BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Revue bibliographique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 5 (1873), p. 241-264

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1873__5__241_0>

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

MAXWELL (J.-C.), Professor of experimental Physics in the University of Cambridge. — A TREATISE ON ELECTRICITY AND MAGNETISM. Oxford, at the Clarendon Press.

THOMSON (Sir W.). — PAPERS ON ELECTROSTATICS AND MAGNETISM. London, Macmillan & Co., 1872 (Paris, Gauthier-Villars. Prix : 24 fr. 25) (¹).

La théorie de l'électricité et celle du magnétisme, méthodiquement exposées depuis la description des expériences les plus simples jusqu'à la discussion des hypothèses les plus hardies, est une œuvre de grande importance. Le nom justement célèbre de l'auteur qui l'a entreprise ajoute à l'intérêt de cette publication, dont le *Journal des Savants* doit l'annonce à ses lecteurs.

Les diverses parties de la grande théorie que M. Maxwell a voulu exposer ont donné lieu, depuis un siècle, à d'admirables travaux. L'analyse mathématique, appliquée à chaque groupe de questions, a pu, pour chacun d'eux, rattacher tous les faits à des principes précis, que l'on aurait sans doute acceptés comme certains, s'ils avaient pu se fondre et s'accorder entre eux. Malheureusement les tentatives produites sont loin d'avoir atteint ce but difficile, et nous avons montré, dans un article du *Journal des Savants,* jusqu'où, sur ce terrain dangereux, des savants illustres ont poussé l'oubli de la rigueur et de la précision. Leurs recherches signalent dans la Science une lacune qu'elles ne comblent pas; de là d'insurmontables difficultés pour l'auteur d'un Livre tel que celui de M. Maxwell. Comment, en effet, exposer dogmatiquement une Science qui n'est pas faite? La seule prétention du plus hardi doit être de montrer et de préparer le terrain, et cela peut suffire au succès d'un Livre. Celui de M. Maxwell, avidement accueilli sur le Continent aussi bien qu'en Angleterre, rendra certainement à la Science un service universellement apprécié, et les difficultés mêmes que suggère sa lecture seront l'occasion d'efforts nouveaux, que plus d'un Chapitre de ce Livre pourra utilement diriger.

M. Maxwell a puisé à toutes les sources. Sur aucun point cepen-

(¹) Extrait du *Journal des Savants.*

dant il ne s'est borné au rôle de copiste ou d'abréviateur. Il imprime aux théories qu'il expose un cachet original et uniforme; et si, après l'avoir étudié, on doit encore consulter avec profit les inventeurs auxquels il renvoie lui-même, il est juste d'ajouter que le lecteur le plus familier avec ces difficiles études rencontrera dans son Livre, sur les points qu'il connaît le mieux, avec des rapprochements lumineux et imprévus, des résultats importants et nouveaux.

Ce que M. Maxwell a fait pour Ampère, Poisson, Green, Neumann, sir W. Thomson, et autres créateurs illustres de la théorie de l'électricité, il ne s'offensera pas qu'on soit tenté de le faire pour chaque Chapitre de son Ouvrage : c'est un reproche et une louange à la fois; mais l'un s'adresse à l'état actuel de la Science, c'est à l'auteur lui-même qu'il est juste de renvoyer l'autre.

M. Maxwell cherche avec ardeur et invente avec hardiesse. Le lecteur qui, dans un Traité didactique, exigerait la perfection classique, la rigueur des définitions, l'enchaînement sévère des conséquences et le rejet de toute conjecture hasardée, pourra, presque à chaque page, élever de sérieuses objections; la critique sur de tels sujets est, en effet, inséparable de l'étude, et M. Maxwell le sait trop bien pour s'étonner que, même dans la revue rapide d'une partie seulement de son Ouvrage, la plus grande part soit faite aux difficultés et au doute. Si, moins désireux d'être utile au lecteur, nous avions cherché seulement l'occasion de louer avec justice, la tâche eût été plus facile et l'article plus long.

Nous commencerons par un reproche qui n'a rien de grave, et qu'une connaissance plus complète des habitudes de l'enseignement en Angleterre nous conduirait peut-être à atténuer encore. L'Ouvrage de M. Maxwell suppose chez le lecteur une connaissance approfondie des Mathématiques; c'est une nécessité du sujet. Pourquoi alors, en s'adressant aux géomètres, qui seuls peuvent le lire, leur rappeler, dans une courte introduction, des principes et des règles qu'ils ne peuvent ignorer? Le style rapide et bref, inévitable dans une telle revue, peut causer une certaine défiance; faudra-t-il, dans la suite du Livre, continuer à comprendre à demi-mot? La crainte, malheureusement fondée, est justifiée dans plus d'un passage.

La définition et la dépendance des diverses unités sont rapportées au début du premier Chapitre. M. Maxwell les déduit toutes de celles de longueur, de temps et de masse; à la dernière, nous substituons habituellement celle de force. Peu importe, puisque nous admettons comme lui que l'unité de force, appliquée à l'unité de masse, produit l'unité d'accélération; il y a cependant une erreur de fait à dire qu'en France l'unité de masse est celle d'un kilogramme. Le kilogramme est pour nous l'unité de force.

