BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

A.-L. CAUCHY

Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 7 (1874), p. 265-304
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1874__7__265_0>

MÉLANGES.

MÉMOIRE SUR LES INTÉGRALES DÉFINIES, PRISES ENTRE DES LIMITES IMAGINAIRES (1);

PAR M. A.-L. CAUCHY.

1. Dans un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences le 28 octobre 1822, ainsi que dans le 19e Cahier du *Journal de l'École royale Polytechnique*, et dans le résumé des Leçons données à cette École, j'ai fait voir comment on pouvait parvenir à fixer, dans tous les cas possibles, le sens que l'on doit attacher à la notation

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx,$$

destinée à représenter une intégrale définie, prise entre des limites réelles x_0, X, quelle que fût d'ailleurs la fonction, réelle ou imaginaire, désignée par $f(x)$. J'ai prouvé qu'une intégrale de cette espèce, lorsque la fonction $f(x)$ devient infinie entre les limites de l'intégration, est en général indéterminée, en sorte qu'elle admet une infinité de valeurs, parmi lesquelles il en existe une qui mérite une attention particulière, et que j'ai nommée *valeur principale*. Enfin j'ai montré que la considération des valeurs principales des intégrales indéterminées, jointe à la théorie des *intégrales singulières* que j'avais exposée pour la première fois dans un Mémoire de 1814, suffisait pour établir une multitude de formules générales, à l'aide desquelles on pouvait évaluer ou du moins transformer les intégrales définies. Je me propose aujourd'hui d'appliquer les principes qui m'ont guidé dans ces recherches aux intégrales prises entre des limites imaginaires. On sait que l'emploi de ces dernières intégrales a conduit M. Laplace à des résultats dignes de remarque. Dans ces derniers temps, M. Brisson nous a dit s'être servi avec

(1) Nous croyons être agréable à nos lecteurs en réimprimant ici ce Mémoire devenu si rare, et qui compte parmi les plus beaux de Cauchy. Si cette publication est bien accueillie, nous donnerons aussi le Mémoire *Sur les rapports qui existent entre le Calcul des résidus et le Calcul des limites,* qui a été tiré *en français* à un très-petit nombre d'exemplaires.

succès de ces mêmes intégrales et de leur transformation en intégrales définies ordinaires, pour développer des fonctions données en séries composées de termes proportionnels à des exponentielles dont les exposants suivent des lois connues. Enfin un jeune Russe, doué de beaucoup de sagacité et très-versé dans l'Analyse infinitésimale, M. Ostrogradsky, ayant aussi recours à l'emploi de ces intégrales et à leur transformation en intégrales ordinaires, a donné une démonstration nouvelle des formules que j'ai précédemment rappelées, et généralisé d'autres formules que j'avais présentées dans le 19e Cahier du *Journal de l'École royale Polytechnique*. M. Ostrogradsky a bien voulu nous faire part des résultats principaux de son travail. Mais ni ce travail, ni aucun des Mémoires publiés jusqu'à ce jour, sur les diverses branches du Calcul intégral, n'ont fixé le degré de généralité que comporte une intégrale définie, prise entre des limites imaginaires, et le nombre des valeurs qu'elle peut admettre. Telle est la question qui va faire l'objet de nos recherches. On verra que sa solution dépend du calcul des variations et de la théorie des intégrales singulières, et qu'elle fournit immédiatement un grand nombre de formules propres soit à l'évaluation, soit à la transformation des intégrales définies. Ces formules comprennent, comme cas particuliers, celles que j'ai déjà mentionnées, et celles que quelques géomètres ont obtenues depuis peu par d'autres voies.

2. Pour fixer généralement le sens de la notation

$$(1)\qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx,$$

x_0, X désignant des limites réelles, et $f(x)$ une fonction réelle ou imaginaire de la variable x, il suffit de considérer l'intégrale définie représentée par cette notation comme équivalente à la limite ou à l'une des limites vers lesquelles converge la somme

$$(2)\qquad (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \ldots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1}),$$

lorsque les éléments de la différence $X - x_0$ savoir,

$$(3)\qquad x_1 - x_0,\quad x_2 - x_1, \ldots,\quad X - x_{n-1},$$

étant des quantités affectées du même signe que cette différence, reçoivent des valeurs numériques de plus en plus petites. Donc, pour embrasser dans la même définition les intégrales prises entre des limites réelles et les intégrales prises entre des limites imaginaires, il convient de représenter par la notation

$$(4) \qquad \int_{x_0+y_0\sqrt{-1}}^{X+Y\sqrt{-1}} f(z)dz$$

la limite ou l'une des limites vers lesquelles converge la somme des produits de la forme

$$(5) \qquad \begin{cases} [(x_1-x_0)+(y_1-y_0)\sqrt{-1}]f(x_0+y_0\sqrt{-1}), \\ [(x_2-x_1)+(y_2-y_1)\sqrt{-1}]f(x_1+y_1\sqrt{-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ [(X-x_{n-1})+(Y-y_{n-1})\sqrt{-1}]f(x_{n-1}+y_{n-1}\sqrt{-1}), \end{cases}$$

lorsque, chacune des deux suites

$$(6) \qquad \begin{cases} x_0, & x_1, & x_2, \ldots, & x_{n-1}, & X, \\ y_0, & y_1, & y_2, \ldots, & y_{n-1}, & Y \end{cases}$$

étant composée de termes qui aillent toujours en croissant ou en décroissant depuis le premier jusqu'au dernier, ces mêmes termes se rapprochent indéfiniment les uns des autres, et que leur nombre croît de plus en plus. Pour obtenir deux suites de cette espèce, il suffit de supposer

$$(7) \qquad x = \varphi(t), \quad y = \chi(t),$$

$\varphi(t)$, $\chi(t)$ étant deux fonctions continues d'une nouvelle variable t, toujours croissantes ou décroissantes depuis $t = t_0$, jusqu'à $t = T$, et assujetties à vérifier les conditions

$$(8) \qquad \begin{cases} \varphi(t_0) = x_0, & \chi(t_0) = y_0, \\ \varphi(T) = X, & \chi(T) = Y; \end{cases}$$

puis de représenter par

$$\begin{matrix} x_0, & x_1, & x_2, \ldots, & x_{n-1}, & X, \\ y_0, & y_1, & y_2, \ldots, & y_{n-1}, & Y \end{matrix}$$

les valeurs de x et de y correspondant à des valeurs de t, qui composent une série croissante ou décroissante et de la forme

$$(9)\qquad t_0,\ t_1,\ t_2, \ldots,\ t_{n-1},\ \mathrm{T}.$$

Admettons cette hypothèse, et désignons par $A + B\sqrt{-1}$ la valeur correspondante de l'intégrale (4) : on aura, à très-peu près,

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{ll} x_1 - x_0 = (t_1 - t_0)\varphi'(t_0), & y_1 - y_0 = (t_1 - t_0)\chi'(t_0), \\ x_2 - x_1 = (t_2 - t_1)\varphi'(t_1), & y_2 - y_1 = (t_2 - t_1)\chi'(t_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{X} - x_{n-1} = (\mathrm{T} - t_{n-1})\varphi'(t_{n-1}), & \mathrm{Y} - y_{n-1} = (\mathrm{T} - t_{n-1})\chi'(t_{n-1}), \end{array}\right.$$

et par conséquent l'expression imaginaire $A + B\sqrt{-1}$ sera sensiblement égale, en vertu des principes ci-dessus établis, à la somme des produits

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l} (t_1 - t_0)[\varphi'(t_0) + \sqrt{-1}\chi'(t_0)]f[\varphi(t_0) + \sqrt{-1}\chi(t_0)], \\ (t_2 - t_1)[\varphi'(t_1) + \sqrt{-1}\chi'(t_1)]f[\varphi(t_1) + \sqrt{-1}\chi(t_1)], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\mathrm{T} - t_{n-1})[\varphi'(t_{n-1}) + \sqrt{-1}\chi'(t_{n-1})]f[\varphi(t_{n-1}) + \sqrt{-1}\chi(t_{n-1})], \end{array}\right.$$

ou, ce qui revient au même, à l'intégrale définie

$$\int_{t_0}^{\mathrm{T}} [\varphi'(t) + \sqrt{-1}\chi'(t)]\, f[\varphi(t) + \sqrt{-1}\chi(t)]\, dt.$$

On aura donc

$$(12)\quad A + B\sqrt{-1} = \int_{t_0}^{\mathrm{T}} [\varphi'(t) + \sqrt{-1}\chi'(t)]\, f[\varphi(t) + \sqrt{-1}\chi(t)]\, dt;$$

et si l'on fait, pour abréger,

$$(13)\qquad \varphi'(t) = x', \quad \chi'(t) = y',$$

on trouvera simplement

$$(14)\quad A + B\sqrt{-1} = \int_{t_0}^{\mathrm{T}} (x' + y'\sqrt{-1})\, f(x + y\sqrt{-1})\, dt.$$

3. Concevons maintenant que la fonction $f(x + y\sqrt{-1})$ reste finie et continue, toutes les fois que x reste compris entre les

limites x_0, X, et y entre les limites y_0, Y. Dans ce cas particulier, on prouvera facilement que *la valeur de l'intégrale* (4), c'est-à-dire l'expression imaginaire $A + B\sqrt{-1}$, *est indépendante de la nature des fonctions*

$$x = \varphi(t), \quad y = \chi(t).$$

En effet, si l'on attribue à ces fonctions des accroissements infiniment petits et de la forme

$$\varepsilon u, \quad \varepsilon v, \tag{15}$$

ε désignant un nombre que l'on supposera infiniment petit du premier ordre, et u, v deux fonctions nouvelles de la variable t, qui devront s'évanouir pour les deux limites $t = t_0$, $t = T$, l'intégrale (12) ou (14) recevra un accroissement correspondant que l'on pourra développer suivant les puissances ascendantes de ε, de manière à obtenir une série dans laquelle le terme infiniment petit du premier ordre sera le produit de ε par l'intégrale

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{t_0}^{T} &[(u + v\sqrt{-1})(x' + y'\sqrt{-1})f'(x + y\sqrt{-1}) \\ &+ (u' + v'\sqrt{-1})f(x - y\sqrt{-1})]\,dt. \end{aligned} \right. \tag{16}$$

Or, comme on trouvera , en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{T} (u' + v'\sqrt{-1})f(x + y\sqrt{-1})\,dt \\ &\quad = -\int_{t_0}^{T} (u + v\sqrt{-1})(x' + y'\sqrt{-1})f(x + y\sqrt{-1})\,dt, \end{aligned}$$

il est clair que l'intégrale (16) se réduira d'elle-même à zéro, et l'accroissement de $A + B\sqrt{-1}$ à un infiniment petit du second ordre, ou d'un ordre plus élevé. Il est aisé d'en conclure que, si chacune des fonctions x, y, reçoit successivement des accroissements infiniment petits du premier ordre dont la somme présente un accroissement fini, l'accroissement correspondant de $A + B\sqrt{-1}$ sera infiniment petit du premier ordre, c'est-à-dire nul. On peut remarquer d'ailleurs que l'intégrale (16) n'est autre chose que la variation totale de l'intégrale (14) par rapport aux variables x, y, considérées comme des fonctions inconnues de t. Si, en adoptant les notations de Lagrange, on posait

$$(17) \qquad u = \delta x, \quad v = \delta y,$$

l'intégrale (16) se présenterait sous la forme

$$(18) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_{t_0}^{\mathrm{T}} [(x' + y'\sqrt{-1})\,\delta f(x + y\sqrt{-1}) \\ &\qquad + f(x + y\sqrt{-1})\,\delta(x' + y'\sqrt{-1})]\,dt \\ &= \delta \int_{t_0}^{\mathrm{T}} (x' + y'\sqrt{-1}) f(x + y\sqrt{-1})\,dt. \end{aligned} \right.$$

Ainsi la démonstration du principe ci-dessus énoncé repose sur cette seule observation que la variation de l'intégrale (14) est nulle, ce qu'on pouvait prévoir, d'après les principes du calcul des variations, attendu que la fonction sous le signe $\int$ se réduit, dans cette intégrale, à une différentielle exacte.

