BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Revue bibliographique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 7 (1874), p. 241-248

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1874__7__241_0>

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

CHELINI (D.), delle scuole Pie. — SULLA COMPOSIZIONE GEOMETRICA DE' SISTEMI DI RETTE, DI AREE E DI PUNTI. Bologna, 1870, in-4°, 51 p. — SULLA NUOVA GEOMETRIA DE' COMPLESSI. Bologna, 1871, in-4°, 31 p. (1).

L'illustre professeur D. Chelini, un des Quarante de la Société italienne des Sciences, avait publié, dès 1837 et 1838, dans le *Giornale Arcadico*, plusieurs articles sur les principes de la composition des droites et des aires, en les appliquant aux lignes et aux surfaces du premier et du second degré, pour donner un exemple de la facilité et de la généralité que leur usage introduit dans la Géométrie analytique. Puis, dans le Recueil périodique publié à Rome, à partir de 1845, sous le titre de *Raccolta scientifica*, par MM. Palomba, Tortolini, Cugnoni, il avait appliqué les mêmes principes aux courbures des lignes et des surfaces (2), aux démonstrations des formules fondamentales de la Trigonométrie plane et sphérique (3), aux centres des systèmes géométriques de points (4) et à l'usage des coordonnées obliquangles (5). Dans d'autres travaux, soit de Géométrie, soit de Mécanique, il était revenu plusieurs fois sur ce même sujet. Finalement, il a jugé utile de le reprendre et de le traiter avec étendue dans un Mémoire *Sulla composizione geometrica de' sistemi di rette, di aree e di punti*, inséré au tome X de la 2e série des *Mémoires de l'Institut de Bologne* (6), qu'il a fait suivre d'un autre Mémoire *Sulla nuova Geometria dei complessi*, publié dans le même Recueil, 3e série, t. I (7). Ces deux derniers Mémoires font le sujet du présent article.

(1) Extraits des *Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna*, t. X (2e serie) et t. I (3e serie). L'analyse dont nous donnons ici la traduction a été publiee par M. Ferdinando RUFFINI, dans le tome XII du *Giornale di Matematiche*.

(2) T. I, p. 105.

(3) T. II, p. 37.

(4) T. V, p. 39.

(5) *Ibid.*, p. 227.

(6) Voir *Bulletin*, t. IV, p. 248.

(7) Voir *Bulletin*, t. IV, p. 250.

Dans le premier Mémoire, l'auteur a pour but d'exposer les lois géométriques qui président à la composition et à la transformation des systèmes, soit de droites, soit d'aires, soit de points affectés de coefficients, abstraction faite de toute idée de force et de vitesse, dans le dessein de rendre purement géométriques les conceptions de Poinsot et de Chasles sur la composition et la réduction des forces et des rotations simultanées, et, en outre, de démontrer comment ces lois ouvrent un accès facile et attrayant aux autres théories de la Géométrie analytique et synthétique.

Après avoir défini la *résultante* de deux ou de plusieurs droites composantes, il établit le principe de la composition de plusieurs droites en une droite résultante; il passe au cas particulier des droites situées dans un même plan, pour en déduire l'aire d'un parallélogramme en fonction des composantes de ses côtés; puis il expose le principe des moments des droites situées dans un plan, d'où il tire les lois de la composition des droites parallèles et, par suite, celles de la composition des couples de droites, après avoir averti toutefois que, quand il parle de l'équivalence de deux systèmes de droites, cette équivalence doit s'entendre uniquement en ce qui regarde leurs projections et leurs moments, de sorte qu'elle n'est pas altérée lorsque, en un ou en plusieurs des points du système, on ajoute ou l'on supprime deux droites égales et de direction opposée.