Une telle inadvertance est insignifiante; mais, pour faire comprendre la portée du reproche que nous adressons à l'auteur, nous signalerons surtout, à la fin de l'Introduction, le paragraphe [25] : *On the effect of the operator* ∇ *on a vector function,* qui, en exigeant du lecteur la théorie fort peu répandue d'Hamilton sur les quaternions, indique l'extension de ce signe au cas où la fonction à laquelle on l'applique est du genre des grandeurs que l'auteur nomme *vector,* c'est-à-dire quand elle est en chaque point définie en grandeur et en direction. Peu de lecteurs, je crois, pourront apprendre dans le Livre de M. Maxwell la signification qu'il attache, dans ce cas, au signe $\nabla\varphi$, et n'y trouveront pas même l'indication précise du passage auquel il faut recourir, dans les huit cents pages du Livre d'Hamilton.

Avant de commencer par lui-même l'étude théorique de l'électricité, le savant auteur a voulu, il nous l'apprend dans sa Préface, étudier les belles recherches expérimentales de Faraday, qui sont restées, sur presque tous les points, son appui et son guide : « Before » I began the study of electricity, I resolved to read no mathematics » on the subject, till I had first read through Faraday's experi» mental researches. »

L'expérience, assurément, doit être la base de toute théorie, et l'on peut même, Faraday l'a prouvé, obtenir, par son seul secours, des résultats aussi admirables qu'imprévus, des théorèmes aussi féconds que précis. Il n'en est pas moins vrai qu'une théorie mathématique dans laquelle l'expérience intervient ne saurait être parfaite et définitive; tous les faits connus, cela va sans dire, doivent s'accorder avec les conséquences des principes, et le moindre d'entre eux peut renverser une théorie, s'il est prouvé qu'il lui soit formellement contraire; mais, dans l'enchaînement des conséquences, le raisonnement seul doit intervenir. La loi des attractions astronomiques repose sur l'observation; mais, une fois admise, elle doit seule régir tous les détails, et, si exactes que soient les Tables d'une planète, la théorie n'est pas considérée comme faite lorsque l'observation intervient pour les corriger. La théorie de l'électricité statique, créée par Coulomb, a atteint, grâce aux travaux de Poisson, de George Green et de W. Thomson, une perfection presque égale. Les fluides électriques se meuvent librement dans les conducteurs métalliques, dont chaque molécule renferme des réservoirs inépuisables et égaux de l'un et de l'autre. Les molécules d'un même fluide se repoussent en raison inverse du carré de la distance, et attirent, suivant la même loi, celles de nom contraire : tels sont les seuls principes sur lesquels repose aujourd'hui l'admirable théorie de l'électricité statique ; ils permettent de prévoir et d'expliquer tous les faits connus, jusque dans leurs plus minutieux détails ; un professeur aussi éminent que M. Maxwell ne l'ignore pas assurément, et, cependant, si nous l'avons rappelé, c'est qu'il n'a pas jugé utile de l'apprendre à ses lecteurs.

Entrons dans le détail. Le premier des Chapitres relatifs à l'électricité statique rapporte d'admirables expériences de Faraday, dont la réunion forme une théorie expérimentale très-nette et à peu près complète, qui résout plusieurs beaux problèmes, devant lesquels sans doute les plus éminents disciples de Coulomb auraient reculé ; mais ces expériences, Poisson, Green et M. Thomson l'ont montré depuis longtemps, n'en sont pas moins les conséquences nécessaires de la théorie admise, dont elles forment une confirmation nouvelle. Pourquoi M. Maxwell les présente-t-il comme des lois indépendantes, incontestables, puisque l'expérience les démontre, et qui lui servent d'auxiliaires dans les démonstrations ? C'est que, par un sentiment d'admiration fort respectable, il s'efforce d'admettre la théorie de son illustre compatriote, en repoussant les principes simples et féconds que nous venons de rappeler. M. Maxwell s'efforce, disons-nous, d'adopter les hypothèses de Faraday ; malgré sa science, en effet, et sa très-grande habileté d'analyste, les principes proposés sont trop vagues pour qu'il en puisse faire sortir une théorie précise. L'action, suivant Faraday, ne s'exerce pas à distance, les molécules contiguës agissent seules, et les corps non conducteurs, qu'il nomme *diélectriques,* transmettent les actions suivant des lignes de force qui, en général, ne sont pas droites, à peu près comme une corde, par l'intermédiaire de poulies, transmet l'action d'un poids suspendu à son extrémité. Le milieu, dans la direction de ces lignes, éprouve une tension et, dans la direction perpendiculaire, c'est une pression qui s'exerce, comme si chaque ligne de force repoussait les voisines. On ne dit pas comment le milieu diélectrique doit agir pour transmettre à la fois, quand il y a lieu, dans la même direction, des attractions et des répulsions. De telles hypothèses, qu'elles soient ou non exactes, manquent évidemment de la précision nécessaire pour servir à la solution mathématique du moindre problème; l'introduction du potentiel qui figure dans les raisonnements de M. Maxwell ne s'y rattache ni directement ni indirectement. Le potentiel, c'est la définition adoptée, est le travail qu'il faut exercer sur une molécule pour l'amener d'une distance infinie à sa position actuelle; mais, si les actions ne s'exercent pas à distance, si les forces ne varient pas suivant la distance à des centres fixes ou mobiles, pourquoi le potentiel ainsi défini est-il indépendant de la route suivie par la molécule? Pourquoi satisfait-il à l'équation $\nabla V = 0$? Pourquoi, dans l'intérieur d'un milieu diélectrique, la valeur ∇V est-elle proportionnelle à la densité? M. Maxwell, en traitant ces questions, parle et raisonne comme s'il admettait la loi de Coulomb, et l'on pourrait citer non-seulement des pages, mais des Chapitres entiers qui n'auraient sans cela aucun sens.

