BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

B. RIEMANN

Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 5 (1873), p. 79-96

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1873__5__79_1>

SUR LA POSSIBILITÉ DE REPRÉSENTER UNE FONCTION PAR UNE SÉRIE TRIGONOMÉTRIQUE;

PAR B. RIEMANN.

(Suite.)

§ 9.

A l'aide de ces trois théorèmes, on peut énoncer les propositions suivantes sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique dont les termes finissent par devenir infiniment petits pour toute valeur de l'argument.

I. Pour qu'une fonction périodique, ayant 2π pour période, puisse être représentée par une série trigonométrique dont les termes finissent par devenir infiniment petits pour toute valeur de x, il faut qu'il existe une fonction continue $F(x)$, dont $f(x)$ dépende de telle manière que l'expression

$$\frac{F(x+\alpha+\beta)-F(x+\alpha-\beta)-F(x-\alpha+\beta)+F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta},$$

où α et β sont des infiniment petits dont le rapport est fini, converge vers $f(x)$.

(¹) Voir *Corrispondenza scientifica in Roma per l'avanzamento delle Scienze.* T. IV, 1856. (In-4°, 2 p.)

Il faut, de plus, que l'intégrale

$$\mu^2 \int_b^c F(x)\cos\mu(x-a)\lambda(x)\,dx,$$

lorsque $\lambda(x)$ et $\lambda'(x)$ sont nuls aux limites b, c, et demeurent finis entre ces limites, et que $\lambda''(x)$ n'a pas un nombre infini de maxima et de minima, devienne infiniment petite quand μ augmente indéfiniment.

II. Réciproquement, si ces conditions sont satisfaites, il y a une série trigonométrique, dans laquelle les coefficients finissent par devenir infiniment petits, et qui représente la fonction toutes les fois qu'elle est convergente.

Déterminons, en effet, les quantités C', A_0, de telle manière que $F(x) - C'x - A_0\,\frac{x^2}{2}$ soit une fonction périodique, de période 2π, et développons cette fonction d'après la méthode de Fourier dans la série trigonométrique

$$C - \frac{A_1}{1} - \frac{A_2}{4} - \frac{A_3}{9} - \ldots,$$

en faisant

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[F(t) - C't - A_0\frac{t^2}{2}\right]dt = C,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[F(t) - C't - A_0\frac{t^2}{2}\right]\cos n(x-t)\,dt = -\frac{A_n}{n^2};$$

alors, d'après ce qui précède,

$$A_n = -\frac{n^2}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[F(t) - C't - A_0\frac{t^2}{2}\right]\cos n(x-t)\,dt$$

deviendra toujours infiniment petit quand n croîtra, et, par suite, il résulte, du théorème I de l'article précédent, que la série

$$A_0 + A_1 + A_2 + \ldots,$$

toutes les fois qu'elle sera convergente, aura pour somme $f(x)$.

III. Soit $b < x < c$, et $\rho(t)$ une fonction telle que $\rho(t)$ et $\rho'(t)$ aient, pour $t = b$ et pour $t = c$, la valeur zéro, et qu'elles soient continues entre ces limites; que $\rho''(t)$ n'ait pas un nombre infini de maxima et de minima, et que d'ailleurs, pour $t = x$, on ait

$\rho(t) = 1$, $\rho'(t) = 0$, $\rho''(t) = 0$, $\rho'''(t)$ et $\rho^{\text{IV}}(t)$ demeurant finies et continues; alors la différence entre la série $A_0 + A_1 + \ldots + A_n$ et l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_b^c F(t)\,\frac{d^2\,\dfrac{\sin\dfrac{(2n+1)(x-t)}{2}}{\sin\dfrac{x-t}{2}}}{dt^2}\,\rho(t)\,dt$$

devient toujours infiniment petite, quand n croît indéfiniment. La série sera donc convergente ou divergente, suivant que l'intégrale précédente tendra ou ne tendra pas vers une limite fixe, quand n croîtra indéfiniment.