4. Supposons maintenant que la fonction $f(x + y\sqrt{-1})$ devienne infinie pour le système des valeurs

$$x = a, \quad y = b,$$

correspondant à la valeur

$$t = \tau$$

de la variable t; $z = a + b\sqrt{-1}$ sera une racine de l'équation

$$(19) \qquad \frac{1}{f(z)} = 0.$$

Désignons d'ailleurs par f la limite vers laquelle converge le produit

$$[x - a + (y - b)\sqrt{-1}]\, f(x + y\sqrt{-1}),$$

tandis que que x converge vers la limite a, et y vers la limite b; et soit toujours ε un nombre infiniment petit : on aura, sans erreur sensible,

$$(20) \qquad \mathrm{f} = \varepsilon f(a + b\sqrt{-1} + \varepsilon).$$

Si, de plus, on nomme $A'+B'\sqrt{-1}$ ce que devient $A+B\sqrt{-1}$ quand les variables x, y reçoivent les accroissements infiniment petits εu, εv, on aura encore

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} & A'+B'\sqrt{-1}-(A+B\sqrt{-1}) \\ & \quad =\int_{t_0}^{T}\left[x'+\varepsilon u'+(y'+\varepsilon v')\sqrt{-1}\right]f\left[x+\varepsilon u+(y+\varepsilon v)\sqrt{-1}\right]dt \\ & \quad -\int_{t_0}^{T}(x'+y'\sqrt{-1})f(x+y\sqrt{-1})\,dt. \end{aligned}\right.$$

Or la différence entre les intégrales comprises dans le second membre de l'équation (21) sera toujours sensiblement nulle, excepté lorsque x différera très-peu de a, et y de b, c'est-à-dire lorsque t différera très-peu de τ. On pourra donc, sans altérer cette différence, substituer aux limites des deux intégrales d'autres limites très-rapprochées de τ, et remplacer, en conséquence, les intégrales dont il s'agit par des intégrales définies singulières. Cela posé, faisons

$$(22)\qquad t=\tau+\varepsilon w.$$

Désignons par

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,$$

les valeurs de

$$x',\ y',\ u,\ v,$$

correspondant à $t=\tau$. Enfin soient λ, μ deux quantités réelles déterminées par l'équation

$$(23)\qquad \lambda+\mu\sqrt{-1}=\frac{\gamma+\delta\sqrt{-1}}{\alpha+\beta\sqrt{-1}},$$

de laquelle on tire

$$(24)\qquad \mu=\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\alpha^2+\beta^2}.$$

On aura sensiblement, pour des valeurs très-petites de εw,

$$(x'+y'\sqrt{-1})f(x+y\sqrt{-1})=\mathrm{f}\,\frac{x'-y'\sqrt{-1}}{x+a+(y-b)\sqrt{-1}}=\frac{\mathrm{f}}{\varepsilon}\,\frac{1}{w},$$

$$\begin{aligned} & \left[x'+\varepsilon u'+(y'+\varepsilon v')\sqrt{-1}\right]f\left[x+\varepsilon u+(y+\varepsilon v)\sqrt{-1}\right] \\ & \qquad =\frac{\mathrm{f}}{\varepsilon}\,\frac{1}{w+\lambda+\mu\sqrt{-1}}; \end{aligned}$$

et comme, pour renfermer la variable t entre des limites peu différentes de τ, il suffit de renfermer ϖ entre les limites

$$\varpi = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \varpi = +\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}},$$

on tirera de l'équation (21)

$$(25)\quad \begin{cases} A' + B'\sqrt{-1} - (A + B\sqrt{-1}) \\ \quad = \mathfrak{f}\displaystyle\int_{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} \frac{d\varpi}{\varpi + \lambda + \mu\sqrt{-1}} - \mathfrak{f}\int_{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} \frac{d\varpi}{\varpi}. \end{cases}$$

On doit observer que l'intégrale

$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} \frac{d\varpi}{\varpi},$$

dans laquelle la fonction sous le signe $\int$ devient infinie pour $\varpi = 0$, est indéterminée; mais, si l'on réduit cette intégrale à sa valeur principale, c'est-à-dire à zéro, et si l'on pose en outre $\varepsilon = 0$, on trouvera

$$A' + B'\sqrt{-1} - (A + B\sqrt{-1}) = -\mathfrak{f}\sqrt{-1}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu\, d\varpi}{(\varpi + \lambda)^2 + \mu^2},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(26)\qquad A' + B'\sqrt{-1} - (A + B\sqrt{-1}) = \mp \pi\mathfrak{f}\sqrt{-1}.$$

Dans cette dernière formule, le signe supérieur ou inférieur devra être préféré, suivant que la quantité μ et la différence

$$\alpha\delta - 6\gamma$$

seront des quantités positives ou négatives, c'est-à-dire, en d'autres termes, suivant que l'expression

$$(27)\qquad x'v - y'u = x'\delta y - y'\delta x$$

obtiendra une valeur positive ou négative, en vertu de la supposition particulière $t=\tau$. Donc, si les accroissements des fonctions x, y, savoir, εu, εv, viennent à changer de signe, le second membre de l'équation (26) en changera lui-même; et si l'on nomme

$$A''+B''\sqrt{-1}$$

l'expression imaginaire qui remplacera dans cette hypothèse

$$A'+B'\sqrt{-1},$$

on aura

$$A''+B''\sqrt{-1}-(A+B\sqrt{-1})=\pm\pi f\sqrt{-1}. \tag{28}$$

Ajoutons que, dans les formules (26) et (28), $A+B\sqrt{-1}$ désigne non pas la valeur générale de l'intégrale (14), qui, en vertu de l'hypothèse admise, est indéterminée, mais sa valeur principale. (*Voir* le *Résumé des Leçons données à l'École royale Polytechnique*.)

Si l'on combine l'équation (28) avec l'équation (26), on obtiendra la suivante :

$$A''+B''\sqrt{-1}-(A'+B'\sqrt{-1})=\pm 2\pi f\sqrt{-1}, \tag{29}$$

dans laquelle $A'+B'\sqrt{-1}$, $A''+B''\sqrt{-1}$ représentent deux intégrales complétement déterminées.

5. La formule (26), que nous avons déduite de la considération des intégrales singulières, peut encore être établie par une autre méthode que nous allons indiquer. Supposons

$$f(z)=\frac{f}{z-a-b\sqrt{-1}}+\varpi(z), \tag{30}$$

et concevons de plus que la fonction

$$\varpi(z)=\frac{(z-a-b\sqrt{-1})f(z)-f}{z-a-b\sqrt{-1}}, \tag{31}$$

représentée par une fraction dont les deux termes s'évanouissent en vertu de l'hypothèse $z=a+b\sqrt{-1}$, ne devienne point alors infinie : on tirera des équations (21) et (30)

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} & A'+B'\sqrt{-1}-(A+B\sqrt{-1}) \\ & = f\int_{t_0}^{T}\left[\frac{x'+\varepsilon u'+(y'+\varepsilon v')\sqrt{-1}}{x-a+\varepsilon u+(y-b+\varepsilon v)\sqrt{-1}}\right. \\ & \qquad\qquad \left.-\frac{x'+y'\sqrt{-1}}{x-a+(y-b)\sqrt{-1}}\right]dt \\ & + \int_{t_0}^{T}\Big\{[x'+\varepsilon u'+(y'+\varepsilon v')\sqrt{-1}] \\ & \qquad \times\varpi[x+\varepsilon u+(y+\varepsilon v)\sqrt{-1}] \\ & \qquad -(x'+y'\sqrt{-1})\varpi(x+y\sqrt{-1})\Big\}dt. \end{aligned}\right.$$

Or, la fonction $\varpi(z)$ conservant une valeur finie, lors même qu'on suppose $z=a+b\sqrt{-1}$, les deux intégrales

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} & \int_{t_0}^{T}[x'+\varepsilon u'+(y'+\varepsilon v')\sqrt{-1}]\varpi[x+\varepsilon u+(y+\varepsilon v)\sqrt{-1}]dt, \\ & \int_{t_0}^{T}(x'+y'\sqrt{-1})\varpi(x+y\sqrt{-1})\,dt \end{aligned}\right.$$

seront équivalentes entre elles, puisqu'elles représenteront la valeur unique de l'intégrale

$$\int_{x_0+y_0\sqrt{-1}}^{X+Y\sqrt{-1}}\varpi(z)\,dz.$$

D'autre part, il est facile de s'assurer que l'intégrale

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} & \int\left[\frac{x'+\varepsilon u'+(y'+\varepsilon v')\sqrt{-1}}{x-a+\varepsilon u+(y-b+\varepsilon v)\sqrt{-1}}-\frac{x'+y'\sqrt{-1}}{x-a+(y-b)\sqrt{-1}}\right]dt \\ & = \frac{1}{2}l[(x-a+\varepsilon u)^2+(y-b+\varepsilon v)^2]-\frac{1}{2}l[(x-a)^2+(y-b)^2] \\ & + \left(\operatorname{arctang}\frac{y-b+\varepsilon v}{x-a+\varepsilon u}-\operatorname{arctang}\frac{y-b}{x-a}\right)\sqrt{-1}+\text{const.}, \end{aligned}\right.$$

étant prise entre les limites $t=t_0$, $t=T$, et réduite à sa valeur principale, sera équivalente au produit

$$\mp\pi\sqrt{-1}.$$

En effet, puisque les fonctions u et v s'évanouissent à ces deux limites, la partie réelle de l'intégrale (54), savoir

$$\frac{1}{2} l \left[\frac{(x-a+\varepsilon u)^2 + (y-b+\varepsilon v)^2}{(x-a)^2+(y-b)^2} \right],$$

se réduira, pour l'une et l'autre limite, à $\frac{1}{2} l(1) = 0$. Quant au coefficient de $\sqrt{-1}$ dans l'intégrale (34) il peut être présenté sous la forme

$$\operatorname{arctang}\left[\varepsilon \frac{(x-a)v-(y-b)u}{(x-a)(x-a+\varepsilon u)+(y-b)(y-b+\varepsilon v)}\right].$$

Or il est aisé de voir que ce coefficient produira un terme de la forme $\mp \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$ dans l'intégrale (34) prise entre les limites $t = t_0$, $t = \tau$, et un second terme de la forme $\mp \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$, dans la même intégrale prise entre les limites $t = \tau$, $t = T$. La somme de ces deux termes sera $\mp \pi \sqrt{-1}$, et par suite l'équation (32) se trouvera réduite à la formule (26).

