

BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Revue bibliographique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 6
(1874), p. 273-285

http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1874__6__273_0

© Gauthier-Villars, 1874, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

PONCELET (J.-V.). — COURS DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE AUX MACHINES, publié par M. Kretz, ingénieur en chef des Manufactures de l'État. — Un fort volume in-8° imprimé sur vélin, avec gravures dans le texte et deux planches. — Paris, Gauthier-Villars, 1874. Prix : 12 fr.

En présentant à l'Académie ce volume qui, sera surtout extrêmement utile aux professeurs de sciences appliquées et aux ingénieurs, M. Resal s'est exprimé ainsi :

« L'origine de cet Ouvrage remonte à 1825, époque à laquelle Poncelet, qui jusqu'alors s'était uniquement occupé de Géométrie, fut chargé d'organiser, à l'École d'Application de l'Artillerie et du Génie, l'enseignement de la Mécanique appliquée.

» En 1826, des feuilles lithographiées, reproduisant les Leçons de Poncelet, furent distribuées aux officiers élèves. On ne tarda pas à connaître au dehors l'originalité de cet enseignement, qui se distinguait par la nouveauté des aperçus et la nature de certaines questions qui y avaient trouvé place.

» Ces feuilles furent, l'année suivante, soumises à l'appréciation de l'Académie. Dans la séance du 7 mai 1827, Ch. Dupin, au nom d'une Commission qu'il constituait avec Arago, fit, sur l'enseignement de Poncelet, un Rapport extrêmement élogieux, qui aurait conclu à l'insertion aux *Mémoires des Savants étrangers*, si le Ministre de la Guerre ne s'était réservé la faculté de reproduire les lithographies.

» Aux feuilles de 1826, qui produisirent une grande impression dans le monde savant, succédèrent, avec quelques modifications, celles de 1832 et de 1836, publiées en cahiers par les soins de M^r Morin. C'est en collationnant ces trois éditions que M. Kretz a constitué l'Ouvrage dont il s'agit, et dont on comprendra toute l'importance par le simple énoncé des chapitres qui le composent :

» 1° Considérations générales sur les machines en mouvement ; 2° principaux moyens de régulariser l'action des forces sur les machines et de transmettre les vitesses dans des rapports donnés ; 3° calcul des résistances passives dans les pièces à mouvement uniforme ; 4° influence de la variation de la vitesse sur les résistances.



» Quoique les premières Leçons de Poncelet sur la Mécanique appliquée remontent presque à un demi-siècle, le Cours qui vient de paraître, à quelques détails près, est très-complet. Les lacunes inhérentes aux progrès des sciences et des mécanismes qui ont pu se produire dans une aussi longue période ont été comblées par des Notes placées au bas des pages, qui témoignent des soins consciencieux apportés par M. Kretz à cette publication et donnent une haute idée de sa sagacité et de son esprit observateur et philosophique. Parmi ces Notes, les unes ont surtout pour but de mettre en lumière les idées, parfois mal interprétées, de l'auteur ; les autres résument certains travaux récents encore peu connus ; d'autres enfin se font remarquer par leur originalité. Je crois devoir signaler parmi celles-ci :

» Période de mise en marche des machines et des conditions de bon fonctionnement. — De l'écart proportionnel des vitesses au point de vue de la régularisation ; effet du couplement sur la régularité. — Détermination de la vitesse de règle et conditions de régularité des machines industrielles. — Corrélation entre le régulateur et le volant. — Équations du mouvement d'une transmission en tenant compte de l'élasticité des liens. — Rapport des accélérations maxima et minima des manivelles simples et à double effet. — Volant des machines couplées. — Ralentissement dans les transmissions par courroies ; loi des tensions d'une courroie sur une poulie en mouvement. — Influence de l'écartement des arbres sur le fonctionnement des outils.

» En résumé, le *Cours de Mécanique appliquée* de Poncelet traite avec une haute autorité toutes les questions qui forment aujourd'hui le fonds de l'enseignement en ce qui concerne la science de l'ingénieur et du mécanicien, et les Notes qui y ont été ajoutées renferment des considérations utiles qui établissent de nouveaux liens entre la théorie et la pratique industrielle. »

TABLE DES MATIÈRES.

I^{re} SECTION. — Considérations générales sur les machines en mouvement.

