉNÉRALITÉS.

1. Supposons quatre variables homogènes et indépendantes x_1, x_2, x_3, x_4, liées à quatre variables analogues ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 par les relations

$$(1) \qquad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 : \varphi_4,$$

où les φ sont des fonctions algébriques, rationnelles, entières et homogènes d'un même degré ν des ξ.

Si l'on considère les x et les ξ comme les coordonnées de deux points correspondants dans deux espaces à trois dimensions, les relations (1) expriment qu'à un point quelconque de l'espace (ξ), pourvu qu'il ne soit pas commun aux quatre surfaces $\varphi = 0$, ne correspond qu'un seul point déterminé de l'espace (x), et qu'aux plans

$$(2) \qquad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$$

---

(1) Voir *Bulletin*, t. IV, p. 65.

de l'espace (x) correspondent les surfaces d'ordre ν

$$(3) \qquad a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3 + a_4\varphi_4 = 0,$$

qui forment un système linéaire triplement infini.

Supposons maintenant que des relations (1) on puisse tirer les valeurs des ξ exprimées rationnellement en fonction des x, c'est-à-dire que les formules inverses des relations (1) soient

$$(4) \qquad \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = f_1 : f_2 : f_3 : f_4,$$

où les f sont des fonctions entières homogènes des x, d'un même degré n.

Cela revient à supposer que le système (3) est tel que trois de ses surfaces prises arbitrairement n'ont qu'un seul point commun, n'appartenant pas à toutes les surfaces du système; d'où il résulte aussi qu'à un point quelconque de l'espace (x), pourvu qu'il ne soit pas commun à toutes les surfaces $f = 0$, correspond un seul point bien déterminé de l'espace (ξ). Des relations (4) on déduit, en outre, qu'aux plans

$$(5) \qquad \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3 + \alpha_4\xi_4 = 0,$$

de l'espace (ξ) correspondent les surfaces d'ordre n

$$(6) \qquad \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 + \alpha_4 f_4 = 0,$$

qui forment un système linéaire triplement infini. En vertu des relations (1), trois quelconques de ces surfaces se coupent en un seul point non commun à toutes les surfaces du système. Les formules (1) et (4) signifient aussi que chacune des surfaces des systèmes (3) et (6) est représentable point par point sur un plan.

2. Pour abréger, nous appellerons *homaloïde* une surface qui jouit de la propriété de pouvoir être représentée, point par point, sur un plan, et *homaloïdal* un système de surfaces algébriques qui satisfait, comme les systèmes (3) et (6), aux deux conditions : 1° d'être linéaire et triplement infini; 2° que trois surfaces, prises arbitrairement dans le système, se coupent en un seul point non commun à tout le système. Les surfaces d'un système homaloïdal sont nécessairement homaloïdes.

Ces dénominations peuvent s'appliquer aux figures planes ou tracées sur une surface homaloïde; ainsi une courbe homaloïde sera une courbe rationnelle, et un réseau homaloïdal de courbes sera un système linéaire doublement infini de courbes rationnelles dont deux quelconques ne se coupent qu'en un seul point non commun à toutes les courbes du réseau.

3. Si l'on donne un système homaloïdal (3) dans un espace (ξ), nous pouvons poser les formules (1), c'est-à-dire établir une correspondance simple entre les surfaces (3) et les plans d'un autre espace (x), et puis en déduire les formules (4). Nous déterminons ainsi, dans l'espace (x), un nouveau système homaloïdal (6), que l'on peut dire *inverse* du système donné. Les deux systèmes homaloïdaux servent de base à deux transformations inverses, toutes les deux rationnelles, qui existent sans présupposer aucune relation entre les variables des deux espaces.

Il suffit donc que l'on donne un système homaloïdal pour que le système inverse et les deux transformations rationnelles inverses, par lesquelles on passe de l'un à l'autre espace et réciproquement, soient déterminés.

En d'autres termes, la recherche des transformations rationnelles dans l'espace (comme dans le plan) est réduite à celle des systèmes homaloïdaux.

