Revue des publications périodiques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 6 (1874), p. 28-57

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1874__6__28_0>

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

ATTI DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI, compilati dal Segretario. — Roma. In-4° (¹).

T. XXIV; 1870-1871.

VOLPICELLI (P.). — *Sur l'induction électrostatique, ou influence électrique. Mémoire historique et critique.* (4 art., 131 p.)

Suite d'un travail inséré au tome XXIII des *Atti*.

RESPIGHI (L.). — *Sur les observations spectroscopiques du bord et des protubérances solaires, faites à l'Observatoire du Capitole.* (51 p.)

RESPIGHI (L.) — *Observation de l'éclipse de Soleil du 22 décembre 1870, à l'Observatoire du Capitole.* (4 p.)

VOLPICELLI (P.). — *Sur certaines transformations de force vive en calorique, et sur la question qui s'y rapporte, tant entre le P. Grossi et Galilée, que sur le frottement de l'air.* (29 p.)

VOLPICELLI (P.). — *Sur les variations de température produites, soit par le choc d'un courant d'air, soit par l'absorption de l'air par les poussières : formules pour déterminer la dépendance entre la quantité absorbée et le calorique qui s'y développe, ainsi que pour traduire les indications d'un thermomètre à air quelconque dans celles d'un thermomètre à mercure.* (2 art., 40 p.)

RESPIGHI (L.). — *Sur la constitution physique du Soleil.* (14 p.)

RESPIGHI (L.). — *Sur la lunette zénithale de l'Observatoire de l'Université Royale, au Capitole.* (20 p.)

VOLPICELLI (P.). — *Note sur le plan d'épreuve.* (3 p.)

VOLPICELLI (P.). — *Sur la doctrine de Galilée, concernant la résistance relative des poutres.* (13 p.)

L'auteur donne la démonstration mathématique de plusieurs lois

(¹) L'*Accademia Reale dei Lincei* existe, depuis 1870, distincte de l'*Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei*, dont elle a conservé les règlements et le mode de publication. Voir *Bulletin*, t. II, p. 19.

découvertes par Galilée sur la résistance que les poutres de diverses formes opposent à la rupture.

T. XXV; 1871-1872.

Volpicelli (P.). — *Sur les courants électriques, autrefois dits* de flexion (9 p.)

Cantoni (G.). — *Sur un travail critique du professeur Eccher, concernant l'électrophore et l'induction électrique.* (2 art., 5-6 p.)

Keller (F.). — *Sur la déviation du fil à plomb près des Frattocchie.* (4 p.)

Cette Note indique les résultats obtenus par l'auteur dans ses recherches sur la déviation du fil à plomb, à l'extrémité orientale de la base trigonométrique de la Voie Appienne, causée par le cratère Laziale. La montagne étant décomposée en couches horizontales de 1 mètre d'épaisseur, on a calculé les attractions exercées sur le fil à plomb par chacune de ces couches, en faisant certaines hypothèses sur leurs densités.

Volpicelli (P.). — *Solution complète et générale, par la Géométrie de situation, du problème relatif à la marche du cavalier sur un échiquier quelconque.* (2 art., 73-92 p., 1 tableau.)

Le cavalier, étant assujetti à ne pas toucher deux fois la même case de l'échiquier, pourra passer d'une case donnée à une autre, soit en parcourant toutes les cases de l'échiquier, soit en n'en parcourant qu'une partie. M. Volpicelli distingue ces deux modes de parcours sous les noms de *courses totales* et de *courses partielles*. Il se propose, dans ce Mémoire, de trouver le nombre et la forme de toutes les courses totales et partielles que peut faire le cavalier sur un échiquier de forme quelconque, en partant de chacune des cases. Ce problème comprend le suivant : Trouver le nombre et la forme des divers chemins par lesquels le cavalier, sur un échiquier de forme quelconque, peut arriver d'une case donnée à une autre case donnée, sans jamais repasser deux fois par la même case. L'auteur considère aussi bien les courses partielles que les courses totales, les seules dont on se fût occupé jusqu'à présent. Il parvient à la solution de la question par une méthode rationnelle, exclusive de tout tâtonnement et n'exigeant pas que l'on ait l'échiquier sous les yeux. Aux deux modes déjà connus de représentation de la marche du cavalier, soit par des numéros, soit par des lignes joignant les centres des cases, il en ajoute deux nouveaux. Le Mémoire contient un historique très-complet sur les travaux auxquels a donné lieu ce problème célèbre.

RESPIGHI (L.). — *Observation de l'éclipse totale de Soleil du 12 décembre* 1871. (21 p.)

Relation des observations faites par l'auteur dans la station de Poodoocottah, gouvernement de Madras, où il s'était rendu en compagnie de l'expédition anglaise, conduite par M. Lockyer.

RESPIGHI (L.). — *Sur le spectre de la lumière zodiacale et de la lumière des aurores polaires.* (3 p.)

Dans son voyage aux Indes-Orientales, l'auteur a pu observer, dans la lumière zodiacale, la raie lumineuse, signalée déjà par M. Ångström, et dont M. Liais avait contesté l'existence. Il considère comme probable l'identité de la lumière zodiacale avec celle des aurores polaires.

BATTAGLINI (G.). — *Note sur la conique par rapport à laquelle deux coniques données sont polaires réciproques.* (8 p.)

Cette question, résolue par M. Cremona, dans son *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane,* à l'aide de considérations purement géométriques, a été traitée dans les *Actes de l'Académie de Modène,* par le professeur F. Ruffini, au moyen des coordonnées cartésiennes; mais la complication des formules obtenues n'a pas permis à cet auteur de discuter le problème dans toute sa généralité. M. Battaglini a repris ce sujet par les méthodes plus simples et plus élégantes de la Géométrie moderne; il a appliqué en outre à cette question la théorie des invariants.

RESPIGHI (L.). — *Réponse à la Note du P. Secchi, intitulée :* « Sur la dernière éclipse du 12 décembre 1871 ». (14 p.)

TARRY (H.). — *De la prédiction du mouvement des tempêtes et des phénomènes qui les accompagnent.* (16 p.; fr.)

RESPIGHI (L.). — *Sur les observations spectroscopiques du bord et des protubérances solaires, faites à l'Observatoire de l'Université romaine, au Capitole.* 5[e] Note. (70 p.)

§ I. Structure, hauteur et composition de la chromosphère. — § II. Formes des protubérances. — § III. Dimensions des protubérances. — § IV. Origine, développement et transformations des protubérances. — § V. Durée des protubérances. — § VI. Fréquence des protubérances et ses variations périodiques. — § VII. Distribution des protubérances sur la surface du Soleil, et ses variations périodiques. — § VIII. Relations des protubérances avec les facules. — § IX. Relations des protubérances avec les taches. — § X. Conformation du bord solaire ou de la photosphère sur le contour des taches. — § XI. Relations des protubérances, ou éruptions solaires avec les aurores boréales. — § XII. Sur la cause des variations périodiques des protubérances et des taches solaires.

Keller (F.). — *Sur l'attraction d'un parallélépipède.* (11 p.)

L'auteur s'est proposé, dans cette Note, la résolution du problème suivant : « Trouver le rapport des arêtes d'un parallélépipède rectangle, d'après la condition que les attractions de ce solide sur les centres de ses faces soient égales entre elles ». Outre le cube, on trouve au moins deux prismes à base carrée satisfaisant à la question, et dont les arêtes x, y, z sont telles que, pour l'un, $y = z = \frac{x}{13,95}$, et pour l'autre, $y = z = 2,24x$. La Note se termine par une remarque sur un précédent travail de l'auteur, relatif à l'attraction d'une calotte sphérique.

Siacci (Fr.). — *Note sur les formes quadratiques.* (3 p.)