Les diverses parties de la théorie de l'électricité sont malheureusement trop indépendantes les unes des autres pour qu'un lecteur empressé de prendre connaissance du Livre croie nécessaire de commencer par le premier Chapitre. Si, désireux d'étudier d'abord l'électricité dynamique, il ouvre le premier Volume à la page 259, il éprouvera quelque surprise en lisant [246] : « Si nous définissons le potentiel d'un vaisseau conducteur creux comme étant celui de l'air intérieur au vaisseau, nous pourrons déterminer le potentiel par le moyen d'un électromètre. »

La considération du potentiel étant notoirement la base des plus beaux travaux accomplis, depuis trente ans, sur les théories exposées dans le premier Volume, comment se fait-il qu'à la page 259 on ait conservé le droit de le définir, et que la définition paraisse assez indifférente pour qu'on en laisse en quelque sorte le choix au lecteur? La définition s'accorde, il est vrai, avec celle qui a été proposée au début du Livre, mais à la condition que le vase soit complétement fermé; le théorème, d'ailleurs, devrait être démontré et non admis à titre de définition.

Sur un terrain aussi mal défini, on ne saurait marcher avec fermeté, et, si nous avons le droit et le devoir de signaler le Livre de M. Maxwell comme très-utile et très-remarquable, c'est que, par une heureuse contradiction, l'hypothèse des lignes de force, agissant par leur tension, que l'auteur veut admettre, n'y joue en réalité qu'un très-petit rôle.

La théorie ordinaire a été, il faut l'avouer, fortement ébranlée par une difficulté qui a conduit Faraday à l'abandonner; mais rien ne prouve qu'une étude plus approfondie, une hypothèse nouvelle adjointe et non substituée à celle de Coulomb ne permettront pas de tout concilier. Les beaux travaux de M. Gaugain, en faisant intervenir un élément nouveau, la durée des préparatifs d'une expérience, atténuent déjà considérablement les difficultés produites par les expériences de Faraday.

Quand deux lames conductrices sont séparées par un milieu isolant, l'une d'elles étant en communication avec une source électrique, l'autre avec le sol, des couches électriques de sens contraire s'accumulent sur les deux surfaces qui touchent la lame isolante, et la théorie de Coulomb, en expliquant le phénomène, permet d'en calculer le détail. Dans cette théorie, les propriétés spécifiques de la substance qui sépare les armatures ne jouent malheureusement aucun rôle; elle est considérée comme une barrière infranchissable à l'électricité, et qu'elle soit de verre, de gutta-percha, de résine ou d'air, cela ne change rien aux formules. Faraday, par des expériences répétées, a montré l'importance de cet élément négligé avant lui. La théorie qui n'en tient pas compte est donc incomplète; faut-il, pour cela, tout changer? Si la substance isolante ou diélectrique exerce une influence sur la charge d'une bouteille de Leyde, elle doit subir l'action de l'électricité sur laquelle elle réagit; les molécules qui ne conduisent pas l'électricité sont donc influencées (polarisées) par elle. C'est une circonstance nouvelle dont il faut tenir compte, une difficulté de plus dans le problème; mais ne suffit-il pas d'admettre, comme l'ont fait divers savants, que chaque molécule non conductrice se comporte comme une molécule magnétique dans laquelle les fluides se séparent, sans pouvoir la quitter et charger les molécules voisines?