4. Nous donnerons le nom de *fondamental* ou *principal* à tout point et à toute ligne qui appartient, en commun, à toutes les surfaces d'un système homaloïdal. Deux surfaces quelconques

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_1\varphi_1+a_2\varphi_2+a_3\varphi_3+a_4\varphi_4=0,\\ a'_1\varphi_1+a'_2\varphi_2+a'_3\varphi_3+a'_4\varphi_4=0 \end{array}\right.$$

du système (3) auront, outre les courbes fondamentales, une courbe Ξ qui doit correspondre, point par point, à la droite d'intersection des plans

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4,\\ a'_1x_1+a'_2x_2+a'_3x_3+a'_4x_4, \end{array}\right.$$

et qui, par suite, est nécessairement une courbe rationnelle. Et comme la droite (8) rencontre en n points une surface quelconque f du système (6), la courbe Ξ, définie par les équations (7), aura

n points communs avec un plan quelconque (5) de l'espace (ξ); donc :

Aux droites de l'espace (x) *correspondent des courbes gauches rationnelles, d'ordre n, dont chacune est déterminée par quatre conditions.*

De même :

Aux droites de l'espace (ξ) *correspond un système quadruplement infini de courbes gauches rationnelles d'ordre ν.*

Nous désignerons par X une quelconque de ces courbes communes à deux surfaces f du système (6).

5. Dans l'espace (x), une droite et un plan ont un seul point commun, si la droite n'est pas entièrement dans le plan; donc ;

Une courbe Ξ rencontre une surface φ du système (3), *sur laquelle elle n'est pas tout entière, en un seul point non commun à toutes les surfaces* φ; ou bien :

Des νn intersections d'une courbe Ξ et d'une surface φ, il y en a $\nu n - 1$ qui sont situées sur les courbes fondamentales ou qui se confondent avec les points fondamentaux du système (3).

Ces $\nu n - 1$ intersections tiennent lieu de $4(n-1)$ conditions linéaires parmi les $4n$ conditions qui déterminent, en général, une courbe rationnelle d'ordre n, puisque, comme nous l'avons vu, les courbes Ξ forment un système quadruplement infini.

Les courbes X jouissent de propriétés analogues : cela est dit une fois pour toutes.

6. Je considère un plan a_0 dans l'espace (x) auquel correspond, dans l'espace (ξ), une surface φ_0 du système (3). Aux droites de a_0 correspondront les courbes Ξ de φ_0, et les sections planes de φ_0 auront pour images sur a_0 les courbes d'ordre n d'un système linéaire triplement infini, et tel que deux courbes quelconques du système ont ν intersections variables (qui correspondent aux points où φ_0 est coupée par une droite quelconque). Par suite, si ces courbes ont m_i points i-ples fixes ($i = 1, 2, 3, \ldots, \xi - 1$), nous aurons les.

deux relations

$$n^2 - \sum_i i^2 m_i = \nu,$$

$$\frac{1}{2} n(n+3) - \sum_i \frac{1}{2} i(i-1) m_i = 3,$$

qui donnent

$$3n + \nu = \sum_i i m_i + 6.$$

Soit I un quelconque des m_i points i-ples dont nous venons de parler; à chacun de ces points correspondra sur φ_0 une courbe rationnelle Γ_i d'ordre i, et à une droite G tracée arbitrairement par I dans a_0 correspondra une autre courbe rationnelle Γ_{n-i} d'ordre $n-i$ qui, prise avec Γ_i, forme une courbe Ξ, et qui a un point commun avec Γ_i (point double pour la courbe Ξ) correspondant au point infiniment voisin de I sur G. Si G tourne autour de I, Γ_{n-i} varie, et le point double parcourt la courbe fixe Γ_i; mais la courbe Ξ, composée de Γ_i et d'une des courbes Γ_{n-i}, peut être considérée comme l'intersection (non complète) de deux surfaces φ; par suite, le point commun aux courbes Γ_i, Γ_{n-i}, étant double pour la courbe Ξ, sera un point de contact entre les deux surfaces φ; donc tout point de Γ_i est un point de contact entre deux surfaces φ (ou bien un point double d'une surface φ); mais le lieu des points de contact entre les surfaces φ, ou des points doubles des surfaces φ est la *jacobienne* du système (3), c'est-à-dire une surface de l'ordre $4(\nu-1)$; donc la courbe Γ_i située sur φ_0, qui correspond au point I de a_0, se trouve aussi sur la jacobienne des surfaces φ.