Pour établir cette proposition, remarquons que l'on a

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[F(t) - C't - \frac{A_0 t^2}{2}\right]\sum_1^n - n^2\cos n(x-t)\,dt,$$

ou, à cause de

$$2\sum_1^n - n^2\cos n(x-t) = 2\sum_1^n \frac{d^2\cos n(x-t)}{dt^2} = \frac{d^2\,\dfrac{\sin\dfrac{(2n+1)(x-t)}{2}}{\sin\dfrac{x-t}{2}}}{dt^2},$$

$$A_1 + \ldots + A_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[F(t) - C't - \frac{A_0 t^2}{2}\right]\frac{d^2\,\dfrac{\sin\dfrac{(2n+1)(x-t)}{2}}{\sin\dfrac{x-t}{2}}}{dt^2}\,dt.$$

Or, d'après le théorème III de l'article précédent, l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[F(t) - C't - A_0\frac{t^2}{2}\right]\frac{d^2\,\dfrac{\sin\dfrac{(2n+1)(x-t)}{2}}{\sin\dfrac{x-t}{2}}}{dt^2}\,\lambda(t)\,dt$$

devient infiniment petite quand n croît indéfiniment, si $\lambda(t)$ demeure continue, ainsi que sa première dérivée, si $\lambda''(t)$ n'a pas un nombre infini de maxima et de minima, et si, pour $t=x$, on a $\lambda(t)=0$, $\lambda'(t)=0$, $\lambda''(t)=0$, $\lambda'''(t)$ et $\lambda^{\text{IV}}(t)$ demeurant finies et continues.

Cela posé, si l'on prend $\lambda(t)$ égal à 1, en dehors des limites b, c, et à $1-\rho(t)$, entre ces limites, ce qui est évidemment permis, il résulte de là que la différence entre la série $A_1+\ldots+A_n$ et l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_b^c \left[F(t)-C't-A_0\frac{t^2}{2}\right]\frac{d^2\dfrac{\sin\dfrac{(2n+1)(x-t)}{2}}{\sin\dfrac{x-t}{2}}}{dt^2}\rho(t)\,dt$$

devient toujours infiniment petite, quand n croît indéfiniment. On vérifie facilement, au moyen d'une intégration par parties, que le terme

$$\frac{1}{2\pi}\int_b^c \left(C't+A_0\frac{t^2}{2}\right)\frac{d^2\dfrac{\sin\dfrac{(2n+1)(x-t)}{2}}{\sin\dfrac{x-t}{2}}}{dt^2}\rho(t)\,dt$$

tend vers A_0, quand n devient infini, d'où résulte la démonstration du théorème proposé.

§ 10.

Il résulte des recherches précédentes que, si les coefficients de la série Ω finissent par devenir infiniment petits avec $\frac{1}{n}$, la convergence de la série, pour une valeur déterminée de x, dépend seulement de la manière dont se comporte la fonction dans le voisinage immédiat de cette valeur.

Pour reconnaître si les coefficients de la série deviennent toujours infiniment petits, on ne pourra pas toujours partir de leur expression par des intégrales définies, et l'on devra avoir recours à d'autres méthodes. Il importe cependant de considérer à part un cas où cette propriété résulte immédiatement de la nature de la fonction, à savoir : celui où la fonction $f(x)$ demeure toujours finie et est susceptible d'intégration.

Dans ce cas, si l'on sépare l'intervalle complet de $-\pi$ à $+\pi$ en petits intervalles de grandeurs $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$, et si l'on désigne par $D_1, D_2, D_3, \ldots$ les plus grandes oscillations de la fonction dans ces intervalles, la somme

$$\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \delta_3 D_3 + \ldots$$

devra devenir infiniment petite, quand tous les δ tendront vers zéro.

Cela posé, si l'on partage l'intégrale $\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin n(x - a)\, dx$, qui représente, au facteur $\frac{1}{\pi}$ près, les différents coefficients de la série, ou, ce qui est la même chose, l'intégrale

$$\int_a^{a+2\pi} f(x) \sin n(x - a)\, dx,$$

prise à partir de $x = a$, en intégrales partielles correspondant à des intervalles égaux à $\frac{2\pi}{n}$, alors chacune d'elles fournit à la somme une portion plus petite que $\frac{2}{n}$ multiplié par la plus grande oscillation dans son intervalle, et leur somme est plus petite qu'une grandeur qui, d'après les hypothèses, devient infiniment petite avec $\frac{2\pi}{n}$.

