BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Revue bibliographique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 6 (1874), p. 65-76

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1874__6__65_0>

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

BRIOT et BOUQUET, professeurs à la Faculté des Sciences. — THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES. 2e édition. Premier fascicule. In-4°, 416 p. — Paris, Gauthier-Villars. — Prix : 30 fr.

La première édition de la *Théorie des fonctions doublement périodiques et, en particulier, des fonctions elliptiques*, était depuis longtemps épuisée. Les rares exemplaires qui se trouvaient dans le commerce avaient atteint un prix élevé. Cet excellent Ouvrage, qui a marqué un progrès si considérable dans l'étude des fonctions d'une variable imaginaire, était sur le point de manquer aux jeunes géomètres. Nous devons donc remercier d'abord MM. Briot et Bouquet d'avoir bien voulu nous donner une nouvelle édition de leur travail, considérablement étendue et mise en rapport avec les progrès les plus récents de l'Analyse. Le premier fascicule seul de la nouvelle édition a paru; mais nous avons lieu de penser que, dans quelques semaines, l'Ouvrage sera complétement terminé. Nous attendrons l'apparition du deuxième fascicule pour indiquer d'une manière générale le plan et le but des auteurs; mais, dès à présent, nous devons rendre un compte détaillé des sujets importants traités dans la partie que nous avons sous les yeux. Nous nous contenterons de faire remarquer que l'exposition des matières a reçu un développement qui en accroît de beaucoup l'intérêt et la portée; plusieurs Chapitres sont entièrement nouveaux, en sorte que la première édition peut tout au plus être considérée comme un abrégé de la nouvelle. Les auteurs donnent, cette fois, tous les développements nécessaires pour l'intelligence complète des théorèmes, et nous sommes convaincu que leur Ouvrage servira désormais de guide sûr et clair aux personnes désireuses de bien approfondir la théorie des variables imaginaires.

La *Théorie des fonctions elliptiques* est divisée en Livres; les Livres se subdivisent en Chapitres.

Le Livre Ier est intitulé : les *Fonctions algébriques*.

Il traite de la représentation des variables imaginaires et de la définition des fonctions et de leurs dérivées. Les auteurs ont changé les dénominations qu'ils avaient autrefois adoptées d'après Cauchy.

C'est ainsi qu'ils appellent *monotropes à l'intérieur d'un contour* C toutes les fonctions qui n'ont qu'une seule valeur pour un point z, situé à l'intérieur de ce contour, quel que soit le chemin qu'on suive à l'intérieur de ce contour pour arriver du point initial z_0, où la valeur de la fonction est donnée, au point considéré z. Une fonction rationnelle est monotrope dans toute l'étendue du plan. La fonction est dite *holomorphe* quand elle est monotrope et a une dérivée dans toute l'étendue du plan considéré. Les *pôles* sont les points pour lesquels la fonction u devient infinie, mais de telle manière que la fonction $\frac{1}{u}$ demeure holomorphe dans le voisinage du pôle. Enfin les fonctions *méromorphes* sont celles qui sont holomorphes dans toute une partie du plan, excepté en certains pôles. A cette classe appartiennent, par exemple, les fractions rationnelles. Ajoutons que, pour étudier la fonction quand la variable devient infinie, les auteurs, à l'exemple de Riemann, emploient la transformation par rayons vecteurs réciproques, qui rend de si grands services, en ramenant l'étude de la fonction pour les valeurs infinies à l'examen de ce qui se passe autour d'un point.

Les premières fonctions étudiées sont les fonctions algébriques. Le Chapitre II est consacré à la démonstration du théorème fondamental sur la théorie des équations, au théorème de Cauchy sur les racines imaginaires, à l'étude de ces racines et aux lois de leur permutation autour des points critiques. Plusieurs exemples numériques permettent au lecteur de se familiariser avec les propriétés si importantes des fonctions algébriques.

Le Livre II traite des *Fonctions définies par les séries*.