Comme les surfaces f de (x) correspondent aux plans de (ξ), les courbes d'ordre n du système linéaire, dont nous venons de nous occuper, ne sont autre chose que les traces des surfaces f sur le plan a_0, et les m_i points i-ples (parmi lesquels se trouve I) seront les intersections de ce plan avec une courbe C_{m_i} d'ordre m_i, i-ple pour toutes les surfaces f. Réciproquement, si une courbe Ξ se décompose, son image, qui est une droite, doit passer par un point I. Donc :

A tout point d'une courbe fondamentale i-ple pour toutes les surfaces f de l'espace (x) correspond une courbe rationnelle *d'ordre i, dont le lieu géométrique est une surface qui fait partie de la jacobienne des surfaces φ.*

L'ordre de ce lieu sera égal au nombre des intersections (non fixes) d'une courbe quelconque X avec la courbe fondamentale i-ple de l'espace (x). Son *genre* sera aussi égal au genre de la courbe fondamentale correspondante.

7. S'il existe une courbe fondamentale parmi celles de l'espace (x) qui ne soit rencontrée par les courbes X en aucun point non fixe, la surface qui lui correspondra sera d'ordre zéro, c'est-à-dire qu'à un point quelconque de cette courbe correspondra une *courbe fixe*, qui doit se trouver sur chacune des surfaces φ, et qui est, par conséquent, une courbe fondamentale de l'espace (ξ). Si la première courbe est i-ple pour les surfaces f et d'ordre i', la seconde courbe sera de l'ordre i et multiple suivant i' pour les surfaces φ. La relation entre les deux courbes est *réciproque;* en d'autres termes, à chaque point de la seconde courbe correspond toute la première courbe, et la seconde courbe n'est coupée en aucun point par une courbe Ξ quelconque.

8. Une droite rencontre la jacobienne des f en $4(n-1)$ points; donc une courbe Ξ quelconque coupe en $4(n-1)$ points l'ensemble des courbes fondamentales et des points fondamentaux de l'espace (ξ); mais $4(n-1)$ est précisément le nombre des conditions linéaires communes aux courbes Ξ, puisqu'elles forment un système quadruplement infini; donc la condition de rencontrer les courbes fondamentales et les points fondamentaux de l'espace (ξ) en $4(n-1)$ points détermine complétement les courbes Ξ.

Quand une courbe Ξ se décompose en deux courbes Γ_i, Γ_{n-i}, la première appartient à une série simplement infinie qui fait partie de la jacobienne des φ; la seconde, au contraire, correspondant à une droite qui passe par un point I [d'une courbe fondamentale i-ple dans (x)], appartient à un système doublement infini : elle est assujettie à $4(n-1)-2$ conditions. L'une de ces conditions est de rencontrer Γ_i en un point; donc Γ_{n-i} rencontrera les courbes fondamentales et les points fondamentaux de l'espace (ξ) en $4(n-1)-3$ points. Ces points correspondront à ceux où la droite correspondant à Γ_{n-i} coupe la jacobienne des f en dehors de I; donc, si nous nommons k_i le degré de multiplicité de la courbe fondamentale i-ple de l'espace (x) pour la jacobienne des f, nous aurons

$$4(n-i)-3=4(n-1)-k_i,$$

d'où

$$k_i=4i-1,$$

ou bien :

Une courbe fondamentale de l'espace (x), i-ple pour les f et coupée par les courbes X, est multiple suivant $4i-1$ pour la jacobienne des f.

La courbe Γ_i, appartenant à une série simplement infinie, est assujettie à $4i-1$ conditions linéaires, c'est-à-dire coupe en $4i-1$ points les courbes fondamentales de l'espace (ξ); I est un point $(4i-1)$-ple pour la jacobienne des f, ce qui concorde avec la conclusion ci-dessus.