En effet, ces intégrales sont de la forme

$$\int_{a+s\frac{\pi}{n}}^{a+(s+1)\frac{\pi}{n}} f(x) \sin n(x - a)\, dx.$$

Le sinus est positif dans la première moitié de l'intervalle, et négatif dans la seconde. Si donc on désigne par M la plus grande valeur de $f(x)$ dans cet intervalle, par m la plus petite, il est clair qu'on augmente l'intégrale si, dans la première moitié de l'intervalle, on remplace $f(x)$ par M, et dans la seconde moitié par m, et que l'on diminue l'intégrale si, dans la première moitié, on remplace $f(x)$ par m, et dans la seconde par M. Dans le premier cas on obtient

$$\frac{2}{n}(\mathrm{M}-m),$$

et, dans le second,

$$\frac{2}{n}(m-\mathrm{M}).$$

L'intégrale, abstraction faite du signe, est donc plus petite que $\frac{2}{n}(\mathrm{M}-m)$, et, par suite, l'intégrale $\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin n(x-a)\,dx$ est plus petite que

$$\frac{2}{n}(\mathrm{M}_1-m_1)+\frac{2}{n}(\mathrm{M}_2-m_2)+\ldots,$$

si l'on désigne par M_s et m_s la plus grande et la plus petite valeur de $f(x)$ dans le $s^{\text{ième}}$ intervalle. Cette somme, puisque $f(x)$ est susceptible d'intégration, doit devenir infiniment petite toutes les fois que l'intervalle $\frac{2\pi}{n}$ tend vers zéro.

Donc, dans le cas que nous avons supposé, les termes deviendront infiniment petits avec $\frac{1}{n}$, quel que soit x.

§ 11.

Il reste encore à examiner le cas où les termes de la série Ω deviennent infiniment petits avec $\frac{1}{n}$ pour une valeur de l'argument x, sans que cela ait lieu pour toute valeur de cet argument. Ce cas peut se ramener au précédent.

Si, dans les séries relatives aux valeurs de l'argument $x+t$ et $x-t$, on ajoute les termes de même rang, on obtient la série

$$2\mathrm{A}_0+2\mathrm{A}_1\cos t+2\mathrm{A}_2\cos 2t+\ldots,$$

dans laquelle les termes deviennent infiniment petits avec $\frac{1}{n}$ pour toute valeur de t, et à laquelle on peut, par conséquent, appliquer les méthodes des articles précédents.

Désignons, pour cela, par $G(t)$ la valeur de la série infinie

$$C + C'x + A_0 \frac{x^2}{2} + A_0 \frac{t^2}{2} - A_1 \frac{\cos t}{1} - A_2 \frac{\cos 2t}{4} - A_3 \frac{\cos 3t}{9} - \ldots,$$

de telle manière que $\frac{F(x+t) + F(x-t)}{2}$ soit égal à $G(t)$ pour toutes les valeurs de t pour lesquelles les séries qui représentent $F(x+t)$ et $F(x-t)$ sont convergentes. On aura alors les propositions suivantes :

I. Si les termes de la série Ω deviennent infiniment petits avec $\frac{1}{n}$ pour toute valeur de x, alors la fonction

$$\mu^2 \int_c^b G(t) \cos \mu (t-a) \lambda(t)\, dt,$$

$\lambda(t)$ étant une fonction définie comme précédemment (§ 9), devient infiniment petite quand μ croît au delà de toute limite. La valeur de l'intégrale se compose de deux parties

$$\frac{\mu^2}{2} \int_c^b F(x+t) \cos \mu (t-a) \lambda(t)\, dt, \quad \frac{\mu^2}{2} \int_c^b F(x-t) \cos \mu (t-a) \lambda(t)\, dt,$$