« U et V étant deux formes quadratiques à n variables, U′ et V′ leurs réciproques, on peut toujours, par une même substitution linéaire, passer de U à AV′ et de V à BU′, A et B étant les discriminants de U et de V; le déterminant C′ de la substitution est symétrique et égal à la moyenne géométrique entre les discriminants des formes U′ et V′. Si l'on considère C′ comme le discriminant d'une fonction W′, on peut, par la même substitution linéaire, réduire les trois formes U′, V′, W′ à ne contenir que les carrés des variables, et alors un coefficient de W′ est égal à la moyenne géométrique entre les coefficients homologues de U′ et de V′. M. Battaglini a trouvé que la conique, par rapport à laquelle deux autres coniques données sont polaires réciproques, jouit précisément de la même propriété; d'où l'on peut conclure que, dans le cas de

$n = 3$, W' représente la conique par rapport à laquelle U' et V' sont polaires réciproques. »

BRUSOTTI. — *Considérations sur la loi de Richmann et sur les calories de température des corps.* (8 p.)

BRUSOTTI. — *Détermination de la chaleur spécifique des corps au moyen de la quantité constante de chaleur développée par une action chimique déterminée.* (2 p.)

BRUSOTTI. — *Relation entre le travail nécessaire pour soulever le plateau d'un électrophore et la déviation galvanométrique correspondante.* (6 p.)

ORSONI (Fr.). — *Divers systèmes pour analyser l'intensité relative de deux ou plusieurs sources de lumière.* (6 p.)

BULLETIN DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE SAINT-PÉTERSBOURG [1].

T. XVII; 1871-72.

SAVITSCH (A.). — *Observations des planètes à l'Observatoire astronomique de l'Académie des Sciences.* (2 art., 6 col.)

JACOBI (M. v.). — *Note sur la fabrication des étalons de longueur par la galvanoplastie.* (5 col.)

MÖLLER (A.). — *Calculs de la comète de Faye.* (3 col.; all.)

L'auteur, ayant repris en entier le calcul des perturbations de cette comète, en a déduit les corrections qu'il faut appliquer aux éléments donnés dans le n° 1522 des *Astronomische Nachrichten*. Il parvient aux conclusions suivantes :

1° Qu'il ne s'est encore produit aucun raccourcissement sensible du temps de la révolution;

2° Que la masse de Jupiter adoptée par Bessel s'accorde complétement avec les observations de la comète.

WILD (H.). — *Sur un nouvel instrument pour l'observation des variations de l'intensité verticale du magnétisme terrestre.* (9 col.; all.)

---

(1) Voir *Bulletin*, t. I, p. 240.

T. XVIII; 1872.

Middendorff (A.-Th. v.). — *Quelques nouvelles observations servant à la connaissance du courant du cap Nord.* (5 col.; all.)

Jacobi (M. v.). — *Réduction galvanique du fer sous l'action d'un puissant solénoïde électromagnétique.* (7 col.; all.)

Glasenapp (M.-S.). — *Observations des satellites de Jupiter.* (12 col.)

Les astronomes sont d'accord sur la nécessité de refondre la théorie des satellites de Jupiter, donnée par Laplace. Malheureusement les observations de ces astres ayant été extrêmement négligées dans ces derniers temps, il serait difficile de déterminer aujourd'hui, avec une précision suffisante, les nouvelles constantes de cette théorie. M. Glasenapp, après avoir rappelé les recherches de Bailly sur les éclipses de ces satellites, donne le tableau des observations les plus récentes, faites, par divers astronomes, à Poulkova et à Moscou.

Somof (J.). — *Sur les vitesses virtuelles d'une figure invariable, assujettie à des équations de condition quelconques de forme linéaire.* (23 col.)

« M. Mannheim, dans son Mémoire intitulé : *Étude sur le déplacement d'une figure de forme invariable* (¹), a trouvé, par une voie purement géométrique, diverses propriétés intéressantes des déplacements infiniment petits, ou des vitesses virtuelles, d'une figure invariable, en admettant que ces déplacements sont assujettis à des conditions descriptives, capables d'être réduites à une ou à plusieurs conditions simples savoir : « qu'un point de la » figure doit se déplacer sur une surface immobile. » Or cette condition n'est pas la plus générale; elle n'est qu'un cas particulier d'une autre, qui peut être exprimée par une équation quelconque de forme linéaire et homogène par rapport aux projections sur trois axes de la vitesse de translation et de la vitesse angulaire de rotation portées sur l'axe instantané, appartenant à un mouvement quelconque que peut avoir la figure invariable.

» Dans le présent Mémoire, l'auteur donne un moyen analytique

(¹) Voir *Bulletin*, t. I, p. 297.

pour déterminer les vitesses virtuelles d'une figure invariable, en supposant que ces vitesses doivent satisfaire à des équations de condition de la forme générale qu'on vient de citer. Il prend en même temps en considération les propriétés des complexes linéaires de Plücker, auxquelles les vitesses virtuelles d'une figure invariable sont intimement liées. »

ÖFVERSIGT AF KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR. In-8° (1).

T. XXVI; 1869.

WREDE (F.-J.). — *Sur le calcul des rentes viagères combinées.* (8 p.)

L'auteur propose une méthode approchée pour abréger les calculs énormes qu'exige la détermination de la valeur actuelle d'une rente viagère reposant sur plusieurs têtes.

BJÖRLING (C.-F.-E.). — *Sur le mouvement rectiligne d'une molécule sous l'influence d'une force attractive ou répulsive, représentée par une fonction algébrique, rationnelle et entière de la distance à un centre fixe.* (3 p.)

En désignant par η la fonction qui exprime la valeur de la force vive $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$, la nature du mouvement dépend de celle des racines de l'équation $\eta = 0$.

ERICSSON (J.). — *Sur l'influence de la chaleur solaire sur la rotation de la Terre.* (22 p.)

L'auteur examine l'influence que peut exercer sur la position de l'axe de la Terre et sur sa vitesse de rotation le déplacement des masses énormes de matière détachées des continents par l'action des eaux et portées dans la mer par les fleuves. D'une part, ces matières, en tombant au fond de la mer, se rapprochent du centre et tendent à accélérer la vitesse angulaire; d'autre part, elles peuvent être ou rapprochées ou éloignées de l'équateur, ce qui peut causer, suivant les cas, soit un ralentissement, soit une accélération

(1) *Comptes rendus de l'Académie Royale des Sciences de Stockholm.* Voir *Bulletin*, t. I, p. 245.

du mouvement. Il calcule les actions qui peuvent être exercées dans l'un ou l'autre sens par les principaux fleuves, et il en conclut que la constance de la vitesse de rotation de la Terre est incompatible avec l'action de la chaleur solaire.

LINDHAGEN (D.-G.). — *Les déplacements de matières qui ont lieu à la surface de la Terre sont-ils capables d'altérer d'une manière sensible la durée du jour sidéral?* (13 p.)

Remarque au sujet du Mémoire précédent. M. Lindhagen établit que les diverses causes étudiées par M. Ericsson ne peuvent produire que des effets insensibles, ce qu'il était important de constater, la durée du jour sidéral étant un des éléments fondamentaux de l'Astronomie.

EDLUND (E.). — *Sur la cause des phénomènes galvaniques de refroidissement et de réchauffement découverts par Peltier.* (8 p.)

LEMSTRÖM (K.-S.). — *Observations sur l'électricité atmosphérique et l'aurore polaire pendant l'Expédition polaire suédoise de* 1868. (26 p.)

EDLUND (E.). — *Sur le passage des courants électriques d'induction et de disjonction à travers des gaz d'inégale densité et entre des pôles de forme dissemblable.* (24 p.)

T. XXVII; 1870.

EDLUND (E.). — *Sur la force électromotrice dans le contact de deux métaux.* (15 p.)

DAHLANDER (G.-R.). — *Sur quelques applications des lois du mouvement géométrique à la dynamique.* (8 p.)

L'auteur établit entre autres ce théorème : « Dans le mouvement d'un corps solide, la vitesse orthogonale est perpendiculaire au plan tangent commun aux deux surfaces coniques, dont le roulement l'une sur l'autre peut être considéré comme produisant le mouvement du corps autour de son centre de gravité. Elle forme un angle de 270 degrés avec l'accélération angulaire normale. »

ERICSSON (J.). — *Influence de la chaleur solaire sur le mouvement de rotation de la Terre.* (17 p.)