Le Chapitre I^{er} comprend l'étude des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de la variable. L'application des principes établis aux fonctions e^z, $\sin z$, $\cos z$ et aux fonctions inverses fait l'objet du Chapitre suivant. Les auteurs examinent ensuite la théorie des séries à double entrée, et de la fonction $\Theta(z)$ définie par la série

$$\Theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{nz+n^2u}.$$

Ils démontrent que cette fonction est holomorphe dans toute l'étendue du plan, qu'elle est paire et simplement périodique, etc.

Cette fonction, par des transformations très-simples, donne naissance à quatre autres fonctions, dont les quotients sont les fonctions elliptiques. L'étude des propriétés les plus élémentaires de ces fonctions termine le Livre II.

Le Livre III traite des *Intégrales définies*. Après avoir exposé les principes essentiels et leur application à quelques exemples très-élégants, mais particuliers, MM. Briot et Bouquet abordent la conséquence la plus importante de ces principes, je veux dire le développement des fonctions en séries ordonnées suivant les puissances entières de la variable. Ils donnent le théorème de Taylor, tel qu'il a été démontré par Cauchy, et en font l'application à la formule de Lagrange. Les conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence de cette série sont bien connues : elles ont été indiquées avec toute la netteté possible par Cauchy et par F. Chiò. Il n'y a donc plus rien de nouveau à établir sur cette question, et ce qui a pu faire illusion, dans ces derniers temps, à quelques géomètres, c'est que, dans son beau Mémoire sur cette série, M. Rouché s'est contenté de donner une condition suffisante pour la convergence, mais nullement nécessaire. MM. Briot et Bouquet traitent cette question avec une clarté parfaite, et en donnent des exemples qui ne peuvent laisser de doute dans l'esprit de personne. Le Livre se termine par l'examen de la question difficile des périodes, où les auteurs ont mis à profit, en les développant, les recherches de leurs devanciers, en particulier celles de MM. Clebsch et Gordan.

Les Livres précédents étudient la génération des fonctions par les équations implicites, par les séries, par les intégrales définies, et préparent l'examen des propriétés générales des fonctions, qui fait l'objet du Livre IV.

C'est dans ce Livre que sont étudiés les caractères distinctifs qui séparent une fonction entière, ou simplement rationnelle, ou algébrique irrationnelle de z, de toutes les autres fonctions ; les propriétés de la partie réelle et de la partie imaginaire d'une fonction; et enfin les théorèmes généraux relatifs aux fonctions doublement périodiques. Les auteurs commencent par démontrer les propositions qui figurent dans la première édition, et en particulier les beaux théorèmes de M. Liouville, sur le nombre des zéros et des infinis, sur l'expression de toute fonction périodique au moyen d'une fonction du second ordre et de sa dérivée; ils ajoutent plusieurs propositions nouvelles et très-générales, au nombre desquelles nous citerons la suivante :

« Étant donnée une fonction méromorphe doublement périodique $u = f(z)$, de l'ordre n, aux périodes élémentaires ω, ω', toute autre fonction méromorphe qui admet ces deux périodes s'exprime rationnellement au moyen de la première fonction et de sa dérivée. »

Le Chapitre V est consacré à l'exposition de la méthode générale pour le développement d'une fonction en une somme composée d'une infinité de termes rationnels, et à l'application de cette méthode aux fonctions circulaires et elliptiques.

Le Chapitre VI comprend le développement des fonctions en produits, les propriétés de ces produits, et l'application de la méthode générale à $\sin z$, $\cos z$, aux fonctions θ et aux fonctions elliptiques proprement dites.

Le Livre V traite d'un mode de génération des fonctions, que les auteurs avaient réservé avec juste raison, car son étude détaillée exige des connaissances plus étendues; nous voulons parler de la définition par des équations différentielles. Les travaux de MM. Briot et Bouquet sur cette question sont bien connus : ils ont pris place dans plusieurs Traités classiques de Calcul intégral; les auteurs les exposent avec tous les développements nécessaires; ils examinent notamment le cas où le coefficient différentiel devient indéterminé ou infini. Cet examen, sans doute, avait été fait dans le Mémoire original des auteurs, mais il ne figurait pas dans l'édition précédente. La méthode générale est ensuite appliquée à la fonction logarithmique et aux fonctions elliptiques.