toutes les fois que ces deux intégrales ont une valeur déterminée. La valeur de l'intégrale est donc rendue infiniment petite par la manière dont se comporte la fonction F en deux points situés symétriquement au-dessus et au-dessous de x. Il faut d'ailleurs remarquer qu'il doit exister, dans le cas actuel, des points pour lesquels chacune de ces parties, considérée en elle-même, ne devient pas infiniment petite ; car autrement tous les termes de la série Ω finiraient par devenir infiniment petits avec $\frac{1}{n}$ pour toute valeur de l'argument x. Par conséquent, les valeurs correspondant à ces deux points, situés symétriquement par rapport à x, doivent alors se détruire en partie, de manière que leur somme tende vers zéro quand μ croît indéfiniment. Il s'ensuit que la série Ω ne peut être convergente que pour des valeurs de la quantité x pour lesquelles les points où

$$\mu^2 \int_b^c F(x) \cos \mu (x-a) \lambda(x)\, dx$$

n'est pas infiniment petit pour x infini sont situés symétriquement. Si le nombre de ces intervalles symétriques est infiniment grand, il résulte évidemment de ce qui précède que la série trigonométrique pourra converger pour une infinité de valeurs de x, sans que ses coefficients deviennent infiniment petits avec $\frac{1}{n}$ pour toute valeur de x.

Réciproquement, on a

$$A_n = -\frac{2n^2}{\pi}\int_0^\pi \left[G(t) - A_0\frac{t^2}{2}\right]\cos nt\,dt,$$

et, par suite, A_n deviendra infiniment petit avec $\frac{1}{n}$, toutes les fois que $\mu^2\int_b^c G(t)\cos\mu(t-a)\,\lambda(t)\,dt$ deviendra infiniment petit quand μ dépassera toute limite.

II. Si les termes de la série Ω deviennent infiniment petits avec $\frac{1}{n}$ pour la valeur x de l'argument, la convergence ou la divergence de la série dépendra de la marche de la fonction $G(t)$ pour une valeur infiniment petite de t, et la différence entre $A_0+A_1+\ldots+A_n$ et l'intégrale

$$\frac{1}{\pi}\int_0^b G(t)\,\frac{d^2\dfrac{\sin\dfrac{(2n+1)t}{2}}{\sin\dfrac{t}{2}}}{dt^2}\,\rho(t)\,dt$$

deviendra infiniment petite avec $\frac{1}{n}$, si b est une constante aussi petite qu'on le voudra, comprise entre zéro et π, et $\rho(t)$ une fonction telle que $\rho(t)$, $\rho'(t)$ soient toujours continues, et soient égales à zéro pour $t=b$, et qu'en outre $\rho''(t)$ n'ait pas un nombre infini de maxima et de minima, et que, pour $t=0$, on ait $\rho(t)=0$, $\rho'(t)=0$, $\rho''(t)=0$, $\rho'''(t)$ et $\rho^{\text{IV}}(t)$ demeurant finies et continues.

§ 12.

Les conditions nécessaires à la représentation d'une fonction par une série trigonométrique peuvent bien être encore un peu restreintes, et, par suite, nos recherches peuvent être encore poussées plus avant, sans qu'il soit fait aucune hypothèse particulière sur la nature de la fonction. Par exemple, dans le dernier théorème obtenu, la condition que $\rho''(0) = 0$ peut être supprimée, si l'on remplace, dans l'intégrale

$$\frac{1}{\pi}\int_0^b G(t)\,\frac{d^2\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}}{dt^2}\,\rho(t)\,dt,$$

$G(t)$ par $G(t) - G(0)$; mais on ne gagne ainsi rien d'essentiel.

Passons donc à la considération des cas particuliers, et proposons-nous d'indiquer, pour le cas où la fonction n'a pas un nombre infini de maxima ou de minima, les propositions complémentaires qu'on peut encore ajouter au travail de Dirichlet.