6. Les formules que nous venons d'établir supposent que la constante désignée par f conserve une valeur finie, ce qui n'aurait plus lieu, si l'équation (19) acquérait plusieurs racines égales à l'expression imaginaire $a + b\sqrt{-1}$. Admettons cette dernière hypothèse, et désignons par m le nombre des racines dont il s'agit. Soient, en outre, $A' + B'\sqrt{-1}$, $A'' + B''\sqrt{-1}$ les deux expressions dans lesquelles se transforme l'intégrale (14), quand les variables x, y reçoivent : 1° les accroissements infiniment petits εu, εv; 2° les accroissements $-\varepsilon u$, $-\varepsilon v$. Enfin posons, pour abréger,

$$(z-a-b\sqrt{-1})^m f(z) = \mathrm{f}(z). \tag{35}$$

L'équation (29) devra être remplacée par la suivante :

$$\left\{\begin{aligned} & A'' + B''\sqrt{-1} - (A' + B'\sqrt{-1}) \\ & \quad = \int_{t_0}^{T} [x' - \varepsilon u' + (y' - \varepsilon v')\sqrt{-1}] \frac{\mathrm{f}[x-\varepsilon u + (y-\varepsilon v)\sqrt{-1}]}{[x-a-\varepsilon u + (y-b-\varepsilon v)\sqrt{-1}]^m} dt \\ & \quad\quad - \int_{t_0}^{T} [x' + \varepsilon u' + (y' + \varepsilon v')\sqrt{-1}] \frac{\mathrm{f}[x+\varepsilon u + (y+\varepsilon v)\sqrt{-1}]}{[x-a+\varepsilon u + (y-b+\varepsilon v)\sqrt{-1}]^m} dt. \end{aligned}\right. \tag{36}$$

Or la différence entre les intégrales comprises dans le second membre de l'équation (36) sera très-petite, excepté dans le cas où la variable x différera très-peu de a, et la variable y de b; dans ce dernier cas, les expressions

$$(37)\quad x-a-\varepsilon u+(y-b-\varepsilon v)\sqrt{-1},\quad x-a+\varepsilon u+(y-b+\varepsilon v)\sqrt{-1}$$

seront elles-mêmes fort rapprochées de zéro, et, si l'on développe les fonctions

$$\mathrm{f}[x-\varepsilon u+(y-\varepsilon v)\sqrt{-1}],\quad \mathrm{f}[x+\varepsilon u+(y+\varepsilon v)\sqrt{-1}]$$

suivant les puissances ascendantes des expressions dont il s'agit, on pourra, sans craindre qu'il en résulte des erreurs sensibles, supprimer, dans les développements obtenus, les termes qui renfermeront des puissances d'un degré supérieur à m. Cette seule considération suffit pour évaluer le second membre de l'équation (36). Si, pour plus d'exactitude, on pose

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{f}(z) = {} & \mathrm{f}(a+b\sqrt{-1}) + \frac{\mathrm{f}'(a+b\sqrt{-1})}{1}(z-a-b\sqrt{-1}) + \ldots \\ & + \frac{\mathrm{f}^{(m-1)}(a+b\sqrt{-1})}{1.2.3\ldots(m-1)}(z-a-b\sqrt{-1})^{m-1} \\ & + (z-a-b\sqrt{-1})^m \varpi(z), \end{aligned}\right.$$

la fonction $\varpi(z)$ conservera en général une valeur finie, et l'équation (36) donnera

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} & \mathrm{A}''+\mathrm{B}''\sqrt{-1}-(\mathrm{A}'+\mathrm{B}'\sqrt{-1}) \\ & \quad = s_0\mathrm{f}(a+b\sqrt{-1}) + \frac{s_1}{1}\mathrm{f}'(a+b\sqrt{-1}) + \ldots \\ & \quad + \frac{s_{m-2}}{1.2.3\ldots(m-2)}\mathrm{f}^{(m-2)}(a+b\sqrt{-1}) \\ & \quad + \frac{s_{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)}\mathrm{f}^{(m-1)}(a+b\sqrt{-1}) \\ & \quad + \int_{t_0}^{\mathrm{T}} \Big\{ [x'+\varepsilon u'+(y'-\varepsilon v')\sqrt{-1}] \\ & \qquad\qquad \times \varpi[x-\varepsilon u+(y-\varepsilon v)\sqrt{-1}] \\ & \qquad\qquad - [x'+\varepsilon u'+(y'+\varepsilon v')\sqrt{-1}] \\ & \qquad\qquad \times \varpi[x+\varepsilon u+(y+\varepsilon v)\sqrt{-1}] \Big\} dt; \end{aligned}\right.$$

s_n représentant une intégrale déterminée par la formule

$$(40)\quad \left\{ s_n = \int_{t_0}^{T} \left\{ \frac{x' - \varepsilon u' + (y' - \varepsilon v')\sqrt{-1}}{[x - a - \varepsilon u + (y - b - \varepsilon v)\sqrt{-1}]^{m-n}} - \frac{x' + \varepsilon u' + (y' + \varepsilon v')\sqrt{-1}}{[x - a + \varepsilon u + (y - b + \varepsilon v)\sqrt{-1}]^{m-n}} \right\} dt. \right.$$

Or le dernier terme de la formule (39) s'évanouit, aussi bien que le dernier terme de la formule (32). De plus l'intégration indiquée dans l'équation (40) peut s'effectuer, et l'intégrale définie qui en résulte est toujours nulle, excepté dans le cas où l'on suppose $m - n = 1$, $n = m - 1$, auquel cas on trouve

$$(41)\qquad s_{m-1} = \pm 2\pi\sqrt{-1}.$$

On arrive encore à la même conclusion, en observant que la fonction sous le signe $\int$, dans l'intégrale s_n, n'a de valeur sensible qu'entre des limites de t fort rapprochées de τ, d'où il suit que cette intégrale peut être considérée comme une intégrale singulière. D'ailleurs, si l'on fait, comme au n° 4, $t = \tau + \varepsilon w$, la fonction dont il s'agit sera sensiblement équivalente, pour de très-petites valeurs de εw, au produit

$$(42)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{\varepsilon^{m-n}} \left\{ \frac{\alpha + \beta\sqrt{-1}}{[(\alpha + \beta\sqrt{-1})w - (\gamma + \delta\sqrt{-1})]^{m-n}} - \frac{\alpha + \beta\sqrt{-1}}{[(\alpha + \beta\sqrt{-1})w + (\gamma + \delta\sqrt{-1})]^{m-n}} \right\} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^{m-n}(\alpha + \beta\sqrt{-1})^{m-n-1}} \left[\frac{1}{(w - \lambda - \mu\sqrt{-1})^{m-n}} - \frac{1}{(w + \lambda + \mu\sqrt{-1})^{m-n}} \right] \\ &= \frac{1}{(\alpha + \beta\sqrt{-1})^{m-n-1}} \left\{ \frac{1}{[t - \tau - \varepsilon(\lambda + \mu\sqrt{-1})]^{m-n}} - \frac{1}{[t - \tau + \varepsilon(\lambda + \mu\sqrt{-1})]^{m-n}} \right\}; \end{aligned} \right.$$

et comme, pour des valeurs sensibles de $\varepsilon w = t - \tau$, ce produit se réduit à très-peu près à

$$(43) \qquad \frac{1}{(\alpha + 6\sqrt{-1})^{m-n-1}} \left[\frac{1}{(t-\tau)^{m-n}} - \frac{1}{(t-\tau)^{m-n}} \right],$$

c'est-à-dire à zéro, nous conclurons que, dans l'équation (40), on peut substituer ce produit à la fonction sous le signe $\int$. On aura donc à très-peu près

$$(44) \quad \left\{ \begin{aligned} s_n = \frac{1}{(\alpha + 6\sqrt{-1})^{m-n-1}} \int_{t_0}^{T} \Bigg\{ & \frac{1}{[t-\tau-\varepsilon(\lambda+\mu\sqrt{-1})]^{m-n}} \\ & - \frac{1}{[t-\tau+\varepsilon(\lambda+\mu\sqrt{-1})]^{m-n}} \Bigg\} dt. \end{aligned} \right.$$

De plus, comme on trouvera généralement, en supposant $m - n > 1$,

$$(45) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int \Bigg\{ \frac{1}{[t-\tau-\varepsilon(\lambda+\mu\sqrt{-1})]^{m-n}} \\ & \qquad - \frac{1}{[t-\tau+\varepsilon(\lambda+\mu\sqrt{-1})]^{m-n}} \Bigg\} dt \\ & = - \frac{1}{m-n-1} \Bigg\{ \frac{1}{[t-\tau-\varepsilon(\lambda+\mu\sqrt{-1})]^{m-n-1}} \\ & \qquad - \frac{1}{[t-\tau+\varepsilon(\lambda+\mu\sqrt{-1})]^{m-n-1}} \Bigg\} + \text{const.}, \end{aligned} \right.$$

et que la fonction de t, comprise dans le second membre de l'équation (45), s'évanouira sensiblement aux deux limites $t = t_0$, $t = \tau$, il est clair que le second membre de l'équation (44) sera nul, pour toutes les valeurs de n inférieures à $m - 1$. Si l'on y suppose maintenant $n = m - 1$, on aura simplement

$$(46) \quad \left\{ \begin{aligned} s_{m-1} = \int_{t_0}^{T} \Bigg[& \frac{1}{t-\tau-\varepsilon(\lambda+\mu\sqrt{-1})} \\ & - \frac{1}{t-\tau+\varepsilon(\lambda+\mu\sqrt{-1})} \Bigg] dt \\ = \int_{t_0}^{T} \Bigg[& \frac{t-\tau-\varepsilon\lambda+\varepsilon\mu\sqrt{-1}}{(t-\tau-\varepsilon\lambda)^2+(\varepsilon\mu)^2} \\ & - \frac{t-\tau+\varepsilon\lambda-\varepsilon\mu\sqrt{-1}}{(t-\tau+\varepsilon\lambda)^2+(\varepsilon\mu)^2} \Bigg] dt. \end{aligned} \right.$$

Or il est facile de s'assurer : 1° que la partie réelle de l'intégrale (46) est sensiblement nulle; 2° que la partie imaginaire, savoir