I. NOTIONS ET PRINCIPES SUR LESQUELS SE FONDE LA SCIENCE DES MOTEURS ET DES MACHINES : *Travail des moteurs et des machines. Théorèmes relatifs à la quantité de mouvement et à la force vive.* — II. APPLICATION DU PRINCIPE DES FORCES VIVES AU MOUVEMENT DES MACHINES : *Conditions spéciales que présentent les machines. Équations générales du mouvement des machines. Discussion des équations générales.* — III. CIRCONSTANCES PRINCIPALES DU MOUVEMENT DES

MACHINES : *Lois générales du mouvement. Moyens généraux de régulariser le mouvement des machines.* — IV. **DE L'ÉTABLISSEMENT DES MACHINES INDUSTRIELLES :** *Conditions du meilleur établissement des machines. Indications générales sur l'établissement des machines. Conditions pratiques de l'établissement des machines.*

II^e SECTION. — Des principaux moyens de régulariser l'action des forces sur les machines et de transmettre les vitesses dans des rapports déterminés.

I. **DES MODÉRATEURS :** *Des divers genres de modérateurs. Des freins. Des volants à ailettes.* — II. **DES RÉGULATEURS :** *Des divers genres de régulateurs. Des régulateurs à pompe et à flotteur. Du régulateur à force centrifuge. Nouveau régulateur à ressort et instantané.* — III. **DES MANIVELLES :** *Notions préliminaires sur les manivelles. Considérations dynamiques sur les effets des manivelles. Des manivelles conduisant des pièces à mouvement rectiligne alternatif. Des manivelles conduisant un balancier à mouvement alternatif. Du joint brisé ou universel.* — IV. **APPLICATIONS PARTICULIÈRES DE LA THÉORIE DES VOLANTS.** *Considérations générales sur l'emploi et sur la construction des volants. Calcul du volant des manivelles à simple ou à double effet dans les hypothèses les plus simples. Calcul du volant, en tenant compte du poids et de l'inertie des pièces oscillantes.* — V. **MOYENS GÉOMÉTRIQUES DE TRANSMETTRE LES VITESSES DES PIÈCES DANS UN RAPPORT DONNÉ :** *Communication d'un mouvement par simple contact des roues. Communication du mouvement par courroies ou par chaînes. Communication du mouvement par engrenages. Des cames.* — **ADDITIONS RELATIVES AUX VALEURS DE DIVERS MOMENTS D'INERTIE :** *Principes généraux. Moment d'inertie des lignes ou verges à section très-petite. Moment d'inertie des aires planes ou disques minces. Observations générales. Moments d'inertie des corps ou volumes à dimensions quelconques. Applications.*

III^e SECTION. — Calcul des résistances passives dans les pièces à mouvement uniforme et soumises à des actions sensiblement invariables.

I. **CONSIDÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.** — II. **DES DIVERSES SORTES DE RÉSISTANCES :** *De la résistance directe du frottement et de l'adhérence des corps en contact. Résistance due au roulement des corps. De la roideur des cordes et des courroies. Frottement des cordes et courroies autour des cylindres immobiles.* — III. **APPLICATIONS AUX MACHINES SIMPLES :** *Frottement d'un corps sur un plan incliné. Frottement du coin. Frottement des pièces maintenues dans une direction invariable par des guides, des coulisses, etc. Frottement des tourillons des pièces de rotation. Frottement des pivots, des épaulements des axes. Résistance des roues et roulettes. Équilibre du treuil, en ayant égard au frottement et à la roideur des cordes. Calcul des résistances dans les poulies, le treuil des Chinois et le cabestan. Des treuils en arbres tournants conduits par des cordes et courroies sans fin. Des palans ou poulies mouflées. De la résistance des chaînes. Manière de tenir compte du poids des cordes et courroies dans les équations d'équilibre. Frottement de la vis à filets carrés. Frottement de la vis à filets*

triangulaires. Du frottement dans les engrenages. — NOTES: I. *Sur la valeur approchée linéaire et rationnelle des radicaux de la forme $\sqrt{a^2 - b^2}$, $\sqrt{a^2 - b^2}$, . . .* II. *Sur le moment total et le bras de levier moyen des résistances dans la vis à filets carrés ou triangulaires et les cônes de friction.*

IV^e SECTION. — Influence des variations de la vitesse sur les résistances.