Il a été remarqué plus haut qu'une telle fonction peut toujours être intégrée partout où elle ne devient pas infinie, et il est évident qu'elle ne peut devenir infinie que pour un nombre limité de valeurs de l'argument. Dirichlet démontre aussi que, dans les expressions intégrales du $n^{\text{ième}}$ terme de la série et de la somme des n premiers termes, la portion de l'intégrale relative à tous les intervalles, à l'exception de ceux où la fonction devient infinie et de l'intervalle infiniment petit comprenant la valeur de l'argument x, devient infiniment petite, quand n croît indéfiniment, et que

$$\int_x^{x+b} f(t)\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{x-t}{2}}\,dt,$$

où $0 < b < \pi$, et où $f(t)$ ne devient pas infini dans les limites de l'intégration, converge, pour n infini, vers $\pi f(x+0)$, et cette démonstration ne laisse rien à désirer, quand on supprime l'hypothèse inutile que $f(x)$ soit continu. Il reste seulement à rechercher dans quels cas les intégrales relatives aux intervalles infiniment petits, dans lesquels la fonction devient infinie, deviennent infiniment petites, quand n augmente indéfiniment. Cette recherche n'a pas été faite; mais Dirichlet a seulement fait voir, en passant, que cela a lieu, dès que l'on suppose que la fonction à représenter est susceptible d'intégration; mais cette hypothèse n'est pas nécessaire.

Nous avons vu plus haut que, si les termes de la série Ω deviennent infiniment petits avec $\frac{1}{n}$ pour toute valeur de x, la fonction $F(x)$, dont $f(x)$ est la seconde dérivée, doit être finie et continue, et que

$$\frac{F(x+\alpha)-2F(x)+F(x-\alpha)}{\alpha}$$

est toujours infiniment petit avec α. Si maintenant la fonction

$$F'(x+t)-F'(x-t)$$

n'a pas un nombre infini de maxima et de minima, alors, quand t deviendra nul, elle devra tendre vers une limite finie L ou devenir infinie, et il est évident que

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha [F'(x+t)-F'(x-t)]\,dt=\frac{F(x+\alpha)-2F(x)+F(x-\alpha)}{\alpha}$$

devra de même converger vers L ou vers l'infini, et, par suite, que cette expression ne deviendra infiniment petite que si

$$F'(x+t)-F'(x-t)$$

a zéro pour limite. D'après cela, si $f(x)$ devient infini pour $x=a$, il faut que l'on puisse toujours intégrer $f(a+t)+f(a-t)$ jusqu'à $t=0$. Cela suffit pour que

$$\left(\int_b^{a-\varepsilon}+\int_{a+\varepsilon}^c\right)dx f(x)\cos n(x-a)$$

converge lorsque ε tend vers zéro, et devienne infiniment petit quand n croît. Comme d'ailleurs la fonction $F(x)$ est finie et continue, $F'(x)$ doit être susceptible d'intégration jusqu'à $x=a$, et $(x-a)F'(x)$ devenir infiniment petit avec $x-a$, si cette fonction n'a pas un nombre infini de maxima et de minima, d'où il suit que

$$\frac{d.(x-a)F'(x)}{dx}=(x-a)f(x)+F'(x),$$

et, partant, que $(x-a)f(x)$ pourra aussi être intégré jusqu'à $x=a$. D'après cela, $\int f(x)\sin n(x-a)\,dx$ peut aussi être intégré jusqu'à $x=a$, et, pour que les coefficients de la série finissent par devenir infiniment petits, il suffira évidemment que l'intégrale $\int_b^c f(x)\sin n(x-a)\,dx$, où $b<a<c$, devienne infiniment petite, quand n croît. Posons $f(x)(x-a)=\varphi(x)$; alors, si cette fonction, comme on le suppose, n'a pas un nombre infini de maxima et de minima, on aura, pour n infini,

$$\int_b^c f(x)\sin n(x-a)\,dx = \int_b^c \frac{\varphi(x)}{x-a}\sin n(x-a)\,dx$$
$$= \frac{\varphi(a+0)+\varphi(a-0)}{2},$$