Ces principes posés, il aborde la composition et la transformation d'un système quelconque de droites dans l'espace. Un système de droites peut toujours se réduire à une seule droite et à un seul couple, ou bien à un système de deux droites dans des conditions données. La solution du premier problème conduit naturellement à la définition de l'*axe central* d'un système de droites, lequel axe est la droite ayant pour propriété caractéristique de représenter sur elle-même (un quelconque de ses points étant pris pour centre de réduction) tant la droite résultante que le couple résultant, et à démontrer que, si le lieu du centre de réduction est une droite parallèle à l'axe central, le lieu de l'axe du couple résultant est un plan, et que, si le lieu du centre de réduction est une circonférence ayant pour axe l'axe central, le lieu de l'axe du couple résultant est un hyperboloïde gauche de révolution autour de l'axe central. Pour le second problème, on considère deux cas : 1° celui où l'une des droites doit être perpendiculaire à un plan donné, et l'autre située dans ce même plan; 2° celui où l'une des droites doit se trouver sur une droite donnée de position dans l'espace. Par une construction très-simple, on résout le problème dans le premier cas, et en même temps on détermine dans le plan donné le point et la droite que Chasles a nommés le *foyer* et la *caractéristique* du plan. Le *foyer* est le point du plan où l'axe du couple résultant devient perpendiculaire au plan; la *caractéristique* est la droite du plan pour les points de laquelle l'axe du couple résultant se trouve situé dans le plan. La construction même suffit ensuite pour mettre en évidence certains théorèmes remarquables, qui acquièrent encore plus d'importance quand les droites représentent des rotations simultanées infiniment petites. Sur la solution du problème dans le second cas se fonde l'importante théorie des *droites conjuguées*, ainsi nommées parce que la détermination de l'une d'elles entraîne la détermination de l'autre. Dans ce cas aussi, la construction est très-simple; on en déduit ensuite, de la manière la plus claire, que les systèmes équivalents de droites conjuguées sont en nombre infini; que, dans chacun de ces systèmes, la droite qui mesure la plus courte distance des deux droites conjuguées passe par l'axe central et lui est perpendiculaire; que le volume du tétraèdre, déterminé par deux droites conjuguées, est constant pour tous les couples de droites. On fait également voir qu'un plan qui tourne autour d'une droite a son foyer sur la conjuguée de cette droite; d'où il s'ensuit que, si la droite autour de laquelle tourne le plan est perpendiculaire en un de ses points à l'axe du couple résultant, le plan tournant aura toujours son foyer sur cette même droite, laquelle, en vertu de cette propriété, est dite *conjuguée à elle-même*. On démontre enfin que, si, dans un système de droites équivalent à zéro, on a prouvé qu'une droite transversale rencontre toutes les droites moins une, elle devra rencontrer aussi cette dernière, et que, par conséquent, deux couples de droites conjuguées peuvent toujours être considérés comme des génératrices de même système d'un hyperboloïde.

L'auteur s'occupe ensuite d'examiner le mode de composition des aires, et traite en particulier de la détermination des composantes et des projections orthogonales sur trois plans coordonnés de l'aire d'un parallélogramme, s'ouvrant ainsi l'accès aux formules générales relatives à la composition d'un système de droites, et de là à d'autres formules d'un fréquent usage, parmi lesquelles est celle qui donne le volume du tétraèdre déterminé par deux droites, en fonction du *moment* de ces mêmes droites, en appelant, d'après Cayley, *moment de deux droites* le produit de leur distance minimum par le sinus de leur inclinaison mutuelle; d'où ce théorème remarquable : « Étant données quatre positions de l'une des génératrices d'un hyperboloïde, les moments de trois d'entre elles, combinées chacune avec la quatrième, sont respectivement proportionnels aux moments de ces trois mêmes droites, combinées chacune avec une tangente menée par un point quelconque de la quatrième. »

Des résultats très-importants sont exposés dans le paragraphe suivant, dans lequel on suppose donnés deux systèmes de droites, et l'on trouve une relation entre la somme des volumes des tétraèdres déterminés en combinant chaque droite d'un système avec chaque droite de l'autre et les moments de ces couples de droites, et entre la somme de ces volumes les deux droites résultantes et les deux couples résultants des deux systèmes, ou bien les composantes des deux droites résultantes et les projections orthogonales des deux couples résultants obtenus en rapportant le système à trois axes coordonnés. En effet, de ces relations on tire directement les équations de Bardelli et de Spottiswoode, exprimant la condition à laquelle doivent satisfaire des droites en nombre quelconque pour former un système équivalent à zéro, la démonstration du principe mécanique des vitesses virtuelles et celles de quelques beaux théorèmes de Chasles, relatifs aux mouvements infiniment petits que l'on peut imprimer à un corps sollicité par des forces dans des conditions déterminées.