I. DES RÉSISTANCES DANS LES PIÈCES A MOUVEMENT VARIABLE PÉRIODIQUE OU PERMANENT. — II. INFLUENCE DES CHANGEMENTS BRUSQUES SUR LA VITESSE: *Principes généraux.* — III. APPLICATIONS: *Du choc des cames et des pilons. Du choc des cames et des marteaux. Des machines à percer, à découper, à étamper et à frapper les monnaies.*

TODHUNTER (I.), M. A., F. R. S. — A HISTORY OF THE MATHEMATICAL THEORIES OF ATTRACTION AND THE FIGURE OF EARTH, FROM THE TIME OF NEWTON TO THAT OF LAPLACE. — London, Macmillan & Co.; 1873 (1).

L'Histoire scientifique, qui est déjà redevable à M. Todhunter de deux publications importantes (2), vient encore de s'enrichir d'une nouvelle production du savant auteur, consacrée, comme les précédentes, à l'examen critique et détaillé de tous les travaux qui ont paru sur le vaste sujet indiqué par le titre. Ce Livre ne s'adresse donc pas aux lecteurs curieux de connaître seulement les circonstances qui ont accompagné la découverte des grands faits de la Science, et la biographie des inventeurs. Il est écrit pour l'usage des géomètres, et destiné à leur servir de guide dans une étude approfondie de cette difficile théorie.

Nous ne saurions mieux faire, pour donner une idée exacte du contenu de ce Livre, que de traduire l'analyse que l'auteur lui-même en a donnée dans sa Préface :

« Le premier Chapitre est nécessairement consacré à Newton, le

(1) TODHUNTER (I.). *Histoire des Théories mathématiques de l'Attraction et de la Figure de la Terre, depuis le temps de Newton jusqu'à celui de Laplace.* — 2 vol. in-8°, LXXXVI-476 et 508 p. Prix : 24 sh.

(2) *A History of the Process of the Calculus of Variations during the nineteenth Century.* 1861; 1 vol. in-8°.

A History of the Mathematical Theory of the Probability, from the time of Pascal to that of Laplace. 1865; 1 vol. in-8°.

fondateur de l'Astronomie physique. La puissance de génie qui se révèle dans tous ses travaux n'apparaît nulle part avec plus d'éclat que dans la manière dont il a traité nos deux sujets.

» Dans la théorie de l'attraction, entre autres résultats importants, il a fait voir que l'attraction d'une couche sphérique sur un point extérieur est la même que si la couche était réunie en son centre, et que l'attraction sur un point intérieur est nulle. Ces deux propositions constituent une théorie complète de l'attraction d'une sphère dans laquelle la densité varie avec la distance au centre. En outre, le résultat relatif à un point intérieur a été étendu par Newton au cas où les surfaces qui limitent la couche sont des ellipsoïdes de révolution semblables, semblablement placés et concentriques.

» Newton, dans sa recherche de la figure de la Terre, partit de la supposition qu'on pouvait la traiter comme un fluide homogène, tournant avec une vitesse angulaire uniforme. Il admit comme postulat qu'il pouvait exister, en pareil cas, un équilibre relatif, si la forme était celle d'un ellipsoïde de révolution aplati; et il détermina le rapport des axes et la loi de variation de la gravité à la surface. Cette recherche, malgré quelques imperfections, est un rare exemple de succès dans la première discussion d'un problème des plus difficiles, et constitue un monument impérissable du génie hors ligne de son auteur.

» Le second Chapitre est consacré à Huygens. C'est à ce géomètre que nous devons l'importante condition d'équilibre d'un fluide, savoir, que la force résultante en un point quelconque de la surface libre doit être normale à la surface en ce point, et par là il a contribué indirectement à l'avancement de nos connaissances sur ce sujet; mais Huygens n'accepta jamais le grand principe de l'attraction mutuelle des particules de la matière, et à cause de cela on ne lui est redevable que de la solution d'un problème théorique, celui de la recherche de la forme de la surface d'un fluide animé d'un mouvement de rotation sous l'influence d'une force dirigée constamment vers un point fixe.

» Le Chapitre III traite de recherches diverses, se rattachant à notre sujet, pendant le cours de la génération qui suivit la publication des *Principes*. On n'ajouta rien, en réalité, aux résultats théoriques de Newton, tandis que les mesures d'arcs de méridien

en France conduisaient les Cassini à adopter l'hypothèse que la forme de la Terre n'était pas aplatie, mais allongée.