L'auteur défend les idées et les calculs exposés dans son précédent Mémoire contre les objections de M. Lindhagen.

Dahlander (G.-R.). — *Quelques recherches relatives à la théorie mécanique de la chaleur.* (2 art.; 24 p.)

Sundell (A.-F.). — *Étude sur les courants électriques de disjonction* (58 p.)

Dunér (N.-C.). — *Détermination de l'inclinaison magnétique au Spitzberg.* (16 p.)

KONGLIGA SVENSKA VETENSKAPS-AKADEMIENS HANDLINGAR. Ny följd. Stockholm. In-4° (1).

T. VII; 1868.

Holmgren (Hj.). — *Intégration de l'équation différentielle*

$$(a_2+b_2 x+c_2 x^2)\frac{d^2 y}{dx^2}+(a_1+b_1 x)\frac{dy}{dx}+a_0 y=0.$$

58 p.; fr.)

L'intégration de cette équation, qui a été l'objet d'un grand nombre de recherches, a été abordée pour la première fois, dans toute sa généralité, par M. Liouville, au moyen de son *Calcul différentiel à indices quelconques*. Cependant, par suite d'une certaine indétermination que présentaient encore les formules du nouveau calcul, les intégrales données par M. Liouville ne pouvaient être considérées comme donnant la solution définitive du problème. M. Spitzer a consacré à cette équation plusieurs Mémoires, dont les résultats les plus remarquables ont été réunis dans la deuxième partie de ses *Études sur l'intégration des équations différentielles linéaires* (2). Mais les résultats obtenus par ce géomètre ont l'inconvénient de supposer les valeurs de la variable comprises entre certaines limites; quelquefois aussi ils ne fournissent qu'une intégrale particulière. M. Holmgren, s'appuyant sur les recherches auxquelles il s'est livré sur le Calcul différentiel à indices quelconques (3), a repris la question en prenant pour point de dé-

---

(1) *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Suède.* Nouvelle série. Voir *Bulletin*, t. I, p. 242.

(2) *Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen.* Wien, 1860-1862; 3 fasc. in-8°.

(3) *Om Differentialkalkylen med indices af hvilken natur som helst* (*Mém. de l'Ac. de Stockholm*, t. V, n° 11). Voir *Bulletin*, t. I, p. 244.

part les travaux de M. Liouville, et il propose une méthode générale d'intégration, conduisant à des intégrales complètes où la valeur de la variable indépendante n'est sujette à aucune restriction.

Edlund (E.). — *Détermination du rapport de poids entre la livre suédoise* (skålpund) *et le kilogramme français.* (31 p.).

Résultats des comparaisons faites à Paris, en 1867, par MM. Ångström et Nordenskiöld. D'après ces recherches, le rapport entre les poids suédois et français en laiton, de densité = 8,16, pesés dans l'air à 15 degrés de température et $0^{m},76$ de pression barométrique, est exprimé par les égalités

$$1^{kg} = 2,3525214 \text{ livres suéd.}, \quad 1 \text{ liv. suéd.} = 425^{gr},0758.$$

T. VIII; 1869.

Lemström (S.). — *Recherches expérimentales sur la marche d'intensité des courants d'induction voltaïque.* (86 p., 4 pl.; fr.)

Lemström (S.). — *Observations magnétiques pendant l'Expédition polaire suédoise de* 1868. (47 p.)

Holmgren (K.). — *De l'électricité considérée comme force cosmique.* (45 p., 1 pl.)

T. IX; 1870.

Möller (A.). — *Étude sur le mouvement de la planète Pandore.* (122 p.)

L'auteur a calculé, à l'aide de la méthode de M. Hansen, les perturbations de cette planète, dues aux actions de Jupiter, de Saturne et de Mars.

MÉMOIRES de la Société royale des Sciences de Liége (¹).

2ᵉ Série, t. III; 1873.

Ledent (J.). — *Fonctions invariables des paramètres de l'équation intégrale des surfaces du second degré.* (56 p.)

Une équation du second degré entre trois variables étant rapportée à trois axes quelconques, si l'on vient à changer les directions

(¹) Paraissant a des époques indéterminées, par volumes in-8°.

des axes, les coefficients de l'équation varieront; mais il existe sept combinaisons de ces coefficients et des angles que font entre eux les axes, qui restent invariables dans cette transformation. L'auteur les détermine à l'aide des procédés de l'Algèbre ordinaire, et il en fait l'application à la discussion de la surface et à la recherche de ses propriétés.

GRAINDORGE (J.). — *Sur quelques intégrales définies.* (7 p.)

L'auteur transforme les intégrales définies connues

$$\cot\alpha - \frac{1}{\alpha} = -\int_0^\infty \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{e^{\pi x} - 1}\,dx,$$

$$\frac{\pi}{2\beta}\tang\frac{\pi\alpha}{2\beta} = \int_0^\infty \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{e^{\beta x} - e^{-\beta x}}\,dx,$$

en y remplaçant α par $\alpha\sqrt{-1}$, et il en déduit un certain nombre d'autres intégrales définies.

FOLIE (F.). — *Nouvelle manière de présenter la théorie de la divisibilité des nombres.* (12 p.)

Le but de cette Note est, en premier lieu, de rendre la théorie de la divisibilité des nombres indépendante de celle du plus grand commun diviseur; et, en second lieu, de formuler un principe qui permette de découvrir les caractères de divisibilité d'un nombre par un nombre premier, d'une manière immédiate et applicable à tous les systèmes de numération, sans qu'il soit nécessaire de chercher les restes de la division des puissances de la base par ce nombre premier. L'auteur prend pour point de départ ce théorème, que les termes d'une fraction égale à une fraction irréductible sont nécessairement des équimultiples des termes de celle-ci.

BRASSEUR (J.-B.). — *Exposition nouvelle des principes du Calcul différentiel et du Calcul intégral.* (*Précédé d'un Avant-propos*, par M. FOLIE.) (17-62 p.)

L'auteur, ne trouvant pas satisfaisante l'exposition du Calcul différentiel fondée sur la considération des limites, a cru préférable de revenir à la conception développée par Lagrange dans sa *Théorie des fonctions analytiques*. Nous ne rappellerons pas ici les graves objections qui ont été faites au fondement même de la méthode de Lagrange, qui prend pour point de départ la possibilité du développement de l'accroissement de la fonction en une série ordonnée suivant les puissances de l'accroissement de la variable. Nous ferons seulement remarquer que c'est en vain que l'on espérerait éviter ainsi la considération des *limites;* car le développement d'une fonction en série suppose nécessairement l'existence d'une limite de la somme d'un nombre indéfiniment croissant de termes de cette série, et nous ne voyons pas en quoi la conception de cette limite de somme est plus simple que celle de la limite du rapport de deux variables infiniment petites. Il semble qu'il y ait quelque malentendu entre l'auteur et les géomètres qui adoptent, sous une forme plus ou moins modifiée, les principes établis avec tant de netteté par Carnot, Cauchy et Duhamel. Sans cela il eût été inutile de prévenir le lecteur que dx ne sera jamais supposé égal à zéro, ni dans le calcul, ni dans les applications, cette quantité perdant son caractère d'infiniment petit, c'est-à-dire de *variable,* dès qu'on lui assigne une valeur constante, telle que zéro. L'auteur applique sa méthode aux problèmes fondamentaux de la théorie des courbes et de la Mécanique.

Folie (F.). — *Note sur l'extension des théorèmes de Pascal et de Brianchon aux courbes planes et aux surfaces du troisième ordre et de la troisième classe.* (9 p.)

Brasseur (J.-B.). — *Double perspective.* (23 p.)

L'objet de ce travail est une modification des méthodes de la Géométrie descriptive, où l'on remplace la double projection cylindrique par une double projection conique. Le procédé consiste à construire sur un même tableau deux perspectives d'un même objet, ou de deux points différents. Le plan horizontal de projection est pris pour tableau; les deux positions de l'œil sont données par leurs projections sur le tableau et les cotes de leurs hauteurs. L'auteur applique sa méthode à la démonstration de diverses propositions de Géométrie.