9. Si la courbe fondamentale i-ple pour les f est telle que les courbes X ne la coupent pas, auquel cas une courbe fixe Γ_i fondamentale dans l'espace (ξ) correspond à chacun de ses points (n° 7), les courbes Γ_{n-i} qui, avec Γ_i, composent une courbe Ξ, appartiennent à un système triplement infini; car elles correspondent aux droites qui coupent la courbe i-ple pour les f en un point non donné; elles sont donc assujetties à $4(n-i)-3$ conditions. Une de ces conditions consiste en ce qu'elles doivent couper Γ_i; les autres $4(n-i)-4$ conditions consistent en autant de rencontres avec les courbes fondamentales et les points fondamentaux de l'espace (ξ). Nous aurons donc, dans ce cas,

$$4(n-i)-4=4(n-1)-k_i,$$

ou $k_i=4i$, ce qui revient à dire que

Une courbe fondamentale de l'espace (x), i-ple pour les f, qui n'est pas coupée par les courbes X en des points non fixes, est multiple suivant $4i$ pour la jacobienne des f.

Si la courbe en question est de l'ordre i', une courbe d'ordre i lui correspond dans l'espace (ξ), et elle est i'-ple pour les φ et $4i'$-ple pour la jacobienne des φ.

10. Si deux courbes fondamentales de l'espace (x), multiples pour la surface f, l'une suivant i, l'autre suivant j $(j \geqq i)$, ont un point commun, à ce point correspondra une courbe qui se décompose en deux courbes Γ_i, Γ_{j-i}, dont la première sera commune aux deux surfaces qui font partie de la jacobienne des surfaces φ et correspondent à ces deux courbes fondamentales de l'espace (x). Comme cas particulier, si une courbe fondamentale de l'espace (x), i-ple pour les f, a un point double, à ce point correspondra une courbe Γ_i double pour la surface correspondant à cette courbe fondamentale.

11. Nous avons déjà vu qu'à un point I d'une courbe fondamentale de l'espace (x), i-ple pour toutes les surfaces f, correspond une courbe rationnelle Γ_i, d'ordre i. Si Γ_i est tout entière dans un plan, à ce plan correspondra une surface f pour laquelle I est un point $(i+1)$-ple. En effet, à une droite tirée arbitrairement par I correspondra une courbe Γ_{n-i} d'ordre $n-i$, qui a un point commun avec Γ_i et, par suite, coupe le plan de cette courbe en $n-i-1$ autres points. Donc la droite arbitraire menée par I coupe la surface f correspondant au plan de Γ_i en $n-i-1$ autres points; cela veut dire que pour cette surface f le point I est multiple suivant $n-(n-i-1)=i+1$.

Si $i=1$, aux plans passant par une droite Γ_1 correspondent des surfaces f pour lesquelles I est un point double. Si deux droites analogues à Γ_1 sont dans un même plan, à ce plan correspondra une surface f donnée de deux points doubles, etc.

12. On démontre de la même manière que, si les f ont une courbe fondamentale i-ple et d'ordre i' à chacun des points de laquelle corresponde une courbe fixe plane (i'-ple pour les φ et d'ordre i), au plan de cette courbe correspondra une surface f, pour laquelle la première courbe sera multiple suivant $i+1$.

13. Si les surfaces φ ont un point fondamental commun Ω par lequel passent ρ branches de chacune des courbes Ξ, toute droite de l'espace (x) renfermera ρ points correspondant à Ω, c'est-à-dire qu'une *surface d'ordre ρ correspondra à Ω*; ou encore, la surface f qui correspond à un plan quelconque passant par Ω se dé-

compose en deux surfaces, l'une fixe et d'ordre ρ, l'autre variable et formant un réseau d'ordre $n - \rho$, projectif au réseau des plans passant par Ω. Si le point Ω absorbe ρ' conditions pour la courbe Ξ, cette surface d'ordre ρ tiendra lieu d'une surface d'ordre ρ' dans la jacobienne des f; c'est-à-dire que ρ' sera un multiple de ρ, et *la surface d'ordre ρ correspondant à Ω devra être comptée $\rho' : \rho$ fois dans la jacobienne des f.*

14. Par exemple, si Ω est un point (simple ou) multiple suivant un nombre λ pour les φ, et si ces surfaces n'ont pas en ce point (un plan tangent ou) un cône osculateur fixe, les ρ tangentes d'une courbe quelconque Ξ ne sont assujetties à aucune condition; dans ce cas, on a $\rho' = 2\rho$; par suite, la surface d'ordre ρ correspondant à Ω doit être comptée deux fois dans la jacobienne des f. A une section plane de la surface d'ordre ρ correspond la série des points infiniment voisins de Ω d'une surface φ; cette série est projetée du point Ω par un cône d'ordre λ. Donc la surface d'ordre ρ correspondant à Ω est homaloïde, et les images de ses sections planes sont des courbes d'ordre λ.