comme Dirichlet l'a prouvé. En conséquence,

$$\varphi(a+t)+\varphi(a-t)=f(a+t).t-f(a-t).t$$

doit devenir infiniment petit avec t, et comme

$$f(a+t)+f(a-t)$$

peut être intégré jusqu'à $t=0$ et que, par suite,

$$f(a+t).t+f(a-t).t$$

est infiniment petit avec t, on voit que $f(a+t).t$ et aussi $f(a-t).t$ doivent être infiniment petits avec t. En faisant abstraction des fonctions qui ont un nombre infini de maxima et de minima, nous voyons qu'il est nécessaire et suffisant, pour la représentation d'une fonction par une série trigonométrique dont les termes sont infiniment petits avec $\frac{1}{n}$, que, si elle devient infinie pour $x=a$, $f(a+t).t$ et $f(a-t).t$ soient infiniment petits avec t, et que $f(a+t)+f(a-t)$ puisse être intégré jusqu'à $t=0$.

Une série trigonométrique dont les coefficients ne finissent pas par devenir infiniment petits ne peut représenter que pour un nombre fini de valeurs de x une fonction qui n'a pas un nombre infini de maxima et de minima, parce que

$$\mu^2 \int_b^c \mathrm{F}(x) \cos \mu (x - a) \lambda(x) dx$$

ne peut cesser d'être infiniment petit, pour μ infini, que pour un nombre limité de valeurs de x. Il est donc inutile d'insister sur cette hypothèse.

§ 13.

Pour ce qui concerne les fonctions qui ont un nombre infini de maxima et de minima, il ne sera pas inutile de remarquer qu'une telle fonction $f(x)$ peut être susceptible d'une intégration, sans pouvoir être représentée par une série de Fourier. Cela aura lieu, par exemple, si l'on a

$$f(x) = \frac{d\left(x^\nu \cos \frac{1}{x}\right)}{dx}, \quad \left(0 < \nu < \frac{1}{2}\right)$$

entre zéro et 2π. Car, dans l'intégrale $\int_0^{2\pi} f(x) \cos n(x - a)\, dx$, quand n croît, l'influence de l'intervalle où x est très-voisin de $\sqrt{\frac{1}{n}}$ finit par devenir infiniment grande, en sorte que le rapport de cette intégrale à

$$\frac{1}{2} \sin \left(2\sqrt{n} - na + \frac{\pi}{4}\right) \sqrt{\pi}\, n^{\frac{1-2\nu}{4}}$$

converge vers l'unité, comme on le trouvera en suivant une marche analogue à celle que nous allons indiquer. Pour généraliser l'exemple précédent, ce qui fera mieux ressortir la nature de la question, faisons

$$\int f(x) dx = \varphi(x) \cos \psi(x),$$

en supposant $\varphi(x)$ infiniment petit et $\psi(x)$ infiniment grand, quand x tend vers zéro, ces fonctions étant d'ailleurs continues avec leurs dérivées, et n'ayant pas un nombre infini de maxima et de minima. On aura alors

$$f(x) = \varphi'(x)\cos\psi(x) - \varphi(x)\psi'(x)\sin\psi(x),$$

et $\int f(x)\cos n(x-a)\,dx$ sera égal à la somme des quatre intégrales

$$\frac{1}{2}\int \varphi'(x)\cos[\psi(x) \pm n(x-a)]\,dx,$$

$$-\frac{1}{2}\int \varphi(x)\psi'(x)\sin[\psi(x) \pm n(x-a)]\,dx.$$

$\psi(x)$ étant supposé positif, considérons le terme

$$-\frac{1}{2}\int \varphi(x)\psi'(x)\sin[\psi(x) + n(x-a)]\,dx,$$

et recherchons dans cet intervalle la place où les changements de signe du sinus se succèdent le plus lentement possible. Si l'on pose

$$\psi(x) + n(x-a) = y,$$

cela aura lieu dans le voisinage des valeurs de x où $\frac{dy}{dx} = 0$, et par suite

$$\psi'(\alpha) + n = 0,$$

en remplaçant x par α. Étudions donc la marche de l'intégrale

$$-\frac{1}{2}\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} \varphi(x)\,\psi'(x)\sin y\,dx,$$