Un savant italien, Mossotti, a suivi cette indication et, en adoptant les méthodes de Poisson dans ses *Études sur le magnétisme,* il a produit, sur la théorie des substances diélectriques, des calculs souvent cités depuis. La lecture de son Mémoire, inséré, en 1846, dans le tome XXIV des *Mémoires de la Société Italienne* siégeant à Modène, peut produire une certaine surprise; les conclusions de l'auteur sont, en effet, sans qu'il le dise explicitement, en désaccord complet avec Faraday, et son Mémoire serait, par conséquent, la condamnation du principe qui y est admis. Mossotti ne trouve, en effet, aucune influence aux molécules polarisées. Il introduit dans ses formules les termes qui résultent de leur action; mais il trouve que ces termes se détruisent à la fin, et il ne faut pas même affirmer, comme il le fait, que, d'après son analyse, la polarisation des molécules diélectriques transmet l'action des couches électrisées pour produire l'action à distance. Une telle transmission ne résulte nullement de la théorie de Mossotti; les molécules électriques, dans son calcul, sont supposées agir à distance, comme dans la théorie de Coulomb; à cette action, il adjoint celle des atmosphères électriques polarisées dans l'intérieur du corps isolant et il croit prouver que les termes introduits par elle se détruisent; il doit donc affirmer que cette polarisation n'agit pas, non qu'elle soit la cause et l'origine des actions qui subsistent et qui ont été admises *a priori,* indépendamment de toute hypothèse sur la composition du milieu diélectrique.

M. Maxwell, qui n'entre, à ce sujet, dans aucun détail, dit : « Thus Mossotti has deduced the mathematical theory of dielectrics » from the ordinary theory of attraction. » Il ne semble pas que la lecture du Mémoire de Mossotti puisse justifier cette appréciation.

M. Thomson traite rapidement cette importante question (*Papers on Electrostatics,* p. 23 à 37). Ses conclusions s'accordent avec les expériences de Faraday; la présence d'un milieu diélectrique, sans changer la loi des phénomènes, multiplie la densité sur chaque surface par un facteur spécifique variable d'une substance à l'autre. Malgré toute la confiance que doit inspirer une assertion de sir W. Thomson, il est impossible de ne pas remarquer que, d'après la déclaration même de l'illustre géomètre de Glasgow, c'est à Poisson qu'il emprunte sa démonstration, et Poisson, dans ses Mémoires sur le magnétisme, s'est trop notoirement écarté de la rigueur pour que l'on puisse accepter, sans une sévère révision, les résultats ou les conséquences déduits de ses principes. Dans son premier Mémoire, par exemple, en considérant un corps magnétique comme composé de molécules recouvertes chacune des fluides boréal et austral en quantités égales, Poisson, dans le calcul de l'action exercée sur un point intérieur à l'une d'elles, croit pouvoir négliger les effets des molécules voisines ! C'est le calcul ainsi simplifié par la suppression de la partie la plus difficile à évaluer dans les intégrales qui le conduit à affirmer, pour les molécules, une loi de polarisation qui sert de base aux démonstrations ultérieures; chaque molécule doit agir sur les points de son intérieur avec une force constante en intensité et en direction, et sur les points éloignés comme une aiguille aimantée infiniment courte, dirigée dans le sens de cette action intérieure; une telle aiguille peut être remplacée par trois composantes α, β, γ, c'est-à-dire par trois aiguilles parallèles aux axes dont les moments sont les projections de celui de l'aiguille résultante. Poisson affirme et croit démontrer que ces composantes satisfont nécessairement à l'équation qui définit la distribution nommée, par M. Thomson, *solénoïdale*. Il en résulte que l'action du magnétisme sur un point extérieur est identique à celle d'une couche infiniment mince qui recouvrirait la surface; mais cette conclusion, qui joue un rôle capital dans la théorie, est subordonnée à l'exactitude de l'équation qui exprime l'état solénoïdal, et dont la démonstration suppose que l'on néglige, dans l'étude de chaque molécule, l'action de celles qui sont voisines.

Il peut sembler injuste d'insister, en critiquant un auteur, sur une erreur que lui-même a reconnue et signalée; mais la déclaration expresse de Poisson, insérée dans un Mémoire postérieur, est loin d'être suffisante; il semble, en effet, en la lisant, qu'il rectifie un détail dans l'énoncé duquel une inadvertance a été commise, et non qu'il condamne, sans y rien substituer, la base de toute son analyse. Tout repose, en effet, sur ce principe que la couche de fluide qui recouvre une molécule exerce sur les points intérieurs une action constante de grandeur et de direction. Cette action, remarquons-le, doit être d'intensité finie; il en sera donc de même de l'action exercée sur les points extérieurs infiniment voisins, et ce sont ces actions finies, en nombre infini, que l'on veut négliger, en alléguant une compensation fortuite qui doit s'établir entre elles ! On doit remarquer que, en considérant deux molécules placées, de part et d'autre d'une troisième, suivant la même ligne droite, leurs actions sur un point de la molécule intermédiaire s'ajoutent et ne se retranchent pas. Supposons, en effet, une ligne verticale de molécules, et la polarisation telle que le fluide positif soit concentré vers le bas de chacune d'elles et le fluide négatif vers le haut; considérons un point intérieur de l'une d'elles; l'action sur une molécule positive placée en ce point sera dirigée vers le bas, et égale à la *somme* des actions séparées de toutes les molécules placées au-dessus ou au-dessous d'elle. Les premières, en effet, repousseront la molécule considérée, et les secondes l'attireront de manière à agir toutes dans le même sens; on n'a donc aucun droit de négliger ces actions. Il est impossible de ne pas ajouter que, en acceptant ces principes, on retrouve aisément les résultats annoncés par M. Thomson, qui découlent, comme il le déclare, de l'analyse de Poisson, dont il semble difficile de ne pas faire peser sur eux les intolérables licences.