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned} &\sqrt{-1}\int_{t_0}^{T}\left[\frac{\varepsilon\mu}{(t-\tau-\varepsilon\lambda)^2+(\varepsilon\mu)^2}+\frac{\varepsilon\mu}{(t-\tau+\varepsilon\lambda)^2+(\varepsilon\mu)^2}\right]dt\\ &=\sqrt{-1}\int_{-\frac{\tau-t_0}{\varepsilon}}^{\frac{T-\tau}{\varepsilon}}\left[\frac{1}{(\varpi-\lambda)^2+\mu^2}+\frac{1}{(\varpi+\lambda)^2+\mu^2}\right]\mu\, d\varpi,\end{aligned}\right.$$

se réduit à

$$\pm 2\pi\sqrt{-1}.$$

On aura donc

$$s_{m-1}=\pm 2\pi\sqrt{-1},$$

le signe étant déterminé, comme dans la formule (29); et l'équation (39) donnera

$$(48)\quad A''+B''\sqrt{-1}-(A'+B'\sqrt{-1})=\pm 2\pi\,\frac{\mathrm{f}^{(m-1)}(a+b\sqrt{-1})}{1.2.3\ldots(m-1)}\sqrt{-1}.$$

Il en résulte que la formule (29) subsistera encore dans le cas des racines égales, si l'on y suppose la constante f déterminée, non plus par l'équation (20), mais par la suivante :

$$(49)\qquad \mathrm{f}=\frac{\mathrm{f}^{(m-1)}(a+b\sqrt{-1})}{1.2.3\ldots(m-1)},$$

ou, ce qui revient au même, par l'équation

$$(50)\qquad \mathrm{f}=\frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)}\,\frac{d^{m-1}[\varepsilon^m \mathrm{f}(a+b\sqrt{-1}+\varepsilon)]}{d\varepsilon^{m-1}},$$

ε désignant un nombre infiniment petit, qu'on devra réduire à zéro, après avoir effectué les différentiations.

7. Concevons maintenant que, l'équation (19) ayant des racines égales, on veuille calculer, non plus la différence entre les deux intégrales $A'+B'\sqrt{-1}$, $A''+B''\sqrt{-1}$, mais la différence qui existe entre la première de ces intégrales et l'intégrale (14). Il faudra évidemment substituer à l'équation (39) une autre équation de la

forme

$$(51)\quad \left\{\begin{aligned}
&A' + B'\sqrt{-1} - (A + B\sqrt{-1}) \\
&\quad = s_0 f(a + b\sqrt{-1}) + \frac{s_1}{1} f'(a + b\sqrt{-1}) + \ldots \\
&\quad + \frac{s_{m-2}}{1.2.3\ldots(m-2)} f^{(m-2)}(a + b\sqrt{-1}) \\
&\quad + \frac{s_{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)} f^{(m-1)}(a + b\sqrt{-1}) \\
&\quad + \int_{t_0}^{T} \Big\{ [x' + \varepsilon u' + (y' + \varepsilon v')\sqrt{-1}] \\
&\qquad\qquad \times \varpi[x + \varepsilon u + (y + \varepsilon v)\sqrt{-1}] \\
&\qquad\qquad\qquad - (x' + y'\sqrt{-1})\varpi(x + y\sqrt{-1}) \Big\} dt,
\end{aligned}\right.$$

et dans laquelle s_n représentera une intégrale déterminée par la formule

$$(52)\quad \left\{\begin{aligned}
s_n = \int_{t_0}^{T} \Bigg\{ &\frac{x' + \varepsilon u' + (y' + \varepsilon v')\sqrt{-1}}{[x - a + \varepsilon u + (y - b + \varepsilon v)\sqrt{-1}]^{m-n}} \\
&- \frac{x' + y'\sqrt{-1}}{[x - a + (y - b)\sqrt{-1}]^{m-n}} \Bigg\} dt.
\end{aligned}\right.$$

De plus on démontrera, par des raisonnements semblables à ceux dont nous avons fait usage dans le n° 6 : 1° que le dernier terme de la formule (51) s'évanouit; 2° que l'équation (52) peut être remplacée par la suivante :

$$(53)\quad \left\{\begin{aligned}
s_n = &\frac{1}{(\alpha + 6\sqrt{-1})^{m-n-1}} \\
&\times \left\{ \int_{t_0}^{T} \frac{dt}{[t - \tau + \varepsilon(\lambda + \mu\sqrt{-1})]^{m-n}} - \int_{t_0}^{T} \frac{dt}{(t-\tau)^{m-n}} \right\}.
\end{aligned}\right.$$

Or, si l'on suppose d'abord $n < m - 1$, on aura

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{T} \frac{1}{[t - \tau + \varepsilon(\lambda + \mu\sqrt{-1})]^{m-n}} \\
&= \frac{-1}{m-n-1} \left\{ \frac{1}{[T - \tau + \varepsilon(\lambda + \mu\sqrt{-1})]^{m-n-1}} \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{1}{[t_0 - \tau + \varepsilon(\lambda + \mu\sqrt{-1})]^{m-n-1}} \right\},
\end{aligned}$$

d'où il résulte que, pour de très-petites valeurs de ε, la première des intégrales comprises dans le second membre de l'équation (53) se réduira sensiblement à

$$(54) \qquad -\frac{1}{m-n-1}\left[\frac{1}{(\mathrm{T}-\tau)^{m-n-1}}-\frac{1}{(t_0-\tau)^{m-n-1}}\right].$$

Quant à la seconde intégrale

$$(55) \qquad \int_{t_0}^{\mathrm{T}} \frac{dt}{(t-\tau)^{m-n}},$$

elle sera équivalente à la somme

$$(56) \qquad \int_{t_0}^{\tau} \frac{dt}{(t-\tau)^{m-n}} + \int_{\tau}^{\mathrm{T}} \frac{dt}{(t-\tau)^{m-n}},$$

dont les deux parties représenteront des quantités infinies et de même signe, si $m-n$ est un nombre pair, et des quantités infinies, mais de signes contraires, si $m-n$ est un nombre impair. Par conséquent l'intégrale (55) et la valeur de s_n deviendront infinies dans le premier cas, indéterminées dans le second. De plus, comme la valeur principale de l'intégrale (55) sera sensiblement égale à

$$\int_{t_0}^{\tau-\varepsilon} \frac{dt}{(t-\tau)^{m-n}} + \int_{\tau+\varepsilon}^{\mathrm{T}} \frac{dt}{(t-\tau)^{m-n}}$$
$$= \frac{-1}{m-n-1}\left[\frac{1}{(\mathrm{T}-\tau)^{m-n-1}}-\frac{1}{(t_0-\tau)^{m-n-1}}-\frac{1}{\varepsilon^{m-n-1}}+\frac{1}{(-\varepsilon)^{m-n-1}}\right],$$

on voit que, dans le premier cas, cette valeur principale différera très-peu de la fraction

$$(57) \qquad \frac{2}{(m-n-1)\,\varepsilon^{m-n-1}},$$

tandis que, dans le second cas, la même valeur sera égale au produit (54) et la valeur correspondante de s_n à zéro. Enfin, si l'on suppose $n=m-1$, et que l'on réduise toujours l'intégrale (55) à sa valeur principale, on trouvera

$$(58) \qquad s_{m-1} = \mp \pi\sqrt{-1},$$

le signe — ou + devant être préféré suivant que la quantité μ sera positive ou négative. Il résulte de tous ces calculs : 1° que la valeur de la différence $A'+B'\sqrt{-1}-(A+B\sqrt{-1})$ sera infinie, à moins que la nature de la fonction $f(x+y\sqrt{-1})$ ne fasse disparaître, dans le second membre de la formule (51), tous les termes dans lesquels l'indice n de la lettre s sera équivalent à l'un des nombres

$$m-2,\quad m-4,\quad m-6,\ldots,$$

c'est-à-dire à moins que l'on n'ait

$$(59)\qquad \begin{cases} f^{(m-2)}(a+b\sqrt{-1})=0,\\ f^{(m-4)}(a+b\sqrt{-1})=0,\\ f^{(m-6)}(a+b\sqrt{-1})=0,\ldots; \end{cases}$$

2° que, si les conditions (59) sont remplies, on aura

$$(60)\qquad A'+B'\sqrt{-1}-(A+B\sqrt{-1})=\mp\pi\frac{f^{(m-1)}(a+b\sqrt{-1})}{1.2.3\ldots(m-1)}\sqrt{-1},$$

pourvu que l'on représente par $A+B\sqrt{-1}$, non pas la valeur générale de l'intégrale (14), qui, en vertu de l'hypothèse admise, sera indéterminée, mais sa valeur principale. Ajoutons que, pour déduire l'équation (60) de l'équation (26), il suffit de supposer, dans cette dernière, la constante f déterminée, non plus par la formule (20), mais par la formule (49) ou (50).

8. Si la fraction $f(x+y\sqrt{-1})$ devenait infinie pour plusieurs systèmes de valeurs des variables $x=\varphi(t)$ et $y=\chi(t)$, compris entre les limites $x=x_0$, $x=X$, $y=y_0$, $y=Y$, les valeurs correspondantes de $z=x+y\sqrt{-1}$ seraient autant de racines de l'équation (19). Appelons $z_1, z_2,\ldots$ ces racines, et $f_1, f_2,\ldots$ les valeurs correspondantes de la constante f, déterminée par l'équation (20) ou par l'équation (49). En raisonnant comme dans les n^{os} 4 et 6, on établira évidemment, non la formule (29), mais la suivante :

$$(61)\qquad A''+B''\sqrt{-1}-(A'+B'\sqrt{-1})=\pm2\pi f_1\sqrt{-1}\pm2f_2\sqrt{-1}\pm\ldots.$$

De plus, la valeur de l'intégrale (14) sera indéterminée, si l'équation (19) n'a que des racines simples, ou des racines égales, mais pour chacune desquelles des conditions semblables aux conditions (59) soient vérifiées; et si, dans l'une ou l'autre hypothèse, on réduit l'intégrale dont il s'agit à sa valeur principale, on trouvera, en désignant cette valeur par $A + B\sqrt{-1}$,

$$(62)\qquad A' + B'\sqrt{-1} - \left(A + B\sqrt{-1}\right) = \mp \pi f_1 \sqrt{-1} \mp \pi f_2 \sqrt{-1} \mp \ldots .$$