Le Chapitre IV traite de l'*Intégration par les fonctions elliptiques*. MM. Briot et Bouquet examinent une équation différentielle, algébrique et irréductible, entre u et $\frac{du}{dz}$, ne contenant pas la variable z, et ils énoncent les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elle admette une intégrale monotrope. Ces conditions sont les suivantes. Si l'équation est

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^m + f_1(u)\left(\frac{du}{dz}\right)^{m-1} + \ldots + f_m(u) = 0,$$

1° les coefficients $f_1(u), \ldots, f_m(u)$ doivent être des polynômes entiers, et, au plus, le premier du second degré, le second du quatrième degré,..., le dernicr du degré $2m$; 2° chaque racine de l'équation, tant qu'elle ne devient pas nulle, doit rester holomorphe par rapport à u; 3° chaque racine nulle et d'un degré plus petit que l'unité doit être du degré $1-\frac{1}{p}$, p étant le nombre des racines du système circulaire auquel elle appartient; 4° enfin l'équation différentielle, déduite de la proposée en posant $u=\frac{1}{v}$, doit présenter, pour $v=0$, les mêmes caractères.

Les auteurs examinent ensuite dans quels cas l'intégrale sera algébrique, simplement ou doublement périodique et font ensuite l'application des résultats généraux aux équations binômes et trinômes. L'indication de la méthode générale d'intégration termine le premier fascicule.

L'analyse précédente aura sans doute fait ressortir tout l'intérêt et toute la richesse des matériaux mis en œuvre dans cette première Partie de l'Ouvrage, qui ne comprend pas moins de cinquante-deux feuilles d'impression. Cependant l'éditeur, M. Gauthier-Villars, annonce que la seconde Partie sera à peu près aussi volumineuse que la première. Nous aurons donc enfin un Traité complet et classique, un véritable monument, remplaçant avantageusement l'Ouvrage vieilli de Legendre. G. D.

PLATEAU (J.). — STATIQUE EXPÉRIMENTALE ET THÉORIQUE DES LIQUIDES SOUMIS AUX SEULES FORCES MOLÉCULAIRES. 2 vol. grand in-8°, avec figures dans le texte, 450 et 495 p. — Gand, Clemm; Paris, Gauthier-Villars; 1873. Prix : 15 fr.

On connaît aujourd'hui les procédés par lesquels M. Plateau annule l'effet de la pesanteur sur un liquide, de manière que celui-ci prend alors la figure qu'il affecterait si cette force n'agissait pas sur lui. L'auteur a exposé les nombreuses applications de ses procédés dans une suite de Mémoires dont plusieurs journaux scientifiques ont donné des résumés. Ces Mémoires sont épars dans sept volumes de la collection de l'Académie de Belgique, de 1843 à 1868. L'auteur a réuni aujourd'hui toutes ses recherches dans un seul Ouvrage, sous le titre indiqué ci-dessus. Voici les matières principales dont il traite :

1° Réalisation, à l'aide du premier procédé (celui de l'immersion d'une masse d'huile dans un alcool dilué de même densité), des figures d'équilibre, et spécialement de celles de révolution ; étude détaillée de ces figures, par la théorie et par l'expérience.

2° Réalisation des mêmes figures par le deuxième procédé (celui des lames liquides minces).

3° Recherche d'une limite supérieure très-petite du rayon d'activité sensible de l'attraction moléculaire.

4° Tension des surfaces liquides et des lames liquides; historique. Théorie de la génération de ces lames. Assemblages laminaires, leur développement, leurs lois.

5° Recherche des causes principales d'où dépendent le facile développement et la persistance des lames liquides; ces causes résident dans un rapport convenable entre la tension et une viscosité propre des deux couches superficielles; historique de la viscosité superficielle; historique des lames liquides.