Graindorge (J.). — *Problème de Mécanique.* (14 p., 1 pl.)

Étude du mouvement d'un point sollicité vers une courbe fixe par une force exprimée en fonction de la distance r par la formule $Ar - \frac{B}{r^3}$, la vitesse initiale étant supposée perpendiculaire au rayon vecteur initial.

MONATSBERICHTE der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1).

Année 1872.

Schwarz (H.-A.).— *Nouvel essai sur une espèce spéciale de surfaces minima.* (24 p., 1 pl.)

Ce Mémoire est une étude généralisée d'un problème posé par Gergonne dans le septième volume des *Annales de Mathématiques* (1816), et qui est le suivant : « Couper un cube en deux parties, de » manière que la section vienne se terminer aux diagonales inverses » de deux faces opposées, et que l'aire de cette section terminée à » la surface du cube soit un minimum? »

Une solution de ce problème a été donnée par Tédenat à l'aide de deux hélicoïdes symétriques.

L'auteur établit que cette solution n'est point complète (elle se rapporte au cas le plus simple) et donne l'équation générale de la surface cherchée, de laquelle, par des hypothèses particulières sur les coefficients, il déduit les équations de plusieurs groupes de surfaces, dont quelques-uns coïncident avec les surfaces étudiées par Meusnier, Scherk, Plateau, Enneper, etc.

Riess. — *Réaction, dans un circuit invariable, des courants dérivés sur le courant principal d'une batterie de Leyde.* (11 p.)

Dobrowolsky (W.). — *La sensibilité de l'œil, selon la différence d'intensité des diverses couleurs du spectre.* (3 p.)

Helmholtz (H.). — *Sur la théorie de l'électrodynamique.* (12 p.)

Riess.— *Sur la détermination de la durée de la charge d'une batterie de Leyde.* (15 p.)

Lipschitz (R.). — *Sur une extension de la théorie des surfaces minima.* (6 p.)

Meusnier a remarqué que les surfaces minima jouissent de la propriété que, en chacun de leurs points, la somme de valeurs récipro-

(1) Voir *Bulletin*, t. I, p. 187.

ques des mesures des courbures principales est égale à zéro. En s'appuyant sur cette remarque, l'auteur établit les formules qui définissent les quantités minima dans les variétés de $n-1$ dimensions. En faisant $n=3$, ces formules conduisent à la solution relative aux surfaces minima, donnée par Riemann et Weierstrass.

SPÖRER. — *Sur les relations entre les taches et les protubérances solaires.* (8 p.)

KUMMER. — *Sur quelques genres particuliers de surfaces du quatrième degré.* (9 p.)

Les enveloppes de surfaces du deuxième degré, dans le cas où le contact entre l'enveloppe et l'enveloppée a lieu suivant une courbe du quatrième degré, sont de la forme

$$\varphi^2 = \psi \cdot \chi,$$

où φ, ψ, χ sont des fonctions arbitraires du deuxième degré des coordonnées. Le groupe des enveloppées est alors représenté par l'équation

$$\alpha^2 \psi + 2\alpha\varphi + \chi = 0.$$

L'auteur établit que, pour ce genre de surfaces du quatrième degré, le système de rayons (*Strahlensystem*), qui est en général du douzième ordre et de la vingt-huitième classe, se décompose en deux systèmes, l'un du quatrième ordre et de la douzième classe, l'autre du huitième ordre et de la sixième classe.

L'autre groupe de surfaces considéré est exprimé par la formule

$$\Phi^2 = pqrs,$$

où Φ est une fonction du deuxiène degré et p, q, r, s des fonctions linéaires des coordonnées. L'auteur étudie particulièrement le cas où Φ représente une surface sphérique, et p, q, r, s les quatre faces d'un tétraèdre régulier inscrit.

KRONECKER (L.). — *Sur la théorie algébrique des formes quadratiques.* (11 p.)

Des traductions de cette Note et de la suivante ont paru dans le *Bulletin*, t. IV, p. 256, et t. V, p. 301.

BORCHARDT (C.-W.). — *Sur l'ellipsoïde de volume minimum* *pour des valeurs données des aires d'un certain nombre de ses sections centrales.* (10 p.)

Schwarz (H.-A.) — *Expression de la deuxième variation de l'aire des surfaces minima en général, et des portions d'hélicoïde en particulier.* (18 p.)

L'auteur étudie principalement la relation entre les surfaces minima et les surfaces d'équilibre des masses liquides sans pesanteur; suivant M. Plateau, l'hélicoïde gauche à plan directeur n'a pas de limites de stabilité (¹). M. Schwarz établit que l'équilibre stable est limité et qu'il dépend du rapport entre la hauteur de la spire et le rayon de cylindre de l'hélice.

Quelques expériences qu'il a entreprises ont donné des résultats conformes à sa théorie.

Poggendorff. — *Contribution à la connaissance plus exacte de la machine électrique de deuxième espèce.* (28 p.)

Kronecker (L.). — *Démonstration de la loi de réciprocité pour les restes quadratiques.* (2 p.)

Démonstration donnée par M. Zeller, inspecteur des écoles, curé à Schorndof (Wurtemberg). A. P.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES (²).

T. LXXVI, 1er semestre 1873 (*fin*).

N° 18. Séance du 5 mai 1873.

Dupuy de Lôme. — *Rapport sur un Mémoire de M.* Bertin, *relatif à la résistance opposée par la carène des navires aux mouvements de roulis.*

Collet. — *Mémoire sur les conditions d'intégrabilité des équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction.*

(¹) *Sur les figures d'équilibre d'une masse liquide sans pesanteur.* (*Mémoires de l'Académie Royale de Belgique,* t. XXXVII.)

(²) Voir *Bulletin*, t. V, p. 120.

Si $f_1 = 0, f_2 = 0, \ldots, f_m = 0$ sont m équations renfermant n variables indépendantes $q_1, q_2, \ldots, q_n$, et les dérivées partielles $p_1, p_2, \ldots, p_n$, prises par rapport à ces variables, d'une fonction z, qui, d'ailleurs, n'entre pas dans ces équations, on pose

$$(1) \qquad (f_i, f_k) = \sum_{h=1}^{h=n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial q_h} \frac{\partial f_k}{\partial p_h} - \frac{\partial f_i}{\partial p_h} \frac{\partial f_k}{\partial q_h} \right);$$

l'auteur se propose de chercher les relations qui existent entre les fonctions diverses que l'on obtient en effectuant l'opération (1), soit avec les fonctions proposées, soit avec celles qui résultent déjà de cette opération.

STEPHAN. — *Nouvelle observation de la comète II,* 1867.

N° 19. Séance du 12 mai 1873.

SPOTTISWOODE (W.). — *Note sur la représentation algébrique des lignes droites dans l'espace.*

M. Spottiswoode remarque qu'on peut représenter une droite de l'espace au moyen de trois équations homogènes et linéaires à cinq variables, et étend à ce cas la définition et les relations que Plücker a données pour le cas où la droite est définie par deux équations homogènes et linéaires à quatre variables.

MATHIEU (É.). — *Mémoire sur la théorie des dérivées principales et son application à la Mécanique analytique.*

L'auteur montre d'abord que les théorèmes relatifs aux dérivées ordinaires d'une somme et d'une fonction composée sont vrais pour les dérivées qu'il appelle *dérivées principales;* il applique ensuite sa théorie des dérivées principales au problème des *perturbations.*

N° 20. Séance du 19 mai 1873.

FAYE. — *Note sur les cyclones solaires, avec une réponse de M.* RESPIGHI *à MM.* VICAIRE *et* SECCHI.

TRESCA. — *Note sur les propriétés mécaniques de différents bronzes.*

N° 21. Séance du 26 mai 1873.