» Le Chapitre IV est relatif à Maupertuis. Ce géomètre écrivit divers Mémoires, parmi lesquels il y en avait deux en forme de commentaires des théories de Newton sur l'attraction et la figure de la Terre. Ces théories étaient rendues plus accessibles par la traduction du langage géométrique de l'original dans le langage analytique familier de l'époque. En adhérant aux conclusions de Newton, Maupertuis a puissamment contribué au triomphe de la vérité chez ses compatriotes, contre les erreurs soutenues par l'autorité de Descartes et des Cassini.

» L'important postulat, admis par Newton, fut examiné pour la première fois par Stirling, géomètre éminent; on voit, dans le Chapitre V, qu'il a obtenu, au moins implicitement, une démonstration approchée du résultat cherché.

» Dans le Chapitre VI, on rend compte de divers Mémoires de Clairaut, antérieurs à la publication de son important Ouvrage sur la figure de la Terre. Clairaut a donné, explicitement, une démonstration par approximation de la vérité du postulat de Newton. Il a fait connaître aussi le théorème qui porte son nom, et qui établit une liaison entre l'ellipticité de la Terre et le coefficient du terme exprimant l'accroissement de la gravité lorsqu'on passe de l'équateur au pôle.

» Le Chapitre VII contient un récit sommaire des circonstances dans lesquelles s'est opérée la mesure d'un arc de méridien en Laponie. J'ai entrepris d'exposer la marche des théories mathématiques de l'attraction et de la figure de la Terre; mais je ne prétends pas y faire entrer les opérations pratiques, qui conduisent à la connaissance des dimensions exactes de la Terre. Ces opérations consistent surtout en observations du pendule et en mesure d'arcs, et un compte rendu de ces travaux, tiré des sources originales, formerait un ouvrage aussi intéressant qu'instructif; mais les sujets plus difficiles auxquels j'ai consacré les présents volumes m'ont fourni une abondance de matériaux assez grande, sans que je fasse aucune digression sérieuse sur le terrain des applications pratiques. Je me suis donc borné à de courtes indications sur les plus anciennes observations du pendule, et sur les deux grandes expéditions de Laponie et du Pérou; ces expéditions méritent quelque attention, à

cause de leur intérêt historique et des preuves décisives qu'elles ont fournies de la forme aplatie de la Terre.

» Le Chapitre VIII traite de diverses recherches faites entre 1721 et 1740. Desaguliers soutint, avec une ardeur parfois inconsidérée, l'aplatissement de la Terre contre l'hypothèse des Cassini; d'autre part, les mesures prises en France semblaient toujours favoriser cette hypothèse. Vers la fin de cette période, l'Académie de Paris proposa pour sujet de prix la Théorie des marées, ce qui donna occasion aux importantes recherches de Maclaurin.

» Le Chapitre IX est consacré à Maclaurin. Ce géomètre résolut complètement le problème de l'attraction d'un ellipsoïde de révolution sur un point de l'intérieur ou de la surface; sa méthode et ses résultats se prêtaient à l'extension, qui se présentait naturellement, de ce cas à celui d'un ellipsoïde à trois axes inégaux. L'extension qu'il entreprit de faire au cas d'un point extérieur demande à être exposée avec soin, pour corriger les erreurs de nature contraire qui s'y rencontrent. Le résultat le plus général, obtenu jusque-là, peut être énoncé ainsi : Les potentiels de deux ellipsoïdes confocaux pour un point donné, extérieur aux deux corps, sont entre eux comme leurs masses. Ce théorème a été établi pour la première fois par Laplace; mais Maclaurin l'a démontré pour le cas particulier où le point extérieur est sur le prolongement d'un des axes des ellipsoïdes. Dans la théorie de la figure de la Terre, le plus grand mérite de Maclaurin est d'avoir donné une démonstration exacte du postulat de Newton, dont on n'avait jusque-là que des preuves par approximation.

» Dans le Chapitre X, on rend compte des travaux de Thomas Simpson. Cet éminent géomètre fit voir explicitement que, si la vitesse angulaire de rotation dépasse une certaine valeur, l'ellipsoïde aplati n'est pas une forme possible d'équilibre relatif pour une masse fluide; de ces résultats il s'ensuivait implicitement que, pour une valeur quelconque de la vitesse angulaire inférieure à cette limite, il existe plus d'une figure d'équilibre relatif. Simpson a donné aussi une remarquable étude sur l'attraction à la surface d'une classe très-étendue de corps approchant de la sphère.