15. Second exemple : Si Ω est un point simple pour les surfaces φ, et si ces surfaces ont entre elles, en ce point, un contact d'ordre $\rho - 1$, on aura $\rho' = (\rho + 1)\rho$; cela revient à dire que la surface d'ordre ρ correspondant à Ω sera comprise $\rho + 1$ fois dans la jacobienne des f.

16. Soit Ω un point λ-ple pour les φ et ρ-ple pour les Ξ. Comme toute surface f correspondant à un plan passant par Ω se décompose en un lieu fixe d'ordre ρ et en une surface d'ordre $n-\rho$, à toute droite issue de Ω correspondra une courbe X' commune à une infinité de surfaces d'ordre $n - \rho$ et formant un faisceau. Les courbes X' sont de l'ordre $\rho - \lambda$, car c'est là le nombre des intersections autre que Ω d'une droite issue de ce point avec une surface φ; elles forment un système doublement infini, parce qu'elles correspondent aux droites qui passent par un point fixe. Une courbe X' est donc assujettie à $4(\rho - \lambda) - 2$ conditions, car elle doit rencontrer en $4(\rho - \lambda) - 2$ points l'ensemble des courbes fondamentales et des points fondamentaux de l'espace (x). A ces points

correspondront ceux où une droite quelconque menée par Ω coupe la jacobienne des φ en dehors de Ω. Si donc nous indiquons par π l'ordre de multiplicité du point Ω pour la jacobienne, nous aurons

$$4(\rho-\lambda)-2=4(\rho-1)-\pi,$$

d'où

$$\pi=4\lambda-2;$$

donc :

Un point fondamental de l'espace (ξ), λ*-ple pour toutes les surfaces* φ, *est* $(4\lambda-2)$*-ple pour la jacobienne des surfaces* φ.

17. Il résulte de ce qui précède que, s'il y a dans l'espace (x) une courbe fondamentale C_r d'ordre r et i-ple pour les surfaces f, il lui correspond une surface qui fait partie de la jacobienne des surfaces φ, et qui coupe toute surface φ suivant une des courbes fondamentales de l'espace (ξ) et suivant r courbes d'ordre i, qui correspondent aux points où C_r coupe un plan quelconque du premier espace. Réciproquement, la partie de la jacobienne des φ qui correspond (n° 13) à un point fondamental O de l'espace (x) n'aura aucune ligne commune avec une surface φ quelconque, à l'exception des courbes fondamentales de l'espace (ξ); car un plan quelconque de l'espace (x) ne passe pas par O.

18. Une transformation rationnelle n'est complétement déterminée que si l'on connaît pour chacun des deux espaces l'ensemble des courbes et des points fondamentaux, le système des surfaces homaloïdes φ ou f, et les différentes parties de la jacobienne correspondante. La transformation est définie quand on connaît le système homaloïdal et l'ensemble des lignes et des points fondamentaux; les autres éléments peuvent se déterminer au moyen des théorèmes que nous venons d'exposer.

Je vais faire voir maintenant comment on peut obtenir tous les systèmes homaloïdaux dont une surface donnée fait partie.