Peut-être ne jugera-t-on pas absolument inutile d'insister sur un point aussi important, qui n'a pas attiré l'attention de tous les auteurs qui ont reproduit le travail de Poisson. Citons particulièrement l'Ouvrage justement classique de M. Lamont : *Handbuch des Magnetismus* (*Allgemeine Encyclopädie der Physik*, XV. Band, Leipzig, 1867). On y trouve (p. 165) la théorie de Poisson reproduite, avec l'assertion, sans laquelle il serait d'ailleurs impossible de l'exposer, qu'il est permis de négliger sur une molécule l'action de toutes celles qui en sont voisines : « Weil sie sämmtlich nach » gleicher Richtung magnetisirt sind und bezüglich entgegenge- » setzte Lagen haben, sich aufheben müssen..., so bleibt in dem » ganzen kugelförmigen Raum nur die Anziehung desjenigen Mo- » leculs, in welchem der Punct P sich befindet, zu berücksichtigen » übrig. »

M. Maxwell lui-même, sans se prononcer sur la démonstration de Poisson, en accepte le résultat, qu'il cherche à établir par une voie différente. C'est au Chapitre II du second Volume, *Magnetic force and magnetic induction*, qu'est proposée cette méthode, complétement inacceptable suivant moi. La définition même de l'induction magnétique doit exciter tout d'abord la défiance d'un lecteur attentif. Pour définir, en effet, l'action magnétique d'un aimant sur un point de la masse, l'auteur suppose ce point placé dans l'intérieur d'une cavité infiniment petite, obtenue en enlevant toute la substance magnétique qui s'y trouvait, et, après avoir constaté l'indétermination qui résulte du choix arbitraire adopté pour la cavité, il choisit, sans donner de raison, une hypothèse particulière, celle d'un cylindre infiniment mince par rapport au rayon infiniment petit de ses bases, et dont l'axe est dans le sens de la *magnétisation,* et c'est l'action dans l'intérieur de ce cylindre supposé enlevé et sur un point de son axe qu'il nomme l'*induction magnétique en un point.* L'*induction magnétique* à travers une surface est définie ensuite comme une intégrale dont la signification physique, liée d'ailleurs à la définition précédente, serait fort arbitraire, et, quoique la liberté des définitions soit un principe incontestable, on éprouve, tout d'abord, une certaine inquiétude en en voyant faire un tel usage.

Pour calculer l'induction magnétique à travers une surface fermée, l'auteur fait ensuite intervenir, comme éléments essentiels de son raisonnement, les considérations des molécules coupées par la surface considérée, et il admet que le magnétisme y soit tellement distribué que, toute la charge de fluide boréal, par exemple, restant intérieure à la surface, celle du fluide austral lui soit extérieure, transformant ainsi en une réalité la fiction légitime, quand il s'agit de l'action, à distance, de la concentration des fluides en deux points appelés *pôles*. Une telle hardiesse suffirait pour enlever tout crédit à la démonstration; mais il y a plus : après avoir prouvé ainsi que l'induction totale sur une surface fermée est nulle, l'auteur applique sa formule à un parallélépipède infiniment petit! de sorte que c'est ce parallélépipède dont la surface doit couper des molécules en deux parties, dont l'une contient tout le fluide austral et l'autre tout le fluide boréal! Que de difficultés d'ailleurs dans la différentiation de ces quantités désignées par a, b, c, et qui résultent de l'action des molécules dont chacune, prise isolément, exerce sur les points infiniment voisins *une action finie* pouvant, dans l'intérieur d'une molécule infiniment petite, recevoir des variations finies, et qui changent brusquement quand on passe de l'intérieur d'une molécule à l'extérieur! Ces difficultés, qui s'opposent à la conclusion présentée au paragraphe [403], exigeraient une longue discussion; le paragraphe a en tout huit lignes de texte, et les six dernières sont consacrées à l'énoncé de la *Conclusion.*

L'hypothèse d'un milieu composé de couches sphériques homogènes apporte dans les calculs une simplicité qui permet d'en déduire les dernières conséquences. Considérons donc une bouteille de Leyde sphérique, les deux armatures étant métalliques et le milieu qui les sépare composé de couches concentriques alternativement conductrices et imperméables à l'électricité, en même temps qu'insensibles à son action; nous aurons une représentation approximative de l'hypothèse acceptée par sir W. Thomson, qui assimile un milieu diélectrique à une série de petits corps conducteurs noyés dans une substance non conductrice qui les sépare et les isole.