» Le Chapitre XI consiste dans une analyse du célèbre Ouvrage de Clairaut. La Première partie de cet Ouvrage traite des principes de l'équilibre des fluides; ici Clairaut s'est montré de beaucoup

supérieur à ses prédécesseurs, au point de vue de la généralité et de l'exactitude, et il a présenté la théorie sous la forme qu'elle conserve encore, à l'exception seulement du perfectionnement dû à Euler, qui a introduit la notion de la pression en un point quelconque du fluide, en même temps que le symbole convenablement choisi pour la désigner. La seconde Partie traite de la figure de la Terre. Pour le cas d'un fluide homogène, Clairaut a suivi pas à pas Maclaurin. Le cas d'un fluide hétérogène n'avait pas été jusque-là traité d'une manière pratique, et Clairaut inventa, pour l'étudier, un beau procédé, que l'on a conservé jusqu'à présent sans aucun changement essentiel. Le principal résultat est une certaine équation reliant l'ellipticité des couches avec leur densité, et qui se présente sous deux formes, que j'ai respectivement désignées sous les noms d'*équation primitive* et d'*équation dérivée* de Clairaut.

» Le Chapitre XII retrace brièvement les circonstances de la mesure de l'arc de méridien au Pérou. J'ai examiné avec soin les nombreuses publications, consistant en grande partie en articles de controverse, auxquelles a donné lieu cette mémorable expédition; et, par des renvois exacts aux sources, je suis venu en aide à tous ceux qui voudront étudier cette question et en connaître à fond les détails.

» Le Chapitre XIII est consacré à la première moitié des écrits de d'Alembert, relatifs à notre sujet. Ces écrits sont volumineux, et peuvent avoir indirectement servi à répandre le goût de ces recherches, que doit avoir ressenti l'auteur lui-même; mais, à cause des erreurs de principes et des inexactitudes de détails qu'ils renferment, leur valeur intrinsèque n'est pas considérable. Dans les diverses tentatives qu'il a faites pour critiquer l'Ouvrage de Clairaut, d'Alembert me semble avoir eu constamment tort en ce qui regarde la figure de la Terre, et avoir eu raison seulement sur quelques points secondaires de l'Hydrodynamique. On lit, dans la vie de d'Alembert, publiée dans le *Biographical Dictionary of the Society for the Diffusion of Useful Knowledge*, que « lui et Clairaut étaient rivaux, » et qu'aucun ouvrage de l'un d'eux ne paraissait sans trouver dans » l'autre un critique sévère; mais que d'Alembert, le plus circon- » spect et le plus profond des deux, prenait généralement le bon » côté de la question. » Ce jugement est prononcé par une très-haute autorité, devant laquelle j'ai coutume de m'incliner avec

respect; mais, pour ce qui touche au sujet du présent Ouvrage, je me permettrai de prendre le contre-pied de cette sentence.

» Le Chapitre XIV est consacré principalement à Boscovich, dont les écrits nous offrent des exposés élémentaires des résultats les plus importants obtenus à la date de leur publication. Je donne aussi une courte Notice sur le poëme de Stay, pour lequel Boscovich a fourni des Notes et des dissertations supplémentaires.

» Le Chapitre XV traite des recherches diverses qui ont eu lieu entre les années 1741 et 1760. Il renferme une brève analyse d'un Mémoire couronné sur la Figure de la Terre, publié par Clairaut, quelques années après son Traité.

» Le Chapitre XVI a pour objet la seconde moitié des écrits de d'Alembert. Leur caractère général est le même que celui de la première moitié; les recherches elles-mêmes sont déparées par de graves erreurs, mais elles servent à attirer l'attention sur des sujets pleins d'intérêt et d'importance.

» Les Ouvrages de Frisi sont analysés dans le Chapitre XVII. Ils ressemblent à ceux de Boscovich, en ce qu'ils ont plutôt contribué à propager qu'à augmenter les connaissances sur la question.