6° Étude, par l'expérience et par la théorie, des conditions de stabilité des figures d'équilibre. L'examen de ces conditions à l'égard du cylindre conduit à une théorie complète de la constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires. Le liquide d'une semblable veine se meut, à la vérité, sous l'action de la pesanteur; mais on comprend que, pendant la chute libre d'un liquide, la pesanteur ne met point d'obstacle au jeu des forces moléculaires. Accord constant de cette théorie avec les belles expériences de Savart. Historique de la constitution des veines liquides.

FRENET (F.), professeur honoraire à la Faculté des Sciences de Lyon. — RECUEIL D'EXERCICES SUR LE CALCUL INFINITÉSIMAL. Troisième édition. 1 vol. in-8°, XIV-410 p. — Paris, Gauthier-Villars; 1873. Prix : 7 fr. 50.

Nous avons le plaisir d'annoncer la publication de la troisième édition de cet Ouvrage, qui a déjà rendu tant de services à l'enseignement, et dont le mérite a été apprécié de tous ceux qui s'occupent de l'étude de l'Analyse infinitésimale. Les Recueils de cette nature sont extrêmement multipliés en Angleterre, et surtout en Allemagne, tandis que l'Ouvrage de M. Frenet est unique en

France; mais, grâce aux soins que le savant et consciencieux auteur a apportés à la rédaction de son Ouvrage, et aux améliorations qu'il a introduites dans les éditions successives, le Recueil français peut à lui seul remplacer presque tous les autres; et aucun de ceux que nous avons sous les yeux ne l'égale pour la variété et le choix judicieux des exemples, et surtout pour les compléments théoriques qui s'y trouvent intercalés.

M. Frenet s'est préoccupé avant tout de graduer la difficulté des exercices, particulièrement dans les questions de pur calcul. Ayant reconnu, dans sa longue expérience de l'enseignement, combien il est important pour les commençants de se familiariser aussitôt que possible avec le maniement du calcul, il n'a pas craint de donner un développement considérable aux Chapitres consacrés à la différentiation et à l'intégration des fonctions explicites, et il a accordé, avec raison, à l'intégration des équations différentielles une place beaucoup plus étendue qu'on ne l'a fait dans la plupart des autres Recueils.

La division de l'Ouvrage est celle qui est adoptée dans le plus grand nombre des Cours de Calcul infinitésimal. Le volume comprend trois Parties, consacrées la première au Calcul différentiel, la deuxième au Calcul intégral, et la troisième à des questions diverses. Chaque Partie contient un recueil d'énoncés, à la fin duquel se trouve le recueil des réponses correspondantes, distribuées de la même manière en Chapitres. Peut-être eût-il été préférable, pour la facilité des recherches, que les trois recueils de questions eussent été placés à la suite les uns des autres, sans être mêlés avec les solutions.

L'auteur a voulu donner à ses lecteurs une idée de diverses théories utiles qu'un Cours classique ne renferme pas nécessairement; aussi a-t-il introduit dans son Livre des notions sur les séries doubles et les produits infinis, deux modes de développement si importants et sujets à tant de difficultés; sur les opérations symboliques; sur la notation, trop peu connue, des fonctions hyperboliques; sur les nombres de Bernoulli, sur les points associés, etc. Il a traité un petit nombre de questions de Physique, parmi lesquelles figurent la formule de Lambert, généralisant celle de Petit, et le théorème de Dupin généralisant celui de Malus.

M. Frenet a pris soin, dans les applications à la Géométrie, de prendre pour sujets d'exercices la plupart des courbes célèbres qui rentraient dans son cadre : épicycloïde, hypocycloïde, cissoïde, conchoïde, logarithmique, chaînette, spirale logarithmique, tractoire, ellipse sphérique, loxodromie, courbe élastique, etc., en y rattachant quelques indications historiques, quand il y avait lieu. La réunion des articles relatifs à une même courbe, étant facilitée par des renvois, donne souvent de cette courbe une étude assez complète.