pour le cas où ε est infiniment petit pour n infini, et introduisons y comme variable. Posons

$$\psi(\alpha) + n(\alpha - a) = \beta;$$

alors on a, pour ε suffisamment petit,

$$y = \beta + \psi''(\alpha)\frac{(x-\alpha)^2}{2} + \ldots,$$

et $\psi''(\alpha)$ est positif, puisque $\psi(x)$ est infini positif pour x infiniment petit. On a d'ailleurs

$$\frac{dy}{dx} = \psi''(\alpha)(x-\alpha) = \pm\sqrt{2\psi''(\alpha)(y-\beta)},$$

suivant que $x-\alpha \gtrless 0$, et

$$-\frac{1}{2}\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon}\varphi(x)\psi'(x)\sin y\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_{\beta+\psi''(\alpha)\frac{\varepsilon^2}{2}}^{\beta}-\int_{\beta}^{\beta+\psi''(\alpha)\frac{\varepsilon^2}{2}}\right)\frac{\sin y\,dy}{\sqrt{y-\beta}}\,\frac{\varphi(\alpha)\psi'(\alpha)}{\sqrt{2\psi''(\alpha)}}$$

$$=-\int_0^{\psi''(\alpha)\frac{\varepsilon^2}{2}}\sin(y+\beta)\frac{dy}{\sqrt{y}}\,\frac{\varphi(\alpha)\psi'(\alpha)}{\sqrt{2\psi''(\alpha)}}.$$

Si l'on fait décroître la quantité ε pour n croissant, de telle manière que $\psi''(\alpha)\varepsilon^2$ devienne infini, alors, en supposant que

$$\int_0^\infty \sin(y+\beta)\frac{dy}{\sqrt{y}},$$

qui est égal, comme on sait, à $\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\pi}$, ne soit pas nul, et en faisant abstraction de quantités négligeables, on aura

$$-\frac{1}{2}\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon}\varphi(x)\psi'(x)\sin[\psi(x)+n(x-a)]\,dx$$

$$=-\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)\frac{\sqrt{\pi}.\varphi(\alpha)\psi'(\alpha)}{\sqrt{2\psi''(\alpha)}}.$$

Si donc cette dernière grandeur ne devient pas infiniment petite, comme l'intégrale relative aux autres intervalles tend vers zéro, le rapport de $\int_0^{2\pi} f(x)\cos n(x-a)\,dx$ à cette même quantité convergera vers l'unité.

Si l'on suppose que $\varphi(x)$ et $\psi'(x)$ soient, pour x infiniment petit, du même ordre que certaines puissances de x, savoir, $\varphi(x)$ de l'ordre de x^ν, $\psi'(x)$ de celui de $x^{-\mu-1}$, où $\nu > 0$, $\mu \geqq 0$, alors, pour n infini,

$$\frac{\varphi(\alpha)\psi'(\alpha)}{2\sqrt{\psi''(\alpha)}}$$

sera de l'ordre de $\alpha^{\nu-\frac{\mu}{2}}$, et, par suite, ne sera pas infiniment petit, si $\mu \geqq 2\nu$. Mais, en général, si $x\psi'(x)$ ou, ce qui est la même chose, si $\frac{\psi(x)}{\log x}$ devient infiniment grand pour x infiniment petit, on pourra toujours choisir $\varphi(x)$ de telle manière que $x\varphi(x)$ soit infiniment petit avec x, et que

$$\varphi(x)\frac{\psi'(x)}{\sqrt{2\psi''(x)}} = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{-2\frac{d}{dx}\frac{1}{\psi'(x)}}} = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{-2\lim\frac{1}{x\psi'(x)}}}$$

devienne infiniment grand, et, par suite, l'intégrale $\int_x f(x)\,dx$ peut être prise à partir de zéro, sans que $\int_0^{2\pi} f(x)\cos n(x-a)\,dx$ devienne infiniment petite quand n croît indéfiniment. Comme on voit, dans l'intégrale $\int_x f(x)\,dx$, les accroissements de l'intégrale, quand x tend vers zéro, se compensent, quoique leur rapport à la variation de x croisse très-rapidement pendant les rapides changements de signe de la fonction; par l'introduction du facteur $\cos n(x-a)$, on obtient ce résultat, que les accroissements de l'intégrale s'ajoutent en valeur les uns aux autres.