En admettant que l'armature intérieure communique avec une source dont le potentiel soit V, et l'armature extérieure avec le réservoir commun, on trouve aisément que des quantités égales d'électricité de sens contraire doivent charger les deux armatures, que chaque couche intermédiaire doit avoir sur chacune de ces deux faces une charge égale et contraire à celle de l'armature la plus voisine, et que cette charge constante est égale à la charge qui correspond à l'hypothèse d'un milieu isolant complétement inerte, multipliée par un facteur qui dépend du rapport de l'épaisseur des couches conductrices à celle des couches isolantes dans le milieu diélectrique fictivement accepté.

M. Maxwell ne traite cette question que pour s'efforcer d'en déduire la loi des tensions suivant les lignes de force du milieu diélectrique et des pressions qui, conformément aux vues de Faraday, s'établissent perpendiculairement. L'électricité, suivant lui, n'agit pas à distance, et, si nous constatons l'action mutuelle de deux conducteurs séparés par une couche diélectrique, c'est que, dans l'intérieur de la couche, s'établissent des *lignes de force*, sorte de filets continus dont la tension transmet la force. C'est là, d'après la déclaration plusieurs fois répétée de l'éminent professeur, l'idée principale qu'il a voulu mettre en lumière et dont la traduction mathématique est le but essentiel de son Livre : « It is mainly with the » hope of making these ideas the basis of a mathematical method » that I have undertaken this Treatise. » (Tome II, page 163.)

« Nous sommes habitués, dit-il, à considérer l'univers comme » formé de parties, et les mathématiciens commencent par considérer une molécule isolée, dont ils considèrent la relation à une

» autre molécule, et ainsi de suite. On a généralement considéré » cette méthode comme la plus naturelle. La considération d'une » molécule, cependant, n'est qu'une abstraction, puisque toutes » nos perceptions sont relatives à des corps étendus, de telle sorte » que l'idée d'un tout est peut-être pour nous aussi primitive que » celle d'un objet individuel. Il peut donc exister une méthode » mathématique dans laquelle nous procédions du tout à la partie, » au lieu de remonter de la partie au tout. Par exemple, Euclide, » dans son premier Livre, conçoit une ligne comme tracée par un » point, une surface par une ligne, et un solide comme engendré » par une surface; mais il définit aussi une surface comme la limite » d'un solide, la ligne comme celle d'une surface et le point » comme l'extrémité de la ligne.

» Nous pouvons, de même, considérer le potentiel d'un système » matériel comme une fonction trouvée par un certain procédé » d'intégration, en ayant égard aux masses des corps, ou partir, au » contraire, du potentiel en considérant les masses elles-mêmes » comme n'ayant pas d'autre signification mathématique que » $\frac{1}{4\pi}\nabla^2\psi$, où ψ est le potentiel. Dans les recherches électriques, » nous pouvons employer des formules où figurent les distances de » certains corps et les électrisations des courants dans ces corps, » ou leur substituer des fonctions continues dont la valeur existe » en chaque point de l'espace. Le procédé mathématique dans la » première méthode est l'intégration le long d'une ligne, sur une » surface ou dans l'intérieur d'un espace fini; celui qui convient » au second est la considération d'équations différentielles partielles » et l'intégration dans l'espace entier.

» La théorie de Faraday semble liée intimement à la seconde de » ces méthodes; il ne considère jamais les corps comme existant » isolément sans autre relation que leur distance et agissant sui- » vant une fonction de cette distance. L'espace entier est pour lui » un champ de force où les lignes de force sont, en général, curvi- » lignes; chaque corps en émettant de tous côtés et leur direction » étant modifiée par la présence d'autres corps, il parle souvent des » lignes de force qui appartiennent à un corps comme faisant en » quelque sorte partie du corps même, de telle sorte que, dans son » action sur les points éloignés, il n'agit cependant qu'au lieu où

» il se trouve; mais cette idée n'est pas dominante chez Faraday;
» je pense plutôt que, suivant lui, l'espace entier est rempli par
» des lignes de force, dont l'arrangement dépend de celui des corps
» eux-mêmes, et que l'action sur chaque corps est déterminée par
» les lignes qui y aboutissent. »

Telles sont les hypothèses auxquelles M. Maxwell s'efforce de donner l'appui et la consécration d'une étude mathématique; mais l'existence supposée d'une tension dans un sens et d'une pression dans le sens perpendiculaire ne saurait ni constituer une théorie ni lui servir de base. La force est pour les mécaniciens la cause nécessaire des phénomènes, et la science du mouvement est trop avancée aujourd'hui et trop parfaite pour qu'on puisse accueillir autrement que comme un pas rétrograde toute tentative qui poserait comme loi primordiale la répartition des tensions au sein d'un milieu continu ou l'expression d'un potentiel dans l'espace. De tels essais, lors même qu'on parviendrait à les constituer logiquement, sans hypothèses surabondantes, laisseraient subsister chez les géomètres le désir, j'oserai dire le besoin, de découvrir les forces qui servent de ressort et de moteur.