19. Soit φ_1 une surface homaloïde de degré r dont on connaît une représentation (point par point) sur un plan Π. Toutes les autres surfaces homaloïdes de degré r, ayant les mêmes points multiples et les mêmes lignes multiples que φ_1, couperont, en outre, cette surface suivant des lignes dont les images sur Π formeront un certain système Σ. Prenons sur Π un réseau homaloïdal de courbes K, de manière que chacune de ces lignes, prise avec un lieu fixe Λ (un ensemble de lignes, que l'on peut même compter plusieurs fois), forme une courbe du système Σ. Une courbe K_1 formant avec Λ l'image de l'intersection de φ_4 avec une autre surface analogue φ_1, détermine un faisceau $\varphi_4 + \alpha_1\varphi_1$; de même, si K_2, K_3 sont deux autres courbes du réseau qui n'appartiennent pas au même faisceau que K_1, les deux faisceaux $\varphi_4 + \alpha_2\varphi_2$, $\varphi_4 + \alpha_3\varphi_3$ seront déterminés; et, comme les trois faisceaux ainsi obtenus ont une surface commune φ_4, ils déterminent un système linéaire triplement infini

$$\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \alpha_3\varphi_3 + \alpha_4\varphi_4 = 0,$$

qui est évidemment homaloïdal et peut, par suite, servir de base à une transformation rationnelle d'ordre ν (n° 3). Le degré des surfaces f, ou le degré de la transformation inverse, n'est autre chose que l'ordre des courbes de φ_4 dont les courbes K sont les images. Outre les points et les courbes multiples des surfaces φ, les lignes de φ_4 qui ont pour images sur Π le lieu Λ sont aussi *fondamentales*, c'est-à-dire communes à toutes les surfaces φ.

En faisant varier le lieu Λ et le réseau des courbes K de toutes les manières possibles, on obtiendra toutes les transformations dans lesquelles on peut employer la surface donnée φ_4.

20. Les courbes K sont les images sur Π des courbes Ξ (n° 4) qui se trouvent sur φ_4. Si une courbe Ξ se décompose, une des courbes partielles est commune à la jacobienne des φ (n° 6); mais, dans ce cas, ou bien la courbe K correspondante se décompose aussi, ou bien cette courbe a une branche de plus qui passe par un des points fondamentaux de l'image Π. Dans la première hypothèse, une des lignes composantes fait partie de la jacobienne du réseau des K; dans l'autre hypothèse, le point fondamental en question sera précisément l'image de cette partie de Ξ qui est commune à φ_4 et à la jacobienne des φ. Donc *les points fondamentaux de la représentation* Π *et les courbes qui forment la jacobienne des* K *constituent ensemble les images des courbes non fondamentales qui sont communes à* φ_4 *et à la jacobienne des* φ, *c'est-à-dire des courbes qui correspondent aux intersections des lignes fondamentales de l'espace* (x) *avec le plan correspondant à* φ_4.

Par suite, si aux points fondamentaux de Π et aux parties de la jacobienne des K correspondent, sur φ_4, λ_1 droites, λ_2 coniques,... λ_ρ courbes rationnelles d'ordre ρ,..., les surfaces f auront, en commun, une courbe simple d'ordre λ_1, une courbe double d'ordre λ_2,... une courbe ρ-ple d'ordre λ_ρ.... Le genre de ces courbes, leurs intersections, la décomposition de quelques-unes d'entre elles se manifesteront par des choix analogues dans les divers lieux géométriques qui composent la jacobienne des φ; et ces lieux se détermineront en examinant les conditions auxquelles sont assujetties les droites, les coniques,..., les courbes rationnelles d'ordre ρ,..., qui correspondent aux points fondamentaux de Π et aux lignes de la jacobienne des K.

Mais un exemple sera plus utile pour l'exposition de la méthode que toute autre considération. J'emploierai le symbole (ν, n) pour exprimer deux transformations inverses pour lesquelles les φ et les f sont respectivement de l'ordre ν, n (¹).

(*A suivre.*)

(¹) Les résultats des travaux de M. Cremona sur les transformations rationnelles dans l'espace ont été exposés devant l'Institut Royal Lombard dans les séances du 4 mars et du 1er juin 1871; une partie de ces résultats a éte communiquée aussi à la Société des Sciences de Göttingue (*Nachrichten*, 1871, n° 5, et *Mathematische Annalen*, t. IV, p. 213). Le Mémoire de M. Noether : *Ueber die eindeutigen Raumtransformationen*, a eté publié à la même epoque (*Mathem. Annalen*, t. III, p. 547).

4 mai 1874.

Ed. DEWULF,
Chef de bataillon du Génie.