De même que nous venons de voir que, pour une fonction toujours susceptible d'intégration, la série de Fourier peut n'être pas convergente, et que les termes de cette série peuvent devenir infiniment grands avec n, de même aussi on peut indiquer des fonctions qui ne sont jamais susceptibles d'intégration, et pour lesquelles la série Ω converge pour une infinité de valeurs de x prises entre deux valeurs aussi rapprochées qu'on le veut.

On a un exemple de ce nouveau cas dans la fonction représentée par la série

$$\sum_1^\infty \frac{(nx)}{n},$$

où (nx) a la même signification qu'au paragraphe 6. Cette fonction existe pour toute valeur rationnelle de x, et est représentée par la série trigonométrique

$$\sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{\Sigma_\theta[-(-1)^\theta]}{n\pi} \sin 2nx\pi,$$

où l'on doit mettre à la place de θ tous les diviseurs de n, mais qui ne reste comprise entre des limites finies dans aucun intervalle, si petit qu'il soit, et, par conséquent, n'est susceptible d'aucune intégration.

On obtient un exemple du même genre lorsque, dans les séries

$$\sum_{0}^{\infty} c_n \cos n^2 x, \quad \sum_{1}^{\infty} c_n \sin n^2 x,$$

on met, pour $c_0, c_1, c_2, \ldots$, des quantités positives toujours décroissantes et devenant infiniment petites, mais pour lesquelles $\sum_{1}^{n}{}_s c_s$ devient infiniment grand. Car, si le rapport de x à 2π est rationnel, et s'il a pour dénominateur m, quand il est réduit à sa plus simple expression, ces séries seront évidemment convergentes ou divergentes, suivant que $\sum_{0}^{m-1} \cos n^2 x$, $\sum_{0}^{m-1} \sin n^2 x$ seront égaux à zéro ou différents de zéro. Les deux cas se présentent, d'après un théorème connu de la division du cercle ([1]), pour une infinité de valeurs de x, comprises entre des limites aussi rapprochées qu'on le veut.

La série Ω peut aussi converger dans un intervalle aussi grand qu'on le veut, sans que la valeur de la série

$$C' + A_0 x - \sum \frac{\frac{dA_n}{dx}}{n^2},$$

que l'on obtient par l'intégration de chaque terme de Ω, puisse être intégrée dans un intervalle aussi petit que l'on voudra.

([1]) *Disquisit. arithm.*, p. 636, art. 356.

Considérons, par exemple, l'expression

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^3}(1-q^n)\log\left[\frac{-\log(1-q^n)}{q^n}\right],$$

où l'on prend les logarithmes de telle manière qu'ils s'évanouissent pour $q = 0$, et développons-la suivant les puissances ascendantes de q, en y remplaçant q par e^{xi}; la partie imaginaire du développement forme une série trigonométrique qui, différentiée deux fois par rapport à x, converge un nombre infini de fois dans chaque intervalle, tandis que son premier quotient différentiel devient nul un nombre infini de fois.

Une série trigonométrique peut aussi converger un nombre infini de fois dans un intervalle aussi petit qu'on le veut, sans que ses termes deviennent infiniment petits avec $\frac{1}{n}$ pour toute valeur de x. Un exemple simple est fourni par la série

$$\sum_{1}^{\infty} \sin(n!)\,x\pi,$$

où $n!$ désigne, comme d'habitude, le produit $1.2.3\ldots n$. Cette série converge non-seulement pour toute valeur rationnelle de x, puisqu'elle est alors limitée, mais aussi pour un nombre infini de valeurs irrationnelles, dont les plus simples sont $\sin 1$, $\cos 1$, $\frac{2}{e}$, et leurs multiples, et, en outre, les multiples impairs de e, de $\frac{e-\frac{1}{e}}{4}$, etc.

TABLE DES MATIÈRES.