Ces objections générales ne sont pas les seules qui s'élèvent, et le Chapitre consacré à la théorie de Faraday laisse, en dehors du principe même, subsister bien des obscurités. L'emploi des formules obtenues par la théorie des actions à distance y semble une hardiesse inexplicable. C'est ainsi que la célèbre équation de Poisson, qui lie la densité au potentiel, se trouve, dit-on, *transformée* dans la théorie nouvelle. On se demande, non la preuve, mais le sens même d'une telle assertion. La démonstration de la formule, telle qu'elle est donnée quelques pages plus haut, ne suppose aucune hypothèse sur la nature du fluide et ne peut être influencée par aucune; mais elle exige l'existence d'une action inversement proportionnelle au carré de la distance, et à laquelle aucune autre ne peut s'adjoindre sans renverser toute la démonstration; comment une telle formule peut-elle être *modifiée* par l'adoption d'une hypothèse qui, supprimant l'action à distance, fait disparaître toutes les bases de la démonstration?

Nous pourrions, aux remarques précédentes, en joindre plus d'une de même nature; mais, sans cesser d'être exacte, je le crois, une telle insistance sur les conséquences d'une situation acceptée et voulue par l'auteur aurait quelque apparence d'injustice envers un Livre qui, dans son ensemble, fait honneur à son auteur et à la Science anglaise.

La théorie des harmoniques sphériques est présentée élégamment, sous une forme très-bien appropriée aux théories auxquelles on veut l'appliquer, et conduit à l'étude difficile et célèbre des fonctions nommées y_n.

M. Maxwell la fait naître ingénieusement de l'examen même des phénomènes physiques, et la théorie qu'il en propose sera, pour un grand nombre d'esprits, une satisfaction et un progrès. La théorie des images, créée par M. W. Thomson, est expliquée avec grands détails, et quelques-unes des explications sont d'une rare élégance. On sait combien Poisson a dû déployer d'habileté pour calculer la loi de la distribution électrique sur deux sphères en présence; on trouvera dans le Livre de M. Maxwell, pour le cas des deux sphères se coupant à angle droit, lorsque, bien entendu, on a enlevé à chacune les parties intérieures à l'autre, une solution simple qui donne en chaque point la densité sur forme finie. L'auteur, je me permets de lui adresser encore ce reproche, n'indique pas bien clairement comment la solution découle de ces principes; mais elle est exacte, comme on le vérifie aisément, et restera parmi les résultats les plus élégants acquis jusqu'ici à l'un des plus beaux chapitres de la Physique mathématique.

L'Ouvrage de M. Maxwell est non-seulement un Traité d'Électricité statique, mais du Galvanisme et du Magnétisme; il n'est pas de ceux qu'on puisse juger et lire rapidement. Nous reviendrons sur les autres Parties, mais aujourd'hui, sans sortir du même sujet, nous devons appeler l'attention sur le très-important Ouvrage de M. W. Thomson, dont le titre est inscrit en tête de cet Article.

M. Thomson réunit maintenant, presque sans y rien changer, les opuscules publiés par lui sur la théorie de l'électricité, et dont l'abondante collection, depuis plus de trente ans, lui a valu, dans tous les pays où la Science est en honneur, l'estime et l'admiration des géomètres et des physiciens. Sa théorie de l'électricité statique, réduite à des principes élémentaires, est un vrai chef-d'œuvre d'invention et d'exposition à la fois. Les détails en sont, depuis longtemps, devenus classiques, et aucun maître, en enseignant la théorie de l'électricité, ne peut se dispenser de consulter la collection, devenue rare aujourd'hui, qui la contenait. La lecture en deviendra plus accessible, sans que la théorie puisse être plus connue et mieux appréciée.

Plus d'une promesse inscrite dans les premiers écrits de M. Thomson paraissait depuis longtemps oubliée. Le Volume nouvellement publié en acquitte quelques-unes. La plus précieuse, sans doute, est la loi de distribution électrique sur une calotte sphérique isolée. Le résultat, annoncé en 1843, comme conséquence facile du principe des images et malgré l'indication exacte du point de départ, était resté comme une énigme pour les géomètres, qui, après avoir admiré l'élégance du principe, trouveront encore de l'étonnement pour la rare habileté avec laquelle sont surmontés les obstacles qui apparaissent dès les premiers pas.

Les travaux inédits, on le regrettera, sont fort rares dans le Volume de M. Thomson. J'en signalerai un seulement dont les conclusions me semblent contestables. Il s'agit d'un principe invoqué souvent depuis une vingtaine d'années, et dont le savant physicien anglais me semble pousser l'application jusqu'à l'abus. Il ne me déplaît pas, d'ailleurs, de terminer cet article en discutant, sans l'accepter, une démonstration de M. Thomson. Peut-être y verra-t-on la preuve que, en critiquant sévèrement son savant compatriote, j'ai pu réserver tout entière mon estime pour son talent et pour l'ensemble de son œuvre. Poisson a composé sur le magnétisme trois Mémoires auxquels, dans cet article même, je crois avoir adressé de très-sérieuses objections. Les calculs reposent sur un lemme essentiel que l'on peut énoncer ainsi : Le fluide, dont la masse totale est nulle, se distribue sur chaque molécule, de telle sorte que son action sur les points intérieurs soit constante de grandeur et de direction. Si l'on désigne par α, β, γ, les composantes de cette force, l'action sur les points extérieurs peut être assimilée à celle de trois aiguilles aimantées excessivement petites, parallèles aux axes des coordonnées, et dont les moments magnétiques sont fonctions linéaires de α, β, γ.