Enfin si, l'équation (19) ayant des racines égales, les conditions (59) n'étaient point vérifiées pour ces mêmes racines, la valeur générale et la valeur principale de l'intégrale (14) deviendraient infinies, et l'on devrait en dire autant de la différence

$$A' + B'\sqrt{-1} - \left(A + B\sqrt{-1}\right).$$

C'est ce qui arrivera en particulier toutes les fois que l'équation (19) aura des racines égales en nombre pair. Concevons, en effet, que, m désignant un nombre pair, l'équation (19) admette m racines égales à l'expression imaginaire $a + b\sqrt{-1}$. Alors, si l'on détermine la fonction $f(z)$ par le moyen de la formule (35), la constante $f\left(a + b\sqrt{-1}\right)$ aura nécessairement une valeur différente de zéro, et par conséquent la dernière des conditions (59), savoir

$$f\left(a + b\sqrt{-1}\right) = 0,$$

ne pourra être vérifiée. Pour confirmer le principe ci-dessus énoncé par un exemple, considérons l'intégrale imaginaire

$$(63)\qquad \int_{-1-\sqrt{-1}}^{1+\sqrt{-1}} \frac{dz}{z^2(1+z^2)},$$

dans laquelle $f(z) = \frac{1}{z^2(1+z^2)}$, et désignons par $A + B\sqrt{-1}$ la valeur qu'on obtient pour cette intégrale, en posant

$$z = t + t\sqrt{-1}.$$

Dans ce cas, l'équation (19) étant réduite à

$$z^2(1+z^2) = 0,$$

deux racines de cette équation deviendront égales à zéro, et corpondront à une valeur nulle de t. On aura d'ailleurs évidemment

$$(64)\quad \begin{cases} A + B\sqrt{-1} = \dfrac{1}{1+\sqrt{-1}} \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dt}{t^2(1+2t^2\sqrt{-1})} \\ \qquad = \dfrac{1}{1+\sqrt{-1}} \left(\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dt}{t^2} - \int_{-1}^{1} \frac{2\sqrt{-1}\,dt}{1+2t^2\sqrt{-1}} \right). \end{cases}$$

Or, des deux intégrales comprises dans le dernier membre de la formule (64), la première, savoir

$$\int_{-1}^{1} \frac{dt}{t^2},$$

est équivalente à la somme des deux suivantes :

$$\int_{-1}^{0} \frac{dt}{t^2} = \infty, \quad \int_{0}^{1} \frac{dt}{t^2} = \infty,$$

et par conséquent elle a une valeur infinie positive. Donc l'intégrale (64) aura elle-même une valeur infinie.

9. Si, entre les équations (7), on élimine t, on en obtiendra une autre de la forme

$$(65)\qquad F(x, y) = 0,$$

et, si l'on suppose que x et y représentent des coordonnées rectangulaires, l'équation (65) représentera une courbe tracée dans le plan des x, y, entre les deux points (x_0, y_0), (X, Y) (¹). Concevons en outre que les fonctions $x = \varphi(t)$, $y = \chi(t)$ vérifient les conditions énoncées dans le n° 2, c'est-à-dire qu'elles croissent ou décroissent l'une et l'autre depuis $t = t_0$ jusqu'à $t = T$. Dans cette hypothèse, la valeur de y, tirée de l'équation (65) et déterminée en fonction de x, croîtra ou décroîtra généralement depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$, et la courbe (65) sera comprise dans un rectangle formé par quatre droites parallèles aux axes, savoir celles qui ont pour équations

$$(66)\qquad \begin{cases} x = x_0, & x = X, \\ y = y_0, & y = Y. \end{cases}$$

(¹) Pour abréger, nous indiquons les points à l'aide de leurs coordonnées renfermees entre parenthèses, et les lignes droites ou courbes à l'aide de leurs équations.

Cela posé, chaque forme particulière de la fonction $F(x, y)$ fournira une courbe particulière et une valeur correspondante de l'intégrale (4). On doit même observer que cette fonction peut changer de nature, tandis que x varie, et qu'en conséquence la courbe $F(x, y) = 0$ peut se transformer en un système de lignes droites ou courbes, qui parte du point (x_0, y_0) pour aboutir au point (X, Y). Alors à chacune des lignes dont il s'agit correspond une intégrale semblable à l'intégrale (14), mais dans laquelle les valeurs extrêmes de x et de y représentent les coordonnées des deux extrémités de cette ligne. Si l'on veut qu'une des lignes en question se réduise à une droite menée du point (ξ_0, η_0) au point (ξ, η), il suffira, pour obtenir l'intégrale correspondante, d'assujettir x et y, considérées comme fonctions de t, à vérifier l'équation

$$\frac{x-\xi_0}{\xi-\xi_0} = \frac{y-\eta_0}{\eta-\eta_0}, \tag{67}$$

puis d'intégrer, par rapport à t, entre des limites telles, que les valeurs extrêmes de x et y se réduisent à ξ_0 et η_0, ξ et η. On pourra prendre, par exemple,

$$\begin{cases} x = \xi_0 + (\xi - \xi_0)\,t, \\ y = \eta_0 + (\eta - \eta_0)\,t; \end{cases} \tag{68}$$

et alors l'intégrale relative à t deviendra

$$\begin{cases} \int_0^1 [\xi - \xi_0 + (\eta - \eta_0)\sqrt{-1}] \\ \quad \times f[(\xi_0 + \eta_0\sqrt{-1})(1-t) + (\xi + \eta\sqrt{-1})\,t]\,dt. \end{cases} \tag{69}$$

Si, dans cette intégrale, on substitue successivement les variables x et y à la variable t, elle prendra les formes suivantes :

$$\int_{\xi_0}^{\xi}\left(1+\frac{\eta-\eta_0}{\xi-\xi_0}\sqrt{-1}\right) f\left[\left(1+\frac{\eta-\eta_0}{\xi-\xi_0}\sqrt{-1}\right)x + \frac{\eta_0\xi-\eta\xi_0}{\xi-\xi_0}\sqrt{-1}\right]dx, \tag{70}$$

$$\int_{\eta_0}^{\eta}\left(\frac{\xi-\xi_0}{\eta-\eta_0}+\sqrt{-1}\right) f\left[\left(\frac{\xi-\xi_0}{\eta-\eta_0}+\sqrt{-1}\right)y + \frac{\eta\xi_0-\eta_0\xi}{\xi-\xi_0}\right]dy. \tag{71}$$

Enfin, si la droite que l'on considère est parallèle à l'axe des x, on aura $\eta = \eta_0$, ce qui réduira l'intégrale (70) à

$$(72) \qquad \int_{\xi_0}^{\xi} f(x + \eta\sqrt{-1})\, dx.$$

Si, au contraire, cette droite est parallèle à l'axe de y, on aura $\xi = \xi_0$, et l'intégrale (71) se trouvera réduite à

$$(73) \qquad \sqrt{-1}\int_{\eta_0}^{\eta} f(\xi + y\sqrt{-1})\, dy.$$

En général, concevons qu'une des lignes tracées entre le point (x_0, y_0) et le point (X, Y) s'étende du point (ξ_0, η_0) au point (ξ, η). Si cette ligne a pour équation

$$(74) \qquad y = \psi(x),$$

l'intégrale correspondante pourra être présentée sous la forme

$$(75) \qquad \int_{\xi_0}^{\xi} [1 + \psi'(x)\sqrt{-1}]\, f[x + \psi(x)\sqrt{-1}]\, dx.$$

Si, au contraire, cette ligne a pour équation

$$(76) \qquad x = \psi(y),$$

l'intégrale (75) devra être remplacée par la suivante :

$$(77) \qquad \int_{\eta_0}^{\eta} [\psi'(y) + \sqrt{-1}]\, f[\psi(y) + y\sqrt{-1}]\, dy.$$

10. Le système des lignes tracées entre les points (x_0, y_0), (X, Y) peut être réduit à la droite qui joint ces deux points, ou, ce qui revient au même, à la diagonale du rectangle formé par les droites (66). La valeur de l'expression (14), correspondant à cette diagonale, sera ce que nous appellerons la *valeur moyenne* de l'intégrale (4). Cette valeur moyenne sera évidemment semblable à l'expression (69), et représentée par l'intégrale

$$(78) \qquad \left\{ \begin{aligned} \int_0^1 [X - x_0 + (Y - y_0)\sqrt{-1}]\, f[(x_0 + y_0\sqrt{-1})(1 - t) \\ + (X + Y\sqrt{-1})\, t]\, dt. \end{aligned} \right.$$

Si à la diagonale du rectangle ci-dessus mentionné on substitue : 1° le système des droites

$$(79)\qquad y = y_0, \quad x = \mathrm{X},$$

qui coïncident avec deux côtés de ce rectangle; 2° le système des droites

$$(80)\qquad x = x_0, \quad y = \mathrm{Y},$$

qui coïncident avec les deux autres côtés, on obtiendra, dans l'un et l'autre cas, à la place de l'intégrale (78), une somme de deux intégrales semblables aux intégrales (72) et (73). Les deux sommes ainsi formées, savoir

$$(81)\qquad \int_{x_0}^{\mathrm{X}} f(x + y_0\sqrt{-1})\,dx + \sqrt{-1}\int_{y_0}^{\mathrm{Y}} f(\mathrm{X} + y\sqrt{-1})\,dy$$

et

$$(82)\qquad \int_{x_0}^{\mathrm{X}} f(x + \mathrm{Y}\sqrt{-1})\,dy + \sqrt{-1}\int_{y_0}^{\mathrm{Y}} f(x_0 + y\sqrt{-1})\,dy,$$

sont ce que nous nommerons les *valeurs extrêmes* de l'intégrale (4).

11. Concevons maintenant que l'on veuille comparer entre elles deux valeurs de l'intégrale (4) correspondant à deux lignes droites ou courbes très-rapprochées l'une de l'autre, ou, ce qui revient au même, à deux fonctions peu différentes successivement substituées à la fonction $\mathrm{F}(x, y)$. En vertu du principe établi dans le n° 3, ces deux valeurs seront égales si la fonction $f(x + y\sqrt{-1})$ ne devient jamais infinie pour des valeurs des coordonnées x, y, relatives à des points situés sur les courbes que l'on considère, ou entre ces mêmes courbes. Si le contraire a lieu, s'il arrive, par exemple, que des points renfermés entre les deux courbes aient pour coordonnées les quantités réelles comprises dans quelques racines de l'équation (19), la différence entre les deux valeurs de l'intégrale (4) sera déterminée par la formule (61). Enfin, si quelques racines de l'équation (19) sont relatives à des points situés sur les deux courbes, la différence entre les deux valeurs de l'intégrale (4) sera ou infinie ou indéterminée. Ajoutons que, dans le dernier cas, la

formule (61) continuera de subsister si, aux intégrales représentées par $A' + B'\sqrt{-1}$, $A'' + B''\sqrt{-1}$, on substitue leurs valeurs principales, et si l'on réduit à moitié celles des constantes $f_1, f_2, \ldots$, qui correspondront aux points dont il s'agit. Il est encore essentiel de rappeler que, dans la formule (61), le signe placé devant chaque produit de la forme

$$(83) \qquad 2\pi f\sqrt{-1} \quad \text{ou} \quad \pi f\sqrt{-1}$$

sera — ou +, suivant que la différence (27) aura une valeur positive ou négative. Si, pour fixer les idées, on suppose $t_0 < T$, la différence (27) pourra être remplacée par la suivante :

$$(84) \qquad dx\,\delta y - dy\,\delta x.$$

Or il est facile de s'assurer que cette différence conservera le même signe pour tous les points compris entre les deux courbes, lorsqu'elles ne se traverseront pas mutuellement. Par conséquent, dans cette hypothèse, tous les produits de la forme (83) devront être affectés du même signe. Si l'on suppose, par exemple, $x_0 < X$, $y_0 < Y$, et l'ordonnée de la seconde courbe inférieure à l'ordonnée de la première, alors, en nommant $A' + B'\sqrt{-1}$, $A'' + B''\sqrt{-1}$, les valeurs de l'intégrale (4) relatives à la première courbe et à la seconde, on aura

$$A'' + B''\sqrt{-1} + A' - B'\sqrt{-1} = 2\pi(f_1 + f_2 + \ldots)\sqrt{-1},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(85) \quad A'' + B''\sqrt{-1} = A' + B'\sqrt{-1} = 2\pi(f_1 + f_2 + \ldots)\sqrt{-1}.$$

On devra d'ailleurs, dans la formule (85), réduire les intégrales désignées par $A' + B'\sqrt{-1}$, $A'' + B''\sqrt{-1}$ à leurs valeurs principales, et remplacer les constantes $f_1, f_2, \ldots$ par $\frac{1}{2}f_1, \frac{1}{2}f_2, \ldots$, toutes les fois que ces constantes correspondront à des points situés sur l'une des courbes, et que les intégrales $A' + B'\sqrt{-1}$, $A'' + B''\sqrt{-1}$ ne deviendront pas infinies.

