BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Revue bibliographique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 6 (1874), p. 225-227

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1874__6__225_0>

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

DURÈGE (Dr. H.), ord. Professor an der Universität zu Prag. — ELEMENTE DER THEORIE DER FUNCTIONEN EINER COMPLEXEN VERÄNDERLICHEN GRÖSSE. Mit besonderer Berücksichtigung der Schöpfungen Riemann's bearbeitet. Zweite, zum Theil umgearbeitete Auflage. — Leipzig, Verlag von B.-G. Teubner, 1873 (1).

Cet Ouvrage, dont la première édition a paru en 1864, est le plus ancien Traité où se trouve exposée en corps de doctrine la théorie fondée par Cauchy, complétée et simplifiée par les découvertes de Riemann.

On possédait depuis longtemps de nombreuses formules fondées sur l'emploi des quantités imaginaires, bien avant que l'on eût cessé de considérer ces quantités comme des symboles d'impossibilité; mais c'est seulement à partir du moment où, se plaçant à un point de vue plus élevé, on a reconnu leur réalité et introduit leur représentation géométrique, que la théorie des quantités complexes a été véritablement fondée. Le premier pas dans cette voie a été fait par Argand en 1806. Quinze ans plus tard, Cauchy, quoique partageant encore les anciennes idées, établissait rigoureusement, dans son *Analyse algébrique*, les bases du Calcul des imaginaires, et bientôt il allait inaugurer, par l'invention du Calcul des résidus, la série de ses prodigieuses découvertes, auxquelles l'usage de la notation géométrique, adoptée par lui dans ses dernières productions, est venue ajouter la clarté et l'harmonie qui jusque-là leur faisaient défaut. Les travaux du grand géomètre ont solidement fondé la théorie de ces quantités, auxquelles l'usage tend maintenant à enlever le nom, désormais impropre, d'*imaginaires*. Il ne restait plus à ses successeurs qu'à la perfectionner.

La représentation géométrique, complétement satisfaisante pour les fonctions à une seule détermination, était encore imparfaite pour les fonctions susceptibles de plusieurs valeurs. Riemann combla cette lacune par l'ingénieuse conception de ses surfaces à plu-

(1) DURÈGE (H.) professeur ordinaire à l'Université de Prague. — *Éléments de la théorie des fonctions d'une variable complexe, principalement au point de vue des créations de Riemann*. Seconde édition, en partie refondue. — Leipzig, Teubner, 1873. 1 vol. in-8°, XII-223 p. Prix 1 Thlr. 20 Sgr.

sieurs nappes. Il alla plus loin : en développant la théorie de la transformation et de la déformation de ces surfaces, il parvint à ramener l'étude des points à l'infini à celle des points à distance finie, et il expliqua, par de pures considérations de Géométrie de situation, la multiplicité des valeurs des intégrales des fonctions non synectiques, et la périodicité des fonctions inverses de ces intégrales.

Le Mémoire dans lequel Riemann avait exposé sa méthode, en 1851, était longtemps resté accessible aux seuls disciples de l'auteur, et les géomètres, pour la plupart, reculèrent devant les difficultés que présentait la lecture de cette œuvre, concise jusqu'à l'obscurité : aussi M. Durège rendit-il un véritable service lorsqu'il publia son livre, il y a dix ans. Pour la première fois on eut sous les yeux un exposé méthodique des doctrines de Cauchy, débarrassées de certaines complications inutiles qu'y avait laissées l'inventeur, et complétées par les découvertes de Riemann, que M. Durège avait pu étudier dans les cahiers de ses élèves, et qu'il présentait avec tous les développements nécessaires et avec la clarté qui distingue ses écrits.

Bien que l'apparition de ce Traité ait été suivie de près par d'autres publications de plusieurs auteurs sur le même sujet, il n'en a pas moins atteint, en peu d'années, sa seconde édition, dans laquelle M. Durège a eu l'occasion d'introduire quelques améliorations. Donnons une idée du contenu de ce volume.

Après une Introduction où l'auteur rappelle les diverses phases qu'a traversées la théorie des quantités négatives et des quantités imaginaires, il expose dans le Chapitre I la représentation géométrique de ces dernières quantités.

Le Chapitre II traite des fonctions d'une variable complexe en général. L'auteur considère exclusivement les fonctions que Cauchy a nommées *monogènes*, et auxquelles seules on peut appliquer les règles du Calcul différentiel établies pour les quantités réelles.

Dans le Chapitre III, où il est question de fonctions à plusieurs déterminations, M. Durège explique leur mode de représentation *uniforme* (*eindeutig*) au moyen des surfaces de Riemann.

Le Chapitre IV est consacré aux intégrales des fonctions d'une variable complexe. L'auteur donne, d'après Riemann, la démonstration du théorème de Cauchy relatif à l'intégrale d'une fonction, prise le long du contour d'une aire à l'intérieur de laquelle la fonction est synectique. Il traite ensuite des intégrales prises autour d'un infini de la fonction, et auxquelles Cauchy a donné le nom de *résidus*.

L'étude du logarithme et de la fonction exponentielle, qui en est l'inverse, forme l'objet du Chapitre V.

Dans le Chapitre VI, M. Durège revient à la théorie générale; il démontre le théorème fondamental de Cauchy sur la représentation d'une fonction sous la forme d'un résidu, et il en tire les développements des fonctions en séries de puissances, infinies dans un seul sens ou dans les deux sens.

Le Chapitre VII comprend l'étude des valeurs infiniment grandes ou infiniment petites des fonctions tant uniformes que multiformes.

Dans le Chapitre VIII, intitulé *Intégrales*, M. Durège s'occupe d'abord des intégrales prises le long d'un contour fermé, puis des intégrales prises le long d'une ligne non fermée.

Ces premiers Chapitres sont restés à peu près tels qu'ils étaient dans la première édition. Des changements plus considérables ont été opérés dans le Chapitre IX, où l'auteur traite la difficile question de l'ordre de connexité des surfaces. Jusqu'à présent on avait bien démontré que le nombre q des sections transverses nécessaires pour transformer une surface donnée en une section simplement connexe est constant pour chaque surface; mais il restait à prouver que, réciproquement, tout système de q sections transverses, quelle que soit la loi de sa formation, changera nécessairement une surface à connexion $(q+1)^{\text{uple}}$ en une surface à connexion simple. Les nouvelles recherches de M. Durège lui ont permis de combler cette lacune importante.

Le Chapitre X, qui est le dernier de la nouvelle édition, a pour objet l'étude des modules de périodicité. L'auteur donne comme exemple l'inversion de la fonction logarithmique, de l'arc-tangente, de l'arc-sinus et de l'intégrale elliptique.

Le Chapitre XI de la première édition, relatif à la détermination d'une fonction d'après ses conditions de discontinuité, a été supprimé à cause des développements étendus qu'eût exigés l'état actuel de la question. L'ancien Chapitre XII a été fondu dans le Chapitre IX. J. H.