Sédillot (L.-Am.) — *Rectification d'un point de la Communication de M.* Munk, *au sujet de la découverte de la variation.*

Boussinesq (J.). — *Sur le calcul des phénomènes lumineux produits à l'intérieur des milieux transparents animés d'une translation rapide, dans le cas où l'observateur participe lui-même à cette translation.*

L'auteur énonce la loi suivante :

« Les phénomènes lumineux que perçoit un observateur entraîné, dans un mouvement commun de translation par rapport à l'éther, avec la source de lumière et avec les milieux interposés, ne diffèrent pas de ceux qu'il observerait en regardant la même source à travers les mêmes milieux transparents, si, la translation n'existant pas, la densité de l'éther devenait, dans chaque milieu respectif et pour des ondes d'une direction déterminée, plus grande qu'elle n'est dans le rapport de l'unité au carré de la somme de l'unité et du quotient de la composante de la vitesse translatoire suivant la normale aux ondes par la vitesse de propagation de celles-ci à travers le milieu considéré. »

N° 22. Séance du 2 juin 1873.

Puiseux (V.). — *Note sur le passage de Vénus devant le Soleil en* 1882.

M. Puiseux communique à l'Académie les résultats de calculs entrepris pour déterminer à l'avance les principales circonstances du passage de Vénus sur le Soleil en 1882. Les calculs ont été faits à l'aide des Tables du Soleil et de Vénus de M. Le Verrier, le diamètre apparent du Soleil étant supposé de 32′0″,0 à la distance moyenne; la parallaxe solaire a été supposée égale à 8″,86; on a négligé l'aplatissement de la Terre et quelques autres petites quantités.

Circonstances du phénomène pour un observateur supposé au centre de la Terre :

1882, décembre 6. (Temps moyen de Paris.)

	h m
Entrée du *centre* de Vénus sur le disque du Soleil.	2.14,94
Sortie du *centre* de Vénus	8.12,00
Durée du passage du centre	5.57,06

Circonstances du phénomène pour un observateur placé à la surface de la Terre :

Heure de l'entrée......	$2^{h}.14^{m},9+$	$7^{m},9 \cos A_1 M$,
Heure de la sortie......	$8.12,0-$	$7,9 \cos A_2 M$,
Durée du passage.......	$5.57,1+$	$14,5 \cos A_3 M$;

$A_1 M$, $A_2 M$, $A_3 M$ désignent les arcs de grand cercle qui, sur la Terre supposée sphérique, joignent le lieu M d'observation aux trois points A_1, A_2, A_3, définis comme il suit :

	Longitude.	Latitude.
A_1..............	$-95°.26'$	$+50°.43'$
A_2..............	-45.31	$+23.25$
A_3..............	$+114.24$	-39.42

Après une étude détaillée des diverses phases du phénomène, M. Puiseux conclut en ces termes : « En résumé, les mesures de distances et d'angles de position pourront donner la parallaxe, en 1882, à peu près avec le même degré de précision qu'en 1874; mais le passage de 1874 sera notablement plus avantageux que le suivant pour la détermination de la parallaxe solaire par les observations de contact, c'est-à dire par la méthode qui, après tout, donnera probablement les meilleurs résultats. Il est donc à désirer que rien ne soit négligé pour assurer dans les meilleures conditions l'observation du prochain passage. »

Secchi (le P.). — *Essai, pendant une éclipse solaire, de la nouvelle méthode spectroscopique proposée pour le prochain passage de Vénus.*

Hind, Stephan, Henry (Paul et Prosper), André et Baillaud. —*Documents relatifs à la Comète à courte période II,* 1867.

Henry (J.). — *Nouvelle petite planète, découverte à Washington.*

Ribaucour. —*Propriétés relatives aux déplacements d'un corps assujetti à quatre conditions.*

Si l'on fait prendre au corps toutes les positions infiniment voisines d'une position déterminée, une droite quelconque engendre un *pinceau;* parmi les pinceaux ainsi engendrés, il y en a qui sont des pinceaux de normales à une famille de surfaces; les droites qui engendrent ces pinceaux particuliers appartiennent à un complexe du premier ordre et de la première classe. M. Ribaucour étudie ce complexe en s'appuyant sur les formules relatives à la théorie des surfaces (équations de Codazzi, etc.) et en signale les propriétés principales.

N° 23. Séance du 9 juin 1873.

VICAIRE (E.). — *Sur la théorie des taches et sur le noyau obscur du Soleil.*

LOCKYER (J.-N.). — *Recherches d'Analyse spectrale au sujet du spectre solaire.*

N° 24. Séance du 16 juin 1873.

DUHIL DE BENAZÉ et RISBEC. — *Sur le mouvement complet du navire oscillant sur eau calme; relation des expériences faites sur l'*ELORN, *navire de* 100 *tonneaux de déplacement.*

Dans la première partie de ce Mémoire, les auteurs exposent la théorie du mouvement complet du navire oscillant sur eau calme, d'abord dans le cas d'un liquide sans résistance, puis dans un liquide réel, c'est-à-dire en introduisant les résistances qu'oppose réellement tout liquide au déplacement d'un corps immergé; dans la seconde partie, ils décrivent les expériences entreprises en vue de déterminer la loi du mouvement oscillatoire.

N° 25. Séance du 23 juin 1873.

SECCHI (le P.). — *Nouvelle série d'observations sur les protubérances solaires; nouvelles remarques sur les relations qui existent entre les protubérances et les taches.*

DUBOIS (Ed.). — *Sur l'influence de la réfraction atmosphérique, relative à l'instant d'un contact dans un passage de Vénus.*

L'auteur de la Note trouve que la différence qui existe entre le temps de contact *réel* et le temps du contact apparent est inférieure à $0^s,67$.

VICAIRE (E.). — *Sur la constitution du Soleil et la théorie des taches.*

N° 26. Séance du 30 juin 1873.

SERRET (J.-A.). — *Réflexions sur le Mémoire de Lagrange intitulé : « Essai sur le problème des trois Corps ».*

« Le Chapitre premier du Mémoire de Lagrange sur le *Problème des trois Corps* mérite d'être compté parmi les travaux les plus importants de l'illustre auteur. Les équations différentielles de ce problème, lorsqu'on ne considère, ce qui est permis, que des mouvements relatifs, constituent un système du *douzième ordre*, et la solution complète exige en conséquence *douze* intégrations; les seules intégrales connues étaient celle des *forces vives* et les trois que fournit le principe des *aires* : il en restait donc *huit* à découvrir. En réduisant à *sept* le nombre des intégrations nécessaires pour l'achèvement de la solution, Lagrange a fait faire à la question un pas considérable, et les géomètres qui se sont occupés après lui du Problème des trois Corps ne sont pas allés au delà. Leurs efforts, cependant, n'ont pas été inutiles : des méthodes nouvelles et ingénieuses ont été proposées, comme, par exemple, celle que Jacobi a développée dans son célèbre Mémoire sur l'*Élimination des nœuds dans le Problème des trois Corps;* mais ces méthodes, comme celle de Lagrange, font dépendre la solution du Problème de *sept* intégrations.

» La méthode de Lagrange est des plus remarquables; elle montre que la solution complète du Problème exige seulement que l'on connaisse à chaque instant les côtés du triangle formé par les trois Corps; les coordonnées de chaque corps se déterminent effectivement ensuite sans aucune difficulté. Quant à la recherche du triangle des trois Corps, elle dépend de trois équations différentielles, parmi lesquelles deux sont du *deuxième ordre*, et la troisième du *troisième ordre*. Ces équations renferment deux constantes arbitraires introduites, l'une par le principe des *forces vives*, l'autre par celui des *aires*, en sorte que les distances des corps sont des fonctions du temps, et de *neuf* constantes arbitraires seulement. Parmi les *douze* arbitraires que l'intégration complète doit introduire, il y en a donc *trois* qui ne figurent pas dans les expressions des distances, circonstance que l'examen des conditions du Problème permet d'ailleurs de mettre en évidence *a priori*.