Si l'on voulait passer d'une courbe donnée à une autre qui n'en fût pas très-voisine, il suffirait d'imaginer une troisième courbe mobile et variable de forme, que l'on ferait coïncider successivement et à deux époques différentes avec les deux courbes fixes. A l'aide de cette considération, on déterminerait la différence entre les valeurs de l'intégrale (4) relatives aux deux courbes fixes, et l'on prouverait que *cette différence* (*quand elle conserve une valeur finie*) *est la somme des termes de la forme* $\pm 2\pi \mathrm{f}\sqrt{-1}$, *qui correspondent à des points renfermés entre les deux courbes, et des termes de la forme* $\pm \pi \mathrm{f}\sqrt{-1}$, *qui correspondent à des points situés sur l'une d'elles*. La proposition précédente s'étend au cas où chacune des courbes serait remplacée par un système de lignes droites ou courbes, formant un contour qui partirait du point (x_0, y_0) pour aboutir au point (X, Y), et subsiste lors même que de pareils contours ne seraient pas renfermés dans le rectangle figuré par les droites (66). Dans ce dernier cas, chaque système de lignes droites ou courbes fournirait toujours une somme d'intégrales semblables à l'intégrale (14). Mais cette somme, d'après les conventions admises, cesserait de représenter une valeur particulière de l'intégrale (4).

12. Si, à l'aide des principes que nous venons d'exposer, on détermine la différence entre les deux sommes (81) et (82), c'est-à-dire entre les valeurs extrêmes de l'intégrale (4), dans le cas où cette différence conserve une valeur finie, on trouvera

$$(86)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{x_0}^{X} f(x+y_0\sqrt{-1})\,dx+\sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y} f(X+y\sqrt{-1})\,dy\\ &\quad=\int_{x_0}^{X} f(x+Y\sqrt{-1})+\sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y} f(x_0+y\sqrt{-1})\,dy\\ &\qquad+2\pi(\mathrm{f}_1+\mathrm{f}_2+\ldots)\sqrt{-1},\end{aligned}\right.$$

les termes $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \ldots$ étant relatifs à celles des racines de l'équation (19) dans lesquelles les parties réelles restent comprises entre les limites x_0, X, et les coefficients de $\sqrt{-1}$ entre les limites y_0, Y. Ajoutons que l'un de ces termes, pris au hasard, devra être réduit à moitié, si, dans la racine correspondante, la partie réelle se confond avec l'une des quantités x_0, X, ou le coefficient de $\sqrt{-1}$ avec l'une des quantités y_0, Y. Dans la même hypothese, celles des intégrales comprises dans la formule (86), qui deviendront indéterminées, devront être réduites à leurs valeurs principales.

Si l'on fait, pour abréger,

$$(87) \qquad \Delta = 2\pi(\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2 + \ldots)\sqrt{-1},$$

l'équation (86) deviendra

$$(88) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_{x_0}^{X} f(x + y_0\sqrt{-1})\,dx + \sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y} f(X + y\sqrt{-1})\,dy \\ &= \int_{x_0}^{X} f(x + Y\sqrt{-1})\,dx + \sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y} f(x_0 + y\sqrt{-1})\,dy + \Delta. \end{aligned} \right.$$

L'équation (88) coïncide avec l'une des formules générales que j'ai données dans le *Journal de l'École royale Polytechnique* et dans le *Bulletin de la Société Philomathique* de novembre 1822. Elle subsiste non-seulement pour des valeurs réelles, mais encore pour des valeurs imaginaires de la fonction $f(x)$, et peut toujours être remplacée par deux équations réelles, que l'on obtient en égalant dans les deux membres : 1° les parties réelles ; 2° les coefficients de $\sqrt{-1}$. Ajoutons que, pour éviter toute incertitude sur la valeur des notations employées dans le calcul, il faut, dans l'équation (88), choisir la fonction $f(x)$ de telle manière que l'expression $f(x + y\sqrt{-1})$ conserve une valeur unique et reste complétement déterminée pour toutes les valeurs de x et de y comprises entre les limites des intégrations. Cette condition peut être remplie dans le cas même où $f(x + y\sqrt{-1})$ renfermerait des logarithmes ou des puissances irrationnelles de quantités variables, c'est-à-dire des expressions de la forme

$$(89) \qquad (u + v\sqrt{-1})^{\mu}, \quad l(u + v\sqrt{-1}),$$

μ désignant une quantité réelle, et u, v deux fonctions réelles et déterminées des variables x, y. Effectivement les expressions (89) satisferont à la condition requise, si la quantité u reste positive pour toutes les valeurs de x et y comprises entre les limites des intégrations, et si l'on adopte les conventions que nous avons admises dans le *Cours d'Analyse algébrique* et dans les précédents Mémoires. En vertu de ces conventions, la notation arc tang $\frac{v}{u}$ est toujours employée pour désigner le plus petit arc (abstraction faite du signe) dont la tangente soit égale à $\frac{v}{u}$, et les notations (89) pour représenter les expressions imaginaires

$$(u^2+v^2)^{\frac{\mu}{2}}\left[\cos\left(\mu \operatorname{arc tang}\frac{v}{u}\right)+\sqrt{-1}\sin\left(\mu \operatorname{arc tang}\frac{v}{u}\right)\right],$$

$$\frac{1}{2}l(u^2+v^2)+\sqrt{-1}\operatorname{arc tang}\frac{v}{u}.$$

On peut encore considérer la notation

$$(u+v\sqrt{-1})^{\lambda+\mu\sqrt{-1}},$$

dans laquelle λ et μ désignent des quantités quelconques, comme représentant une fonction unique et complétement déterminée, toutes les fois que la quantité variable u reçoit une valeur positive. En effet, comme, dans cette hypothèse, on aura généralement

$$u+v\sqrt{-1}=e^{l(u+v\sqrt{-1})},$$

on sera naturellement conduit à la formule

$$(u+v\sqrt{-1})^{\lambda+\mu\sqrt{-1}}=e^{(\lambda+\mu\sqrt{-1})\,l(u+v\sqrt{-1})},$$

qui suffira pour fixer complétement le sens de l'expression comprise dans son premier membre. Si l'on suppose en particulier $u=0$, on trouvera, pour des valeurs positives de v,

$$(v\sqrt{-1})^{\lambda+\mu\sqrt{-1}}=e^{\lambda l(v)-\frac{\pi}{2}\mu}\left\{\cos\left[\frac{\pi}{2}\lambda-\mu l(v)\right]\right.$$
$$\left.+\sqrt{-1}\sin\left[\frac{\pi}{2}\lambda+\mu l(v)\right]\right\},$$

et, pour des valeurs négatives de v,

$$(v\sqrt{-1})^{\lambda+\mu\sqrt{-1}}=e^{\lambda l(-v)+\frac{\pi}{2}\mu}\left\{\cos\left[\frac{\pi}{2}\lambda-\mu l(-v)\right]\right.$$
$$\left.-\sqrt{-1}\sin\left[\frac{\pi}{2}\lambda-\mu l(-v)\right]\right\}.$$

Lorsque la fonction $f(x+y\sqrt{-1})$ s'évanouit pour $x=\infty$, quel que soit y, alors, en prenant

$$x_0 = 0, \quad X = \infty, \quad y_0 = 0, \quad Y = b,$$

on tire de l'équation (88)

$$(90) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^\infty f(x + b\sqrt{-1})\,dx = \int_0^\infty & f(x)\,dx \\ & - \sqrt{-1}\int_0^b f(y\sqrt{-1})\,dy - \Delta. \end{aligned} \right.$$

Si l'on pose dans celle-ci

$$f(x) = e^{-x^m},$$

m désignant un nombre quelconque, on en déduira deux équations réelles, qui comprendront, comme cas particulier, une formule de M. Laplace, savoir :

$$(91) \qquad \int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bx\,dx = e^{-b^2}\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}e^{-b^2}.$$

Lorsque la fonction $f(x + y\sqrt{-1})$ s'évanouit pour $y = \infty$, quel que soit x, alors, en prenant

$$x_0 = 0, \quad X = a, \quad y_0 = 0, \quad Y = \infty,$$

on tire de la formule (88)

$$(92) \quad \int_0^a f(x)\,dx = \Delta - \sqrt{-1}\int_0^\infty [f(a + y\sqrt{-1}) - f(y\sqrt{-1})]\,dy.$$

Si l'on pose dans celle-ci

$$f(x) = \varphi(x)\,e^{bx\sqrt{-1}},$$

b désignant une quantité positive, et si l'on remplace ensuite, dans le second membre, y par $\frac{x}{b}$, elle fournira le moyen de convertir les intégrales

$$\int_0^a \varphi(x)\cos bx\,dx, \quad \int_0^a \varphi(x)\sin bx\,dx$$

en d'autres intégrales de la forme

$$\int_0^\infty \psi\left(\frac{x}{b}\right) e^{-x}\, dx.$$

Pour obtenir des valeurs très-approchées de ces dernières, lorsque le nombre b sera considérable, il suffira de développer les fonctions $\psi\left(\frac{x}{b}\right),\ldots$ en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes, entières ou fractionnaires, du rapport $\frac{x}{b}\cdot$ On n'aura plus alors à calculer que des intégrales semblables à celles que M. Legendre désigne par la lettre Γ, c'est-à-dire de la forme

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\, dx,$$

et qui sont déterminées, pour des valeurs entières de n, par l'équation

$$\Gamma(n) = 1.2.3\ \ldots(n-1).$$

La remarque que l'on vient de faire est très-utile dans la théorie des ondes, ainsi que je l'ai montré dans les nouvelles Notes ajoutées au Mémoire qui a remporté le prix.