Toutes les fois qu'il a pu mettre une question, même très-simple, sous le patronage d'un nom célèbre, il a eu soin de le faire, persuadé que par là on relève un détail, même insignifiant, et on lui donne de l'intérêt.

Le Chapitre consacré à la Géométrie à trois dimensions mérite particulièrement l'attention; il renferme les recherches propres à l'auteur, où se trouvent établies ses formules si simples et si remarquables concernant la double courbure des lignes.

Pour exécuter le travail considérable qu'a dû lui coûter la rédaction d'un Recueil aussi étendu et aussi soigneusement élaboré, M. Frenet s'est servi avant tout des sources originales et a puisé de préférence ses exemples dans les œuvres des grands maîtres. Il s'est inspiré aussi des publications analogues répandues dans les pays voisins, et principalement de l'excellente collection due à D.-F. Gregory (1).

La seconde édition du présent Recueil, publiée en 1866, se distinguait de la première (1856) par des additions assez considérables, qui en avaient notablement accru le volume. Celle-ci n'apporte à la précédente que des améliorations de détail, parmi lesquelles nous citerons l'intercalation des figures dans le texte. J. H.

BERGER (Alexander). — OM PERIODISKA FUNKTIONER. Akademisk afhandling. — Upsala; 1873 (2).

Dans le premier paragraphe de ce Mémoire, j'ai étudié quelques propriétés des fonctions $f(z)$, telles que, en chaque point du plan,

(1) *Examples of the Processes of the Differential and Integral Calculus.* 2d edition, Cambridge; 1846. 1 vol. in-8°.

(2) BERGER (Al.). — *Sur les Fonctions périodiques.* Thèse doctorale. In-8°, 51 p. (Analyse rédigée par l'auteur.)

l'une ou l'autre des fonctions $f(z)$, $\frac{1}{f(z)}$ soit toujours synectique. Une pareille fonction prend évidemment en chaque point une valeur indépendante du chemin parcouru par z; de plus, elle ne perd sa synecticité qu'en des points isolés, où elle devient infinie. Pour abréger, j'ai donné à de telles fonctions le nom de *hémisynectiques*. Parmi les propositions que j'ai démontrées concernant ces fonctions, je citerai ici les deux suivantes :

I. Si $f(z)$ est une fonction hémisynectique, telle qu'aucune des deux équations

$$f(z) = A_1, \quad f(z) = A_2$$

n'ait de racine située sur un contour fermé donné; si, en même temps, une variable A peut passer d'une manière continue de A_1 en A_2, sans rencontrer aucune valeur pour laquelle l'équation

$$f(z) = A$$

ait une racine située sur le contour, les deux équations

$$f(z) = A_1, \quad f(z) = A_2$$

auront le même nombre de racines à l'intérieur du contour.

II. S'il se trouve au moins deux valeurs que la fonction hémisynectique $f(z)$ ne puisse prendre pour $z = \infty$, par quelque chemin que l'on fasse tendre z vers l'infini, $f(z)$ sera une fonction rationnelle de z.

Le paragraphe II contient une théorie de la classe des fonctions périodiques hémisynectiques qui jouissent de la propriété que $f(z)$ converge vers une valeur déterminée (finie ou infinie) et indépendante du point de départ du mouvement de z, lorsque z va vers l'infini perpendiculairement à la direction de la période ω, et cela soit que z se meuve à droite ou à gauche de ω. Si ρ désigne une quantité réelle et positive, cette propriété peut s'exprimer par les deux équations

$$\lim f(z + \rho i\omega) = \mathrm{H},$$
$$\lim f(z - \rho i\omega) = \mathrm{K},$$

pour $\rho = \infty$, H et K étant deux quantités déterminées et indépendantes de z. Déduire purement et simplement de la notion de périodicité les propriétés de ces fonctions, tel est le but que je me suis proposé. On obtient d'abord, par une modification d'un théorème énoncé plus haut, la proposition suivante :