L'auteur passe enfin à la composition des systèmes de points affectés de coefficients, laquelle le conduit naturellement à la détermination des centres de gravité des figures, et, en ajoutant une condition spéciale, à la détermination des centres harmoniques, dont il démontre les principales propriétés.

Ayant ainsi exposé la théorie de la composition des quantités géométriques, l'auteur l'applique aux systèmes de coordonnées homogènes. Il parle, en premier lieu, des coordonnées triangulaires de points et de droites, et, avec une simplicité et une clarté admirables, il fait découler de la théorie des moments des droites et des points, l'équation fondamentale exprimant la relation nécessaire qui existe entre les trois coordonnées d'un point rapporté aux trois côtés, ou d'une droite rapportée aux trois sommets du triangle; l'équation de la droite de l'infini; la condition du parallélisme de deux droites; l'expression de l'angle de deux droites; les équations de relation pour la transformation des coordonnées. De là il passe aux coordonnées tétraédriques de points et de plans et à celles de droites, et les questions analogues à celles que nous venons d'énumérer pour les coordonnées triangulaires sont résolues avec la même clarté et la même élégance, y compris le problème de la transformation des coordonnées. Ces applications offrent donc un nouveau moyen d'établir les principes fondamentaux de la méthode des coordonnées homogènes, et répandent une nouvelle lumière sur les relations entre les diverses espèces de coordonnées cartésiennes, triangulaires et tétraédriques.

Dans le second Mémoire, l'auteur se propose d'indiquer un point de départ pour la théorie de la relation projective, et de démontrer comment les lois qui régissent la composition des droites comprennent dans leur essence les principes fondamentaux de la *Nouvelle Géométrie des complexes* de Plücker.

La loi de la composition d'un système de points affectés de coefficients est le principe sur lequel on peut fonder celui de la relation projective. Soient sur une droite des points en nombre quelconque, affectés de coefficients déterminés. Si l'on divise chaque coefficient par la distance du point auquel le coefficient est attaché, à un point fixe de la droite, les points deviennent *harmoniques* par rapport au point fixe, et le point qui serait le centre de gravité des points donnés, si on les considérait comme affectés des nouveaux coefficients, devient le *centre harmonique* de ces mêmes points. Au moyen d'un faisceau de plans, projetons tous les points sur une transversale quelconque; si les coefficients des points ainsi déterminés sur la transversale sont supposés proportionnels à ceux de leurs correspondants, le centre harmonique des points de la transversale est le point correspondant au centre harmonique des points donnés. Du principe des moments on déduit ensuite que les deux systèmes de points situés, le premier sur la droite donnée, le second sur la transversale, sont liés entre eux par cette relation : que le rapport, appelé ordinairement *rapport anharmonique* (et que l'auteur voudrait qu'on nommât *rapport projectif*), de quatre points d'une droite, dont deux sont le point fixe relativement auquel les points sont harmoniques et le centre harmonique, et les deux autres sont deux des points harmoniques choisis à volonté, est égal au rapport anharmonique des quatre points correspondants de l'autre droite. Ainsi se trouve établi le lien intime entre deux systèmes de quatre points situés chacun sur une droite et ayant des rapports équianharmoniques, ou, suivant la dénomination proposée par l'auteur, des rapports projectifs égaux. En poursuivant cette voie, on arrive facilement à démontrer comment, sur deux droites, on peut considérer deux séries homographiques de points, une sur chaque droite, ou encore deux séries homographiques de points sur une seule droite, et, comme cas particulier, deux séries de points en involution; et l'on fait ressortir les propriétés fondamentales de ces séries, propriétés qui s'étendent aussi aux séries formées avec les éléments de deux faisceaux (rayons ou plans). Cette première Partie du Mémoire se termine par quelques applications aux coniques, tendant principalement à expliquer la manière de faire usage des principes précédemment établis dans les recherches géométriques.