» Préoccupé assurément de l'application qu'il voulait faire de sa nouvelle méthode à la *Théorie de la Lune*, application qui fait l'objet du Chapitre IV de son Mémoire, Lagrange a négligé d'introduire, dans ses formules, la symétrie que comportait son analyse, symétrie qu'un très-léger changement dans les notations permet de rétablir. Les masses des trois Corps étant représentées par A, B, C, Lagrange étudie les mouvements relatifs de B et C autour de A, et il est bientôt amené à introduire en outre, dans ses formules, les quantités qui se rapportent au mouvement relatif du corps C autour de B. Une telle direction des calculs est incontestablement défectueuse, au point de vue de l'élégance mathématique, en ce sens que les coordonnées des trois orbites relatives considérées ne figurent pas symétriquement dans les formules; mais, pour éviter cet inconvénient, il suffit, comme je viens de le dire, d'une simple modification dans les notations de l'illustre auteur, et cette modification revient à introduire, au lieu des mouvements considérés : 1° le mouvement relatif du Corps B autour de C; 2° celui de C autour de A; 3° celui de A autour de B.

» Un habile géomètre allemand, M. Otto Hesse, a repris récemment l'analyse de Lagrange en se plaçant au point de vue que je viens d'indiquer, et il a publié son travail dans le tome **74** du *Journal de Crelle* (imprimé à Berlin, en 1872). M. Hesse ne considère que ce qu'il nomme le *Problème restreint*, c'est-à-dire celui qui a pour objet de déterminer à chaque instant le triangle des trois Corps; c'est à ce problème restreint que Lagrange a ramené d'ailleurs, comme je l'ai déjà dit plus haut, le problème général. M. Hesse, auquel la Science est redevable de plusieurs travaux importants, a été moins heureux ici qu'il ne l'avait été dans d'autres occasions. Non-seulement il n'a pas réussi à perfectionner l'analyse parfaitement rigoureuse que nous devons à Lagrange, mais une inadvertance l'a fait tomber dans une erreur grave, que j'indiquerai plus loin, et qui infirme absolument sa conclusion. Ajoutons que la notation particulière dont le géomètre allemand fait usage, pour abréger l'écriture des formules, ne paraît pas préférable à celle de son illustre devancier.

» Pour justifier les remarques qui précèdent, il est nécessaire d'entrer dans quelques détails; je le ferai d'une manière succincte, en introduisant dans l'analyse de Lagrange les modifications nécessaires pour rétablir la symétrie des formules, et en dégageant la solution de tout ce qui n'est qu'accessoire.

» **1**. Soient x, y, z les coordonnées rectangles du Corps B par rapport à C; x', y', z' celles du Corps C par rapport à A; x'', y'', z''

celles de A par rapport à B; on aura

$$(1) \qquad x + x' + x'' = 0, \quad y + y' + y'' = 0, \quad z + z' + z'' = 0.$$

Soient aussi

$$(2) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \quad r'' = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}.$$

» Les équations différentielles du mouvement forment trois groupes dont l'un est

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{A+B+C}{r^3} x - A\left(\frac{x}{r^3} + \frac{x'}{r'^3} + \frac{x''}{r''^3}\right) = 0, \\ &\frac{d^2x'}{dt^2} + \frac{A+B+C}{r'^3} x' - B\left(\frac{x}{r^3} + \frac{x'}{r'^3} + \frac{x''}{r''^3}\right) = 0, \\ &\frac{d^2x''}{dt^2} + \frac{A+B+C}{r''^3} x'' - C\left(\frac{x}{r^3} + \frac{x'}{r'^3} + \frac{x''}{r''^3}\right) = 0, \end{aligned} \right.$$

et dont les deux autres se déduisent du précédent en changeant x en y et en z. A cause des formules (1), les équations de chaque groupe peuvent être réduites à deux distinctes; ces équations coïncideraient avec les équations (A), (B), (C) de Lagrange, si l'on y faisait le simple changement de x, y, z, x'', y'', z'' en $-x''$, $-y''$, $-z''$, $-x$, $-y$, $-z$.

» Du groupe (3) et des deux groupes analogues, on déduit

$$\frac{x\,d^2y - y\,d^2x}{A\,dt^2} + \frac{x'\,d^2y' - y'\,d^2x'}{B\,dt^2} + \frac{x''\,d^2y'' - y''\,d^2x''}{C\,dt^2} = 0,$$

équation qui subsiste quand on exécute la substitution circulaire (x, y, z) et qu'on répète cette substitution. On conclut de là les trois intégrales des aires, savoir :

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{y\,dz - z\,dy}{A\,dt} + \frac{y'\,dz' - z'\,dy'}{B\,dt} + \frac{y''\,dz'' - z''\,dy''}{C\,dt} = a, \\ &\frac{z\,dx - x\,dz}{A\,dt} + \frac{z'\,dx' - x'\,dz'}{B\,dt} + \frac{z''\,dx'' - x''\,dz''}{C\,dt} = b, \\ &\frac{x\,dy - y\,dx}{A\,dt} + \frac{x'\,dy' - y'\,dx'}{B\,dt} + \frac{x''\,dy'' - y''\,dx''}{C\,dt} = c, \end{aligned} \right.$$

a, b, c étant trois constantes arbitraires.

» Ensuite, si l'on fait

$$(5)\qquad \begin{cases} u^2 = \dfrac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}, \\ u'^2 = \dfrac{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}{dt^2}, \\ u''^2 = \dfrac{dx''^2 + dy''^2 + dz''^2}{dt^2}, \end{cases}$$

et que l'on ajoute ensemble les équations du groupe (3) et des deux analogues, après avoir multiplié ces équations respectivement par

$$\frac{2dx}{A},\quad \frac{2dx'}{B},\quad \frac{2dx''}{C},\quad \frac{2dy}{A},\quad \frac{2dy'}{B},\quad \frac{2dy''}{C},\quad \frac{2dz}{A},\quad \frac{2dz'}{B},\quad \frac{2dz''}{C},$$

on aura

$$(6)\quad d\left(\frac{u^2}{A} + \frac{u'^2}{B} + \frac{u''^2}{C}\right) + 2(A + B + C)\left(\frac{dr}{Ar^2} + \frac{dr'}{Br'^2} + \frac{dr''}{Cr''^2}\right) = 0,$$

ce qui donne, par l'intégration, l'équation des forces vives, savoir :

$$(7)\quad \left(\frac{u^2}{A} + \frac{u'^2}{B} + \frac{u''^2}{C}\right) - 2(A + B + C)\left(\frac{1}{Ar} + \frac{1}{Br'} + \frac{1}{Cr''}\right) = f,$$

f étant une constante arbitraire.

» 2. Posons

$$(8)\qquad \begin{cases} x'x'' + y'y'' + z'z'' = -p, \\ x''x + y''y - z''z = -p', \\ xx' + yy' + zz' = -p'', \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(9)\quad \frac{r'^2 + r''^2 - r^2}{2} = p, \qquad \frac{r''^2 + r^2 - r'^2}{2} = p', \qquad \frac{r^2 + r'^2 - r''^2}{2} = p'',$$

on aura

$$(10)\qquad r^2 = p' + p'', \quad r'^2 = p'' + p, \quad r''^2 = p + p';$$

faisons en outre

$$(11)\qquad \frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r''^3} = q, \quad \frac{1}{r''^3} - \frac{1}{r^3} = q', \quad \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3} = q'',$$

ce qui donnera

$$(12) \qquad q + q' + q'' = 0, \quad \frac{q}{r^3} + \frac{q'}{r'^3} + \frac{q''}{r''^3} = 0.$$

» Si l'on différentie deux fois la première équation (2), après l'avoir élevée au carré, on aura

$$\frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{dt^2} = \left(x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + z\frac{d^2z}{dt^2}\right) + u^2,$$

et cette formule subsiste quand on y remplace x, y, z, r, u par x', y', z', r', u', ou par x'', y'', z'', r'', u''. Si donc on multiplie les équations (3) par x, x', x'' respectivement, et qu'on ajoute ensuite chacune des équations résultantes avec celles qu'on en déduit par le changement de x en y et en z, on aura, en vertu de la formule précédente,

$$(13) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2(r^2)}{dt^2} + \dfrac{A+B+C}{r} + A(p'q' - p''q'') - u^2 = 0, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2(r'^2)}{dt^2} + \dfrac{A+B+C}{r'} + B(p''q'' - pq) - u'^2 = 0, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2(r''^2)}{dt^2} + \dfrac{A+B+C}{r''} + C(pq - p'q') - u''^2 = 0, \end{cases}$$

Ces formules (13) répondent aux formules (F) de Lagrange, ou, ce qui revient au même, aux formules (K), en tenant compte des formules (J) de l'auteur.