Lorsque la fonction $f(x+y\sqrt{-1})$ s'évanouit pour $x=\pm\infty$, quel que soit y, alors en prenant

$$x_0 = -\infty,\quad X=\infty,\quad y_0 = 0,\quad Y = b,$$

on tire de l'équation (88)

$$(93)\qquad \int_{-\infty}^\infty f(x+b\sqrt{-1})\, dx = \int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx - \Delta.$$

Si l'on suppose, par exemple,

$$f(x) = (b - x\sqrt{-1})^{a-1} e^{-x^2},$$

a désignant un nombre rationnel ou irrationnel, Δ deviendra nul, et l'on obtiendra une formule que j'ai donnée dans le *Bulletin de la Société Philomathique,* et qui renferme, comme cas particulier, l'équation (91).

Lorsque la fonction $f(x+y\sqrt{-1})$ s'évanouit pour $x=\infty$, quel que soit y, et pour $y=\infty$, quel que soit x, alors, en posant

$$x_0=0,\quad X=\infty,\quad y_0=0,\quad Y=\infty,$$

on tire de la formule (88)

$$(94)\qquad \int_0^\infty f(x)\,dx=\sqrt{-1}\int_0^\infty f(y\sqrt{-1})\,dy+\Delta.$$

Parmi les résultats que fournit cette dernière équation, nous indiquerons ceux que l'on obtient en prenant pour $f(x)$ une fonction de la forme

$$f(x)=\varphi(x)\,e^{bx\sqrt{-1}},$$

ou bien en supposant

$$f(x)=\left(e^{-x}-\frac{1}{1+x}\right)\frac{1}{x}.$$

L'équation à laquelle on parvient, dans la dernière hypothèse, savoir :

$$(95)\qquad \int_0^\infty\left(e^{-x}-\frac{1}{1+x}\right)\frac{dx}{x}=\int_0^\infty\left(\cos y-\frac{1}{1+y^2}\right)\frac{dy}{y},$$

offre, sous une forme nouvelle, une intégrale qui, suivant la remarque d'Euler, peut servir à en calculer un grand nombre d'autres.

Lorsque la fonction $f(x+y\sqrt{-1})$ s'évanouit pour $x=-\infty$, quel que soit y, et pour $y=\infty$, quel que soit x, alors, en posant

$$x_0=-\infty,\quad X=0,\quad y=0,\quad Y=\infty.$$

on tire de l'équation (88)

$$(96)\qquad \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx=-\sqrt{-1}\int_0^\infty f(y\sqrt{-1})\,dy+\Delta.$$

On peut, de cette dernière formule combinée avec l'équation (94), déduire des résultats dignes de remarque. Supposons, par exemple,

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{(r+x\sqrt{-1})^a},$$

r et a désignant deux quantités positives, dont la seconde soit inférieure à l'unité. Comme la fonction $\varphi(x)$ pourra être présentée sous la forme

$$f(x)=\frac{1}{(\sqrt{-1})^a}\,\frac{\varphi(x)}{(x-r\sqrt{-1})^a},$$

on tirera de l'équation (94)

$$(97)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{(r+x\sqrt{-1})^a}\,dx\\ &=\frac{\sqrt{-1}}{(\sqrt{-1})^a}\int_0^\infty \frac{\varphi(y\sqrt{-1})}{[(y-r)\sqrt{-1}]^a}\,dy+\Delta',\end{aligned}\right.$$

Δ' étant une valeur particulière de la constante Δ. Au contraire, en présentant la fonction $f(x)$ sous la forme

$$f(x)=\frac{1}{(-\sqrt{-1})^a}\,\frac{\varphi(x)}{(-x+r\sqrt{-1})^a},$$

on tirera de la formule (96)

$$(98)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_{-\infty}^0 \frac{\varphi(x)}{(r+x\sqrt{-1})^a}\,dx\\ &=\frac{-\sqrt{-1}}{(-\sqrt{-1})^a}\int_0^\infty \frac{\varphi(y\sqrt{-1})}{[(r-y)\sqrt{-1}]^a}\,dy+\Delta'',\end{aligned}\right.$$

Δ'' étant une constante différente de Δ'. Si maintenant on ajoute les équations (97) et (98), en observant que les deux produits

$$(\sqrt{-1})^a\,[(y-r)\sqrt{-1}]^a,\quad (-\sqrt{-1})^a\,[(r-y)\sqrt{-1}]^a,$$

se réduisent, pour $y>r$, aux expressions

$$(\sqrt{-1})^{2a}(y-r)^a,\quad (-\sqrt{-1})^{2a}(r-y)^a,$$

et, pour $y<r$, à la seule quantité

$$(r-y)^a,$$

puis, remplaçant y par $x-r$, on trouvera

$$(99)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_{-\infty}^\infty \frac{\varphi(x)}{(r+x\sqrt{-1})^a}\,dx\\ &=[(\sqrt{-1})^{1-2a}+(-\sqrt{-1})^{1-2a}]\int_r^\infty \frac{\varphi(y\sqrt{-1})\,dy}{(y-r)^a}+\Delta'+\Delta''\\ &=2\sin a\pi.\int_0^\infty x^{-a}\varphi[(r+x)\sqrt{-1}]\,dx+\Delta'+\Delta''.\end{aligned}\right.$$

En raisonnant de la même manière, et supposant

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{(r+x\sqrt{-1})^a\, l(r+x\sqrt{-1})},$$

on établirait la formule

$$(100)\quad\left\{\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)\,dx}{(r+x\sqrt{-1})^a\, l(r+x\sqrt{-1})}\\&\quad=2\int_0^{\infty}\frac{\pi\cos a\pi+\sin a\pi.l(x)}{\pi^2+[l(x)]^a}x^{-a}\varphi\left[(r+x)\sqrt{-1}\right]dx+\Delta'+\Delta''.\end{aligned}\right.$$

On pourrait construire encore un grand nombre de formules du même genre, parmi lesquelles nous indiquerons celle à laquelle on parvient quand on suppose

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{(r+x\sqrt{-1})^a\,[l(r+x\sqrt{-1})]^b},$$

a, b désignant deux quantités réelles dont la première est inférieure à l'unité.

Si, dans l'équation (99), on pose successivement

$$\varphi(x)=e^{bx\sqrt{-1}},\quad \varphi(x)=\frac{1}{(s-x\sqrt{-1})^b},$$

b, s désignant des quantités positives, les constantes Δ, Δ' s'évanouiront, et l'on obtiendra les formules

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{bx\sqrt{-1}}}{(r+x\sqrt{-1})^a}dx&=2\sin a\pi.e^{-br}\int_0^{\infty}x^{-a}e^{-bx}dx\\&=2b^{a-1}e^{-br}\Gamma(1-a).\sin a\pi,\\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(r+x\sqrt{-1})^a(s-x\sqrt{-1})^b}&=2\sin a\pi\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^a(r+s+x)^b}\\&=2(r+s)^{1-a-b}\sin a\pi\int_0^{\infty}\frac{x^{-a}dx}{(1+x)^b}.\end{aligned}$$

Ces dernières, en vertu des propriétés connues de la fonction Γ, peuvent s'écrire comme il suit :

$$(101)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{bx\sqrt{-1}}\,dx}{(r+x\sqrt{-1})^a} = \frac{2\pi}{\Gamma(a)}\, b^{a-1} e^{-br},$$

et

$$(102)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(r+x\sqrt{-1})^b (s-x\sqrt{-1})^b} = 2\pi(r+s)^{1-a-b}\frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}.$$

En les différentiant plusieurs fois de suite par rapport à la quantité r, on reconnaît qu'elles s'étendent au cas même où l'exposant a devient supérieur à l'unité.

Il est essentiel de remarquer que les équations (99), (100), (101), (102), etc., subsisteront encore pour des valeurs imaginaires des constantes a et b, toutes les fois que les intégrales comprises dans ces formules conserveront des valeurs finies.

Lorsque la fonction $f(x+y\sqrt{-1})$ s'évanouit pour $x=\pm\infty$, quel que soit y, et pour $y=\infty$, quel que soit x, alors, en prenant

$$x_0 = -\infty,\quad X=\infty,\quad y_0=0,\quad Y=\infty,$$

on tire généralement de l'équation (88)

$$(103)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \Delta,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(104)\qquad \int_{0}^{\infty} \frac{f(x)+f(-x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\Delta.$$

Dans les seconds membres des formules qui précèdent, la somme représentée par Δ se compose uniquement de termes relatifs, les uns aux racines réelles de l'équation (19), les autres aux racines imaginaires dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ est positif. De plus, comme, pour obtenir ces formules, il a fallu prendre les intégrales relatives à y, à partir de $y=0$, il en résulte que, après avoir déterminé, à l'aide de la formule (87), les termes correspondant aux diverses racines, on devra réduire à moitié ceux qui se rapporteront à des racines réelles, c'est-à-dire à des racines dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ sera nul.

Les formules (103) et (104) réduisent, comme on le voit, la détermination des intégrales qu'elles renferment à la recherche des racines de l'équation (19), dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ est positif. Elles fournissent les valeurs de presque toutes les intégrales définies connues et d'un grand nombre d'autres, parmi lesquelles on peut remarquer celles que j'ai citées dans le XIX[e] cahier du *Journal de l'École royale Polytechnique*, dans le *Résumé* des leçons données à cette École, et dans le *Bulletin des Sciences* d'avril 1825.

Il est important d'observer que, dans le cas où l'équation (19) a des racines réelles, les intégrales (103) et (104) sont du nombre de celles dont les valeurs générales restent indéterminées. Mais, en vertu des principes établis dans les paragraphes précédents, les intégrales dont il s'agit doivent être alors réduites à leurs valeurs principales. Il est d'ailleurs facile de transformer ces valeurs principales en intégrales définies, dans lesquelles les fonctions, sous le signe $\int$, cessent de devenir infiniment grandes pour des valeurs particulières de la variable x.

On peut remarquer encore que, dans plusieurs cas, l'équation (19) aura une infinité de racines; alors la somme désignée par Δ se composera, du moins en général, d'un nombre infini de termes, et, par conséquent, chacune des intégrales (103), (104) se trouvera représentée par la somme d'une série infinie. Mais il arrivera souvent ou que la plupart des termes de la série devront être rejetés, parce qu'ils appartiendront à des racines dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ sera négatif, ou que la plupart des termes seront deux à deux égaux et de signes contraires, ou que la somme de la série pourra être facilement déterminée par la méthode que nous indiquerons dans le n° 13. Lorsque l'une de ces conditions sera remplie, les équations (103) et (104) continueront à fournir, en termes finis, les valeurs des intégrales qu'elles renferment.