» Le Chapitre XVIII traite des recherches diverses qui ont été faites de 1761 à 1780. Les trois premiers Mémoires de Laplace appartiennent à cette période; mais nous avons cru convenable d'en ajourner l'examen. Le Chapitre contient le compte rendu d'un Mémoire de Lagrange, traitant par l'Analyse la question que Maclaurin avait résolue géométriquement. Les opérations exécutées dans les monts Schehalliens, pour la détermination de la densité de la Terre, sont mentionnées, et l'on renvoie aux sources pour les travaux postérieurs sur le même sujet. Ici finit le premier volume, contenant l'histoire de notre sujet pendant le siècle qui a suivi la publication des *Principes* de Newton.

» Le Chapitre XIX concerne le premier des trois Mémoires de Laplace. On peut dire que l'objet principal de ces Mémoires est la solution d'un problème qui est une extension du postulat de Newton. Newton admettait qu'un sphéroïde aplati était une forme possible d'équilibre relatif pour un fluide animé d'une rotation; le problème actuel est de faire voir qu'un sphéroïde aplati est la *seule* forme possible, au moins sous certaines restrictions. J'appelle cette question le *Problème de Legendre*, ce géomètre étant le premier qui

en ait donné une solution passable. D'Alembert aborda le problème, mais il y échoua. Laplace ne le résolut pas complètement; mais il fit voir que, pour une classe très-nombreuse de figures approchant de la sphère, l'équilibre était impossible. Il obtint aussi l'expression de la loi de la gravité qui doit avoir lieu universellement.

» Le Chapitre XX est consacré à un Mémoire qui occupe une place remarquable dans l'histoire de la théorie de l'attraction : c'est le premier Mémoire de Legendre. La limite atteinte par Maclaurin est maintenant, pour la première fois, dépassée de beaucoup; Legendre montre que le théorème concernant les ellipsoïdes confocaux est vrai pour *toute position* du point extérieur, quand les ellipsoïdes sont de révolution. Legendre introduit ici les expressions célèbres, jusque-là inconnues, que l'on appelle maintenant, d'habitude, les *coefficients de Laplace*; en outre, d'après une idée suggérée par Laplace, nous voyons apparaître dans cette théorie la fonction appelée aujourd'hui la *fonction potentielle*.

» Le Chapitre XXI nous met sous les yeux un Traité assez rare de Laplace, et contient l'analyse de la partie de ce Traité qui se rapporte à l'attraction et à la figure de la Terre. Là se trouve pour la première fois la démonstration du théorème concernant l'action des ellipsoïdes confocaux sur un point extérieur, théorème que j'appelle du nom de Laplace. Les théories de l'attraction des ellipsoïdes et de la figure homogène de la Terre sont présentées dans ce Traité à peu près sous la même forme que dans la *Mécanique céleste*.

» Le Chapitre XXII est relatif au second Mémoire de Legendre. Ici Legendre résout le problème auquel j'attache son nom. Il admet que le fluide a la figure d'un corps de révolution et qu'il ne s'écarte pas beaucoup de la forme sphérique.

» Le Chapitre XXIII rend compte des quatrième, cinquième et sixième Mémoires de Laplace. Le quatrième et le cinquième Mémoire contiennent la théorie de l'attraction des sphéroïdes, et la théorie des fonctions de Laplace sous la même forme que dans la *Mécanique céleste*. Le sixième Mémoire est relatif à l'anneau de Saturne.

» Le Chapitre XXIV est consacré au troisième Mémoire de Legendre. L'objet de ce Mémoire est de démontrer le théorème de Laplace sur les ellipsoïdes confocaux, par un procédé plus direct que

celui que Laplace lui-même avait employé. Legendre démontre le théorème sans développer ses expressions en séries; mais la marche est excessivement longue et compliquée.

» Le Chapitre XXV analyse le quatrième Mémoire de Legendre. On y trouve un grand développement de la méthode de Clairaut pour le cas d'un fluide homogène. L'auteur obtient une équation générale, analogue à l'équation primitive de Clairaut, et il s'en sert pour faire voir que les couches doivent être ellipsoïdales.

» Le Chapitre XXVI est consacré au septième Mémoire de Laplace. Ce Mémoire contient quelques discussions numériques des longueurs de degrés et des longueurs du pendule à seconde; il s'y trouve aussi une théorie de la figure hétérogène de la Terre, qui s'accorde, en substance, avec celle du quatrième Mémoire de Legendre.

» Le Chapitre XXVII traite des recherches diverses qui ont eu lieu de 1781 à 1800. Entre autres sujets, nous avons ici à mentionner l'*Introduction à l'étude de l'Astronomie physique*, par Cousin, un Mémoire de Lagrange, et un autre de Trembley; ce dernier travail est d'une valeur aussi médiocre que les différents Mémoires du même auteur que j'ai examinés dans mon *Histoire de la Théorie mathématique des Probabilités*.