» Ajoutons les quatre équations, (13) et (7) après avoir divisé les trois premières par A, B, C respectivement, on aura

$$(14) \quad \begin{cases} \left[\dfrac{1}{2A}\dfrac{d^2(r^2)}{dt^2} + \dfrac{1}{2B}\dfrac{d^2(r'^2)}{dt^2} + \dfrac{1}{2C}\dfrac{d^2(r''^2)}{dt^2}\right] \\ \qquad - (A+B+C)\left(\dfrac{1}{Ar} + \dfrac{1}{Br'} + \dfrac{1}{Cr''}\right) = f. \end{cases}$$

» Cette équation coïncide avec l'équation (L) de Lagrange, quand on y permute les lettres r et r''; c'est une transformée de l'intégrale des forces vives; elle ne renferme que les seules distances r, r', r''.

» 3. D'après les formules (1), les trois quantités

$$\begin{gathered}
(x' dx'' + y' dy'' + z' dz'') - (x'' dx' + y'' dy' + z'' dz'),\\
(x'' dx + y'' dy + z'' dz) - (x\, dx'' + y\, dy'' + z\, dz''),\\
(x\, dx' + y\, dy' + z\, dz') - (x' dx + y' dy + z' dz)
\end{gathered}$$

sont égales entre elles. Si l'on désigne par $\rho\, dt$ leur valeur, on aura, par le moyen des formules (8),

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned}
x' dx'' + y' dy'' + z' dz'' &= \tfrac{1}{2}(-dp + \rho\, dt),\\
x'' dx + y'' dy + z'' dz &= \tfrac{1}{2}(-dp' + \rho\, dt),\\
x\, dx' + y\, dy' + z\, dz' &= \tfrac{1}{2}(-dp'' + \rho\, dt),\\
x'' dx' + y'' dy' + z'' dz' &= \tfrac{1}{2}(-dp - \rho\, dt),\\
x\, dx'' + y\, dy'' + z\, dz'' &= \tfrac{1}{2}(-dp' - \rho\, dt),\\
x' dx + y' dy + z' dz &= \tfrac{1}{2}(-dp'' - \rho\, dt).
\end{aligned}\right.$$

» La quantité auxiliaire ρ que nous introduisons n'est autre chose que celle qui est désignée par $-\dfrac{d\rho}{dt}$ dans le Mémoire de Lagrange; il est évident que cette quantité peut être exprimée en fonction des vitesses u, u', u'', des distances r, r', r'' et de leurs différentielles dr, dr', dr''. En effet, considérons quatre directions respectivement parallèles à celles des rayons r, r' et des vitesses u, u'; soient L, M, N les cosinus des angles formés par la direction de r' avec les directions de u, u', r; L_1, M_1, N_1 les cosinus des angles formés par les directions de u' et r, de u et r, de u et u'. On aura entre ces six cosinus la relation connue

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned}
&1-(L^2+M^2+N^2+L_1^2+M_1^2+N_1^2)+(L^2L_1^2+M^2M_1^2+N^2N_1^2)\\
&\quad+2(L_1MN+M_1NL+N_1LM+L_1M_1N_1)\\
&\qquad\qquad -2(LL_1MM_1+MM_1NN_1+NN_1LL_1)=0.
\end{aligned}\right.$$

On a d'ailleurs, par les formules précédentes,

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned}
L &= -\frac{\rho\, dt + dp''}{2r' u\, dt}, & M &= \frac{dr'}{u' dt}, & N &= -\frac{p''}{rr'},\\
L_1 &= \frac{\rho\, dt - dp''}{2ru' dt}, & M_1 &= \frac{dr}{u\, dt}, & N_1 &= -\frac{u^2+u'^2-u''^2}{2uu'}:
\end{aligned}\right.$$

» Faisons, pour abréger, avec Lagrange,

$$(18)\qquad \frac{u'^2+u''^2-u^2}{2}=v,\quad \frac{u''^2+u^2-u'^2}{2}=v',\quad \frac{u^2+u'^2-u''^2}{2}=v'',$$

d'où

$$(19)\qquad u^2=v'+v'',\quad u'^2=v''+v,\quad u''^2=v+v',$$

et

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned}
\Sigma &= r^2\rho^2-2\left(p'\frac{dp''}{dt}-p''\frac{dp'}{dt}\right)\rho\\
&\quad +p'\left(\frac{dp''}{dt}\right)^2+p''\left(\frac{dp'}{dt}\right)^2+p\left[\frac{d(r^2)}{dt}\right]^2,\\
\Sigma' &= r'^2\rho^2-2\left(p''\frac{dp}{dt}-p\frac{dp''}{dt}\right)\rho\\
&\quad +p''\left(\frac{dp}{dt}\right)^2+p\left(\frac{dp''}{dt}\right)^2+p'\left[\frac{d(r'^2)}{dt}\right]^2,\\
\Sigma'' &= r''^2\rho^2-2\left(p\frac{dp'}{dt}-p'\frac{dp}{dt}\right)\rho\\
&\quad +p\left(\frac{dp'}{dt}\right)^2+p'\left(\frac{dp}{dt}\right)^2+p''\left[\frac{d(r''^2)}{dt}\right]^2,
\end{aligned}\right.$$

l'équation (15) deviendra, après la substitution des valeurs (17),

$$(21)\left\{\begin{aligned}
&\left(\rho^2+\frac{dp\,dp'+dp'\,dp''+dp''\,dp}{dt^2}\right)^2-4(\Sigma v+\Sigma' v'+\Sigma'' v'')\\
&\qquad +16(pp'+p'p''+p''p)(vv'+v'v''+v''v)=0;
\end{aligned}\right.$$

c'est précisément l'équation (N) de Lagrange. Si l'on suppose que u^2, u'^2, u''^2 y soient remplacés par leurs valeurs tirées des équations (12), la quantité auxiliaire ρ ne dépendra que des distances r, r', r'' et de leurs différentielles du premier et du deuxième ordre.

» 4. Puisque l'on a

$$(x\,dx'-x'\,dx)+(y\,dy'-y'\,dy)+(z\,dz'-z'\,dz)=\rho\,dt,$$

il s'ensuit par la différentiation

$$(x\,d^2x'-x'\,d^2x)+(y\,d^2y'-y'\,d^2y)+(z\,d^2z'-z'\,d^2z)=d\rho\,dt,$$

et, si l'on élimine les différentielles secondes des coordonnées au moyen des équations (3) et de celles qui s'en déduisent par le changement de x en y et en z, on aura

$$\frac{d\rho}{dt} + \mathrm{A}pq + \mathrm{B}p'q' + \mathrm{C}p''q'' = 0; \tag{22}$$

cette équation n'est autre que l'équation (H) de Lagrange, en tenant compte du changement de notation.