Enfin il peut arriver que l'équation (19) n'ait pas de racines dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ soit positif ou nul, et, dans ce cas, les intégrales (103), (104) se réduiront à zéro. On trouvera, par exemple, en désignant par a, b, r, s des quantités positives,

$$(105)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{bx\sqrt{-1}}\,dx}{(r - x\sqrt{-1})} = 0,$$

$$(106)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(r - x\sqrt{-1})^{a}(s - x\sqrt{-1})^{b}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(r + x\sqrt{-1})^{a}(s + x\sqrt{-1})^{b}} = 0. \end{aligned} \right.$$

Si l'on combine l'équation (105) avec l'équation (101), on en tirera

$$(107)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_{0}^{\infty} \frac{(r - x\sqrt{-1})^{-a} + (r + x\sqrt{-1})^{-a}}{2} \cos bx\,dx = \frac{\pi}{2\Gamma(a)}\, b^{a-1} e^{-br}, \\ &\int_{0}^{\infty} \frac{(r - x\sqrt{-1})^{-a} - (r + x\sqrt{-1})^{-a}}{2\sqrt{-1}} \sin bx\,dx = \frac{\pi}{2\Gamma(a)}\, b^{a-1} e^{-br}. \end{aligned} \right.$$

J'ai donné ces dernières formules, au commencement de 1815, dans un Mémoire où elles étaient appliquées à la conversion des différences finies des puissances positives en intégrales définies, et pour lequel MM. Laplace, Legendre et Lacroix furent nommés commissaires. On peut au reste opérer cette conversion en s'appuyant ou sur la formule (101), ou sur une autre qui s'accorde avec elle, et qui a été donnée par M. Laplace.

On tire encore des formules (102) et (106), combinées entre elles,

$$(108)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_{0}^{\infty} \frac{(r - x\sqrt{-1})^{-a} + (r + x\sqrt{-1})^{-a}}{2}\, \frac{(s - x\sqrt{-1})^{-b} + (s + x\sqrt{-1})^{-b}}{2}\, dx \\ &= \int_{0}^{\infty} \frac{(r - x\sqrt{-1})^{-a} - (r + x\sqrt{-1})^{-a}}{2\sqrt{-1}}\, \frac{(s - x\sqrt{-1})^{-b} - (s - x\sqrt{-1})^{-b}}{2\sqrt{-1}}\, dx \\ &= \frac{\pi}{2}(r + s)^{1-a-b}\, \frac{\Gamma(a + b - 1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}. \end{aligned} \right.$$

Si, dans les formules (103), (104), et dans celles qui s'en déduisent, on pose

$$(109)\qquad x = \operatorname{tang} p,$$

on obtiendra de nouvelles intégrales définies relatives à la variable p, et prises entre les limites $p = -\frac{\pi}{2}$, $p = \frac{\pi}{2}$, ou $p = 0$ et $p = \frac{\pi}{2}$. En opérant ainsi, désignant par $\varphi(x)$ une fonction réelle et rationnelle de la variable x, et prenant

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[\varphi\left(\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}\right) - \varphi\left(\frac{1-x\sqrt{-1}}{1+x\sqrt{-1}}\right)\right]\frac{l(1-x\sqrt{-1})}{1+x^2}$$

$$= \cos^2 p \,.\, \frac{\varphi(e^{2p\sqrt{-1}}) - \varphi(e^{-2p\sqrt{-1}})}{2\sqrt{-1}}\,(p - \sqrt{-1}\, l\cos p),$$

on réduira l'intégrale (104) à la suivante :

$$(110) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi(e^{2p\sqrt{-1}}) - \varphi(e^{-2p\sqrt{-1}})}{2\sqrt{-1}}\, p\, dp.$$

Cette dernière coïncide avec l'une de celles que j'avais présentées dans le Mémoire de 1814 (deuxième Supplément). De même, si l'on fait, pour abréger,

$$(111) \quad u = \frac{\varphi(e^{2p\sqrt{-1}}) + \varphi(e^{-2p\sqrt{-1}})}{2}, \qquad v = \frac{\varphi(e^{2p\sqrt{-1}}) - \varphi(e^{-2p\sqrt{-1}})}{2\sqrt{-1}},$$

on déterminera sans peine les valeurs des intégrales

$$(112) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} u \,.\, l\cos p\, dp, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} u\,.\, l\sin p\, dp, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} u\,.\, l\,\mathrm{tang}\, p\, dp,$$

$$(113) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(\mathrm{tang}\, p)^a dp, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\cos ap}{(\cos p)^a} dp, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\,.\,l\cos p}{p^2 + (l\cos p)^2} dp,$$

$$(114) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} v(\mathrm{tang}\, p)^a dp, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{v\sin ap}{(\cos p)^a} dp, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{vp}{p^2 + (l\cos p)^2} dp,$$

etc.

On trouvera, en particulier, pour des valeurs de r comprises entre les limites $-1, +1$,

$$(115)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r\sin 2p}{1-2r\cos 2p+r^2}\, p\,dp = \frac{\pi}{4}\, l(1+r),$$

$$(116)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-r\cos 2p}{1-2r\cos 2p+r^2}(\operatorname{tang} p)^a\,dp = \frac{\pi}{4\cos\frac{a\pi}{2}}\left[1+\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^a\right],$$

$$(117)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r\sin 2p}{1-2r\cos 2p+r^2}(\operatorname{tang} p)^a\,dp = \frac{\pi}{4\sin\frac{a\pi}{2}}\left[1-\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^a\right],$$

$$(118)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-r\cos 2p}{1-2r\cos 2p+r^2}\, l\cos p\,dp = \frac{\pi}{4}\, l\left(\frac{1+r}{4}\right),$$

$$(119)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-r\cos 2p}{1-2r\cos 2p+r^2}\, l\sin p\,dp = \frac{\pi}{4}\, l\left(\frac{1-r}{4}\right),$$

$$(120)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-r\cos 2p}{1-2r\cos 2p+r^2}\, l\operatorname{tang} p\,dp = \frac{\pi}{4}\, l\left(\frac{1-r}{1+r}\right),$$

etc.

On trouvera, au contraire, en prenant pour r une quantité réelle dont la valeur numérique surpasse l'unité,

$$(121)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r\sin 2p}{1-2r\cos 2p+r^2}\, p\,dp = \frac{\pi}{4}\, l\left(1+\frac{1}{r}\right),$$

$$(122)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-r\cos 2p}{1-2r\cos 2p+r^2}(\operatorname{tang} p)^a\,dp = \frac{\pi}{4\cos\frac{a\pi}{2}}\left[1-\left(\frac{r-1}{r+1}\right)^a\right],$$

etc.

De plus, si, dans les équations (107) et (108), on pose $r=0$ ou $r=1$, $s=1$ et $x=\operatorname{tang} p$, on en déduira sans peine plusieurs formules dignes de remarque, parmi lesquelles je citerai la suivante :

$$(123)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos p)^{a+b-2}\cos(b-a)p\,dp = \frac{\pi}{2^{a+b-1}}\,\frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}.$$

Cette dernière peut être remplacée par l'équation

$$(124)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos p)^{a}\cos bp\,dp = \frac{\pi}{2^{a+1}}\,\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{a-b}{2}+1\right)},$$

qui subsiste, pour des valeurs réelles et même pour des valeurs imaginaires des constantes a et b, toutes les fois que l'intégrale comprise dans le premier membre ne devient pas infinie. Si, pour fixer les idées, on suppose $b = k\sqrt{-1}$, on trouvera

$$(125)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos p)^{a}\,\frac{e^{kp}+e^{-kp}}{2}\,dp = \frac{\pi\Gamma(a+1)}{2^{a+1}\mathrm{S}},$$

la valeur de S étant donnée par la formule

$$(126)\quad \mathrm{S} = \left[\int_0^\infty x^{\frac{a}{2}} e^{-x}\cos\frac{kl(x)}{2}\,dx\right]^2 + \left[\int_0^\infty x^{\frac{a}{2}} e^{-x}\sin\frac{kl(x)}{2}\,dx\right]^2.$$

Après avoir déduit des équations (103) et (104) un grand nombre de formules particulières, on pourra en établir de nouvelles à l'aide de différentiations ou d'intégrations relatives aux constantes contenues dans les premières formules. On déterminera facilement par ce moyen la valeur de l'intégrale définie

$$(127)\qquad \int_0^\infty x^{a-1}\varphi(x)\,[l(x)]^n\,dx,$$

a désignant une quantité réelle ou imaginaire, $\varphi(x)$ une fraction rationnelle quelconque, et n un nombre entier. On trouvera encore

$$(128)\quad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{l(x)}\,\frac{dx}{x^2+1} = \pi\left(l\,\mathrm{tang}\,\frac{a\pi}{4} - l\,\mathrm{tang}\,\frac{b\pi}{4}\right),$$

$$(129)\quad \int_{-\infty}^\infty \frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{l(x)}\,\frac{dx}{1-x^2} = \pi\left(l\sin\frac{a\pi}{2} - l\sin\frac{b\pi}{2}\right),\ \text{etc.}$$

Lorsque la fonction $f(x+y\sqrt{-1})$ s'évanouit pour $x=\pm\infty$, quel que soit y, et pour $y=-\infty$, quel que soit x, alors, en posant

$$x_0=-\infty,\quad X=\infty,\quad y_0=-\infty,\quad Y=0,$$

on tire généralement de l'équation (88)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=-\Delta, \tag{130}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)+f(-x)}{2}\,dx=-\frac{1}{2}\Delta. \tag{131}$$

Dans ces dernières formules, la somme représentée par Δ se compose uniquement de termes relatifs, les uns aux racines réelles de l'équation (19), les autres aux racines imaginaires dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ est négatif. De plus, après avoir déterminé ces différents termes à l'aide de l'équation (87), on devra réduire à moitié ceux qui correspondent à des racines réelles.

Lorsque la fonction $f(x+y\sqrt{-1})$ s'évanouit pour $y=\pm\infty$, quel que soit x, alors, en posant

$$y_0=-\infty,\quad Y=\infty,$$

on tire de la formule (88)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(X+y\sqrt{-1})-f(x_0+y\sqrt{-1})\right]dy=\frac{\Delta}{\sqrt{-1}}. \tag{132}$$

Dans cette dernière, Δ se compose de termes relatifs aux racines de l'équation (19) pour lesquelles les parties réelles demeurent comprises entre les limites x_0, X. Si l'on suppose en outre que la fonction $f(x+y\sqrt{-1}$ s'évanouisse pour l'une des valeurs $x=-\infty$, $x=\infty$, alors, en désignant par a une quantité positive et prenant

$$x_0=-\infty,\quad X=a,$$

ou bien

$$x_0=-a,\quad X=\infty,$$

on obtiendra l'une des formules

$$(133)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(a + y\sqrt{-1})\,dy = \frac{\Delta}{\sqrt{-1}},$$

$$(134)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(-a + y\sqrt{-1})\,dy = -\frac{\Delta}{\sqrt{-1}}.$$

Les formules (132), (133), (134) sont particulièrement utiles dans la résolution des équations par les intégrales définies, et dans l'intégration des équations différentielles linéaires (*voir* le XIX^e cahier du *Journal de l'École royale Polytechnique*).

(*A suivre.*)