La seconde Partie du Mémoire traite des *complexes linéaires* de Plücker, en vue d'indiquer le moyen de fonder la théorie des complexes linéaires sur celle des droites conjuguées équivalentes à un système de droites. Un système de droites, représenté par la droite résultante et par l'axe du couple résultant, peut, d'une infinité de manières, se transformer en un système de droites conjuguées; ou, en d'autres termes, dans un système de droites on peut considérer une infinité de couples de droites conjuguées. Cela posé, étant donné un système de droites, supposons qu'on veuille une autre droite, assujettie à la seule condition que la somme des deux tétraèdres, que l'on détermine en combinant chacune des deux droites d'un des couples de droites conjuguées du système donné avec la droite cherchée, soit nulle. Le système de toutes les droites propres à satisfaire la condition proposée constitue le *complexe linéaire* de Plücker. Il s'ensuit de là que les droites du complexe ne sont autres que les droites qui, dans le système donné, couperaient à la fois les deux droites d'un des couples (quel qu'il soit) de droites conjuguées, et qui auraient, par suite, la propriété d'être conjuguées à elles-mêmes; d'où il résulte que les propriétés des complexes sont les mêmes qui appartiennent à l'ensemble des droites qui, dans un système donné de droites, sont conjuguées à elles-mêmes, et partant que les lois de la composition et de la transformation d'un système de droites suffisent pour rendre immédiatement évidentes toutes les propositions de Plücker sur les propriétés d'un complexe linéaire. Cette dernière conséquence est confirmée par l'auteur, à l'aide de plusieurs exemples tirés des propriétés qui avaient déjà été énoncées par Chasles dans la supposition que les droites représentaient des rotations simultanées.

La coexistence de deux complexes donne naissance à une *congruence linéaire,* qui est l'ensemble des droites communes aux deux complexes. La théorie des congruences est exposée par l'auteur avec sa clarté habituelle, et il démontre que les lois de la composition des systèmes de droites, quand on les a présentes à l'esprit, rendent intuitives les principales propriétés des congruences; il démontre que les trois congruences de trois complexes coexistants forment un hyperboloïde réglé, et il en déduit les théorèmes de Binet et de Plücker, relatifs, le premier au parallélépipède formé en menant par chaque directrice de l'hyperboloïde deux plans parallèles aux deux autres, le second au parallélépipède formé en menant par les six directrices des trois congruences autant de plans parallèles aux trois plans centraux des congruences elles-mêmes. Le Mémoire se termine par la considération des coordonnées tangentielles dans les complexes.

Ce court résumé des deux Mémoires du professeur Chelini n'a pas eu pour but d'en faire ressortir le mérite et d'en recommander la lecture aux jeunes géomètres, le nom de l'auteur étant largement suffisant pour atteindre ce but; mais plutôt de faire voir comment la théorie de la composition des droites, des aires et des points est d'une importance capitale, non-seulement parce que, en supposant que les droites représentent des forces ou des mouvements, elle fournit une solution géométrique des problèmes de la Mécanique rationnelle, et plus particulièrement de ceux qui sont relatifs aux mouvements de rotation, tels qu'ils ont été considérés par Chasles, mais aussi parce qu'elle peut être très-avantageusement prise pour base des diverses théories géométriques, les ramenant toutes aux mêmes principes, et établissant ainsi entre elles un lien rationnel et mettant en évidence leurs relations intimes. Si j'ai atteint mon but, le lecteur voudra bien admettre cette assertion, qu'*il serait très-opportun d'introduire dans nos écoles une étude sérieuse et suffisamment étendue de la* THÉORIE DE LA COMPOSITION DES SYSTÈMES DES QUANTITÉS GÉOMÉTRIQUES *comme fondement non-seulement de la Mécanique rationnelle, mais aussi des diverses théories géométriques, en faisant descendre celles-ci de la première comme d'une source commune.*