» 5. Revenons maintenant aux équations (4) : on a identiquement

$$\begin{aligned}
&(y\,dz - z\,dy)(y'\,dz' - z'\,dy') + (z\,dx - x\,dz)(z'\,dx' - x'\,dz') \\
&\quad + (x\,dy - y\,dx)(x'\,dy' - y'\,dx') \\
&= (xx' + yy' + zz')(dx\,dx' + dy\,dy' + dz\,dz') \\
&\quad - (x\,dx' + y\,dy' + z\,dz')(x'\,dx + y'\,dy + z'\,dz).
\end{aligned}$$

et cette formule subsiste quand on écrit x', y', z' ou x'', y'', z'' au lieu de x, y, z ou bien x'', y'', z'' ou x, y, z au lieu de x', y', z'. D'après cela, si l'on fait

$$a^2 + b^2 + c^2 = k^2,$$

et que l'on ajoute les équations (4), après les avoir élevées au carré, on aura, en faisant usage de la précédente formule, ainsi que des formules (2), (5), (15) et (18),

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{\mathrm{A}^2}\left[r^2u^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{d(r^2)}{dt}\right)^2\right] + \frac{1}{\mathrm{B}^2}\left[r'^2u'^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{d(r'^2)}{dt}\right)^2\right] \\
&\quad + \frac{1}{\mathrm{C}^2}\left[r''^2u''^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{d(r''^2)}{dt}\right)^2\right] + \frac{2}{\mathrm{BC}}\left[pv - \frac{1}{4}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2\right] \\
&\quad + \frac{2}{\mathrm{CA}}\left[p'v' - \frac{1}{4}\left(\frac{dp'}{dt}\right)^2\right] + \frac{2}{\mathrm{AB}}\left[p''v'' - \frac{1}{4}\left(\frac{dp''}{dt}\right)^2\right] \\
&\quad = k^2 - \frac{\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C}}{2\mathrm{ABC}}\rho^2,
\end{aligned}\right. \tag{23}$$

ce qui est l'équation (H) de Lagrange.

» Si maintenant on suppose que u^2, u'^2, u''^2 soient remplacés partout par les valeurs tirées des formules (13) et que, par le moyen de l'équation (21), ρ soit éliminé des équations (22) et (23), celles-ci ne contiendront plus que les distances r, r', r''; la première sera du troisième ordre et l'autre du deuxième; en les joignant à l'équation (14), on obtiendra le système différentiel découvert par Lagrange. Ce qui précède résume la partie esssentielle du Mémoire de l'auteur.

» 6. Différentions les équations (5) et remplaçons ensuite les différentielles secondes par les valeurs tirées des équations (3) et des analogues : on aura, en faisant usage des formules précédentes,

$$(24)\left\{\begin{aligned}
&\frac{d(u^2)}{dt} - 2(A+B+C)\frac{d\frac{1}{r}}{dt} + A\left(q'\frac{dp'}{dt} - q''\frac{dp''}{dt}\right) + Aq\rho = 0,\\
&\frac{d(u'^2)}{dt} - 2(A+B+C)\frac{d\frac{1}{r'}}{dt} + B\left(q''\frac{dp''}{dt} - q\frac{dp}{dt}\right) + Bq'\rho = 0,\\
&\frac{d(u''^2)}{dt} - 2(A+B+C)\frac{d\frac{1}{r''}}{dt} + C\left(q\frac{dp}{dt} - q'\frac{dp'}{dt}\right) + Cq''\rho = 0;
\end{aligned}\right.$$

ces formules coïncident avec les équations (I) de Lagrange, quand on tient compte des équations (J) de l'auteur. M. Hesse leur substitue les trois combinaisons obtenues quand on les ajoute entre elles, après les avoir multipliées respectivement par $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{C}$, puis par $\frac{1}{Ar^3}$, $\frac{1}{Br'^3}$, $\frac{1}{Cr''^3}$, puis enfin par p, p', p''. La première combinaison n'est autre chose que l'équation (6); la deuxième combinaison donne, en se servant des formules (12),

$$(25)\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{Ar^3}\,\frac{d\left(u^2 - 2\,\frac{A+B+C}{r}\right)}{dt} + \frac{1}{Br'^3}\,\frac{d\left(u'^2 - 2\,\frac{A+B+C}{r'}\right)}{dt}\\
&\quad + \frac{1}{Cr''^3}\,\frac{d\left(u''^2 - 2\,\frac{A+B+C}{r''}\right)}{dt}\\
&\quad - \left(q^2\frac{dp}{dt} + q'^2\frac{dp'}{dt} + q''^2\frac{dp''}{dt}\right) = 0;
\end{aligned}\right.$$

enfin la dernière combinaison, qui seule contient ρ, est, en faisant usage de l'équation (22),

$$
(26)\left\{
\begin{aligned}
\rho\frac{d\rho}{dt} &= p\,\frac{d\left(u^2 - 2\,\dfrac{A+B+C}{r}\right)}{dt} \\
&+ p'\,\frac{d\left(u'^2 - 2\,\dfrac{A+B+C}{2}\right)}{r'} + p''\,\frac{d\left(u''^2 - 2\,\dfrac{A+B+C}{dt}\right)}{r''} \\
&+ Ap\left(q'\frac{dp'}{dt} - q''\frac{dp''}{dt}\right) + Bp'\left(q''\frac{dp''}{dt} - q\frac{dp}{dt}\right) \\
&+ Cp''\left(q\frac{dp}{dt} - q'\frac{dp'}{dt}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

» Supposons que l'on différentie l'équation (23), ce qui fera disparaître l'arbitraire k, et que, de l'équation résultante, on tire la valeur de $\rho\dfrac{d\rho}{dt}$ pour la substituer dans l'équation (26). Alors, comme u^2, u'^2, u''^2 représentent les valeurs fournies par les équations (13), les équations (6), (25) et (26), qui sont toutes du troisième ordre et ne renferment aucune arbitraire, constitueront, d'après M. Hesse, le système différentiel duquel dépendent les distances r, r', r'', quand on ne fait pas intervenir les principes des forces vives et des aires. Enfin si, des mêmes équations (6), (25) et (26), on tire les valeurs de $d(u^2)$, $d(u'^2)$, $d(u''^2)$ pour les porter dans l'une des équations (24), celle-ci donnera, d'après le même géomètre, une valeur de ρ qui sera seulement du deuxième ordre; en portant cette valeur dans l'équation (23) et en joignant ensuite cette équation aux équations (14) et (26), on obtiendra un système composé de deux équations du deuxième ordre et une du troisième ordre, dans lequel figureront les deux constantes arbitraires f et k.

» Telle est la solution que M. Hesse propose de substituer à celle de Lagrange, solution qui serait évidemment beaucoup plus simple que celle de l'illustre auteur; mais il n'est pas difficile de se convaincre de l'inexactitude des résultats obtenus par M. Hesse, ou du moins de sa conclusion. Effectivement l'équation (26), après qu'on en a éliminé $\rho\dfrac{d\rho}{dt}$ par l'équation (23) différentiée, n'est pas autre chose que l'équation (6) multiplié par le facteur $\dfrac{r^2}{A} + \dfrac{r'^2}{B} + \dfrac{r''^2}{C}$; les trois équations du troisième ordre, qui composent le premier système de M. Hesse, ne sont donc pas distinctes. Le deuxième système du même géomètre ne saurait, en conséquence, avoir d'existence réelle, puisque les équations du premier système sont impropres à fournir les valeurs des différentielles du troisième ordre, ou, ce qui revient au même, les valeurs des différentielles $d(u^2)$, $d(u'^2)$, $d(u''^2)$. On ne saurait se dispenser, dans la recherche dont nous nous occupons, de tenir compte de l'équation (21), comme Lagrange a eu soin de le faire.

» Les réflexions qui précèdent ont été l'objet d'une Communication verbale que j'ai eu l'honneur de faire récemment au Bureau des Longitudes; la théorie qu'elles concernent a une si grande importance, que j'ai jugé utile de les présenter à l'Académie en leur donnant un certain développement. »

Souillart. — *Sur la théorie analytique des satellites de Jupiter.*

Le but du Mémoire de M. Souillart est, en premier lieu, de compléter un premier travail (*Annales scientifiques de l'École Normale,* t. II, 1^re^ série) en ce qui concerne les inégalités séculaires des excentricités et des longitudes des périjoves; et, en second lieu, de comparer les formules obtenues pour le calcul des longitudes et des rayons vecteurs avec celles qu'on trouve dans la *Mécanique céleste.*

Curie (J.). — *Sur le désaccord qui existe entre l'ancienne théorie de la poussée des terres et l'expérience.*