« Dans chaque intervalle périodique, l'équation $f(z) = \mathrm{A}$ a un nombre de racines fini et indépendant de A, tant que A n'est pas égal à H ou à K. »

En se fondant sur ces considérations, les fonctions dont il s'agit ici se partagent, d'après le nombre des racines contenues dans chaque intervalle, en fonctions du premier, du deuxième, du troisième,... ordre. Comme supplément à ce théorème, j'ai démontré que, pour les fonctions périodiques du premier ordre, l'équation $f(z) = \mathrm{H}$ n'est satisfaite par aucune valeur autre que

$$z = \lim(z + \rho i \omega),$$

et l'équation $f(z) = \mathrm{K}$ par aucune valeur autre que

$$z = \lim(z - \rho i \omega).$$

Si, $u = f(z)$ étant une fonction périodique du premier ordre, et $v = \mathrm{F}(z)$ une fonction périodique du $n^{\text{ième}}$ ordre, on ne trouve, pour chaque valeur de u, qu'une seule valeur correspondante de v, on démontre encore facilement que, en chaque point, soit v, soit $\frac{1}{v}$, est une fonction synectique de u, de sorte que v est une fonction hémisynectique de u; de plus, cette fonction, qui converge évidemment vers une valeur finie et déterminée, lorsque u tend vers l'infini en suivant n'importe quel chemin, doit, en vertu du théorème du paragraphe I, être rationnelle. Ainsi se trouve démontrée la proposition suivante :

« Si u et v sont deux fonctions périodiques du premier et du $n^{\text{ième}}$ ordre respectivement, et ayant la même période, v est une fonction rationnelle du $n^{\text{ième}}$ degré de u. »

Parmi les théorèmes que j'ai déduits de cette proposition, je citerai les deux suivants :

1° *Toute fonction périodique $u = f(z)$ du premier ordre sa-*

tisfait à une équation différentielle de la forme

$$\frac{du}{dz} = A + Bu + Cu^2,$$

A, B, C *étant des constantes.*

2° *Toute fonction périodique $v = f(z)$ du $n^{ième}$ ordre, synectique dans toute l'étendue du plan, satisfait à une équation différentielle linéaire du $n^{ième}$ ordre à coefficients constants et à second membre constant.*

Jusqu'ici nous n'avons rien dit sur la question de l'existence réelle ou de la non-existence des fonctions périodiques. S'il existe de telles fonctions du premier ordre, il faut les chercher parmi les intégrales de l'équation différentielle

$$\frac{du}{dz} = A + Bu + Cu^2,$$

et la discussion de cette équation fait voir que, tant que l'on n'a pas

$$4AC - B^2 = 0,$$

elle est satisfaite par une fonction du premier ordre, ayant pour période $\frac{2\pi}{\sqrt{4AC - B^2}}$.

Dans le paragraphe III, j'ai appliqué la théorie précédente aux fonctions circulaires. Après avoir posé les définitions suivantes :

1. Par $\tang z$, on entend la fonction périodique impaire du premier ordre de z, qui a pour période π, et qui prend pour $z = 0$ la valeur zéro, et pour $z = \frac{\pi}{4}$ la valeur 1 ;

2. Par $\cot z$, on entend la fonction périodique impaire du premier ordre de z, qui a pour période π, et qui prend pour $z = 0$ la valeur ∞, et pour $z = \frac{\pi}{4}$ la valeur 1 ;

3. Par $\sin z$, on entend la fonction périodique impaire du second ordre, synectique dans toute l'étendue du plan, qui a pour période 2π, et qui prend pour $z = \frac{\pi}{2}$ la valeur 1 ;

4. Par $\cos z$, on entend la fonction périodique paire du second ordre, synectique dans toute l'étendue du plan, qui a pour période 2π, et qui prend pour $z = 0$ la valeur 1, et pour $z = \pi$ la valeur -1;

J'ai déduit de ces seules définitions les propriétés les plus importantes des fonctions circulaires et leurs relations mutuelles.

A. Berger.