» Le Chapitre XXVIII rend compte des deux premiers volumes de la *Mécanique céleste*, en tant qu'ils se rapportent à notre sujet. Laplace y a reproduit avec peu de changements les quatre derniers de ses sept Mémoires, et l'ensemble forme un Traité qui n'a pas encore été dépassé.

» Le Chapitre XXIX retrace l'histoire des recherches concernant le théorème de Laplace. Ivory, Legendre, Gauss et Rodrigues ont tous donné des discussions complètes de l'attraction des ellipsoïdes, tandis que Biot et Plana ont commenté des parties de cette théorie. La méthode d'Ivory est la plus simple de toutes, et elle a conquis une place permanente dans nos Ouvrages élémentaires, d'autant plus qu'on a l'habitude de parler du *théorème d'Ivory*, quoiqu'il fût plus exact de dire la *démonstration par Ivory du théorème de Laplace*.

» Le Chapitre XXX traite d'une équation que Laplace semble avoir considérée avec une prédilection marquée, et qui se rencontre souvent dans ses Ouvrages. Toutefois cette équation ne parut pas

satisfaisante à Ivory, qui la critiqua avec sévérité. On peut dire que le résultat de cette discussion a été d'établir l'exactitude de l'équation, pourvu qu'on s'en serve, comme le faisait Laplace lui-même, avec les précautions convenables; mais, d'autre part, les résultats que Laplace voulait atteindre au moyen de son équation s'obtiennent maintenant, en général, sans y avoir recours, de sorte qu'à présent cette équation est rarement employée dans la pratique.

» Le Chapitre XXXI explique l'équation aux différentielles partielles du symbole qui désigne la fonction potentielle. Laplace avait d'abord admis qu'une certaine équation avait lieu à la fois pour une particule extérieure et pour une particule intégrante du corps considéré; mais Poisson montra que les deux cas exigeaient des formes d'équation différentes.

» Le Chapitre XXXII discute une méthode donnée par Laplace pour résoudre le problème de Legendre, avec l'objection faite à cette méthode par Liouville, et l'analyse que Poisson a substituée à celle de Laplace.

» Le Chapitre XXXIII passe en revue divers Mémoires publiés par Laplace, pendant le premier quart du présent siècle.

» Le Chapitre XXXIV est consacré à la partie du cinquième volume de la *Mécanique céleste* qui se rapporte à notre double sujet, et qui consiste principalement dans une reproduction des Mémoires dont il a été question au Chapitre XXXIII.

» Strictement parlant, la période historique que je me proposais de décrire s'arrête ici; mais il m'a semblé convenable de renfermer dans mon cadre tous les écrits de trois mathématiciens qui avaient déjà joué un rôle important dans mon Livre, et qui peuvent être associés naturellement avec leurs prédécesseurs, particulièrement avec Laplace. Ces auteurs sont Poisson, Ivory et Plana.

» Le Chapitre XXXV contient un compte rendu de tous les travaux de Poisson qui n'avaient pas été déjà examinés. Les plus importants sont un Mémoire approfondi sur l'attraction des sphéroïdes, et un Mémoire contenant une nouvelle étude du théorème de Laplace sur les ellipsoïdes confocaux.

» Le Chapitre XXXVI donne une courte esquisse des nombreux articles et Mémoires publiés par Ivory, en vue surtout de défendre certaines opinions personnelles, à la fois singulières et erronées. Les grandes promesses que faisaient entrevoir ses premiers succès

ne furent suivies d'aucun résultat de quelque valeur dans les essais de ses dernières années.

» Le Chapitre XXXVII est consacré à Plana, qui a écrit divers Mémoires, la plupart en forme de commentaires, sur Lagrange, Legendre et Laplace.

» Le dernier Chapitre traite de différentes recherches entreprises pendant le premier quart du présent siècle. C'est par hasard que l'Histoire se termine par un paragraphe relatif à Bowditch; mais, au point de vue de ses qualités morales et intellectuelles et de son dévouement désintéressé à la Science, le nom d'un des géomètres les plus distingués de l'autre côté de l'Atlantique mérite bien de clore une liste qui commence par le nom de Newton. »