Poisson démontre, en outre, en admettant l'absence de toute orientation apparente dans les molécules de la substance, que ces fonctions linéaires se réduisent chacune à un terme, et les neuf constantes à une seule; c'est la base nécessaire de toute son analyse.

M. Thomson, admettant toute cette théorie, sur la démonstration de laquelle il ne revient pas, examine, dans les Notes dont je parle, le cas où le corps ne présenterait pas les mêmes propriétés spécifiques dans toutes les directions, celui où les molécules ne pourraient pas être considérées comme sphériques.

En considérant une sphère soumise à l'action d'une force magnétique constante, et mobile autour d'un axe passant par son centre, l'éminent physicien admet, comme condition évidente, que les forces mises en jeu ne peuvent pas produire le mouvement perpétuel.

En admettant les formules de Poisson dans toute leur généralité, l'action du milieu magnétique sur les molécules de la sphère donne naissance à des couples, dont le travail total, pendant une rotation complète de celle-ci, se trouve positif et ne devient nul que si trois équations, tenues dès lors comme nécessaires, sont satisfaites par les coefficients. Les formules dans lesquelles Poisson conserve une seule arbitraire doivent, dans le cas général, en contenir six et non pas neuf.

Un tel raisonnement ne me semble pas acceptable. Le calcul du travail produit par les forces magnétiques suppose, en effet, que, pendant la rotation, les molécules magnétiques prennent instantanément l'arrangement qui correspond à leur état d'équilibre dans la position actuelle du système. Cela ne saurait avoir lieu. Les conditions mécaniques sont changées, et l'expression du travail total ne reste pas la même, si l'on a égard à l'état variable du magnétisme et aux vitesses incessamment acquises par les molécules de fluide.

Quoique l'objection puisse se passer de développement, j'essayerai de la rendre plus claire encore.

Les forces d'attraction vers des centres fixes, lorsqu'elles sont fonctions de la distance, satisfont, quelle que soit cette fonction, à la loi des forces vives, et leur action ne peut, par aucune combinaison, produire un mouvement perpétuel; on pourrait cependant, en imitant le principe de la méthode que je critique, obtenir une condition que la loi d'attraction doit remplir pour rendre impossible le mouvement perpétuel.

Considérons, en effet, le mouvement d'une tige pesante rectiligne mobile dans un plan vertical autour de l'une de ces extrémités supposées fixes, et portant, pendant la rotation, un curseur mobile qui peut glisser librement sur toute sa longueur. Supposons que ce curseur soit attiré vers un centre fixe placé dans le plan et sur le diamètre horizontal du cercle décrit par la tige; une telle combinaison ne réalisera pas le mouvement perpétuel, cela va sans dire, et, si l'on écrit que le travail produit par la pesanteur et par le centre d'action entre deux positions semblables de la tige et du curseur est égal à zéro, on obtiendra une identité; mais, si l'on admet dans le calcul que le curseur prenne, à chaque instant, sur la tige, la position à laquelle il parviendrait, le frottement aidant, si la tige était maintenue dans sa position actuelle, cette manière de calculer donnera, pour le travail développé pendant un tour entier, une expression dans laquelle figurera la fonction qui exprime la loi d'attraction, et, en écrivant qu'elle est nulle, on obtiendrait une condition à laquelle, contrairement à l'évidence, cette fonction devrait nécessairement satisfaire.

Les procédés d'un esprit inventif sont toujours excellents quand le succès les justifie, et, si la critique rigoureuse a toujours le devoir de discerner les raisonnements qui prouvent de ceux qui ne prouvent pas, c'est, on le comprend, en faisant toute réserve sur le mérite de l'auteur et la juste estime qu'on lui doit. M. Thomson, plus d'une fois, dans ces théories mystérieuses et complexes, s'est écarté de la rigueur géométrique; il serait d'autant plus injuste de le lui reprocher, que lui-même a souvent signalé, de la manière la plus formelle, le point douteux qu'il laisse subsister, la difficulté dont il se débarrasse pour pouvoir passer outre. Nous trouvons, par exemple, dans un Mémoire sur les courants thermo-électriques (*Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, t. XXI, 1854), une découverte physique d'une nature tellement délicate, que les expériences ultérieures ne l'ont ni condamnée ni formellement confirmée, et qui repose sur des hardiesses analogues à celles que nous venons de signaler.

Le raisonnement de M. Thomson, réduit à ses termes les plus simples, repose sur le fait suivant :

Si un cercle métallique est formé de deux parties, de cuivre et de fer par exemple, soudées aux extrémités d'un diamètre, et que, l'une des soudures étant maintenue à la température zéro, on échauffe l'autre graduellement, un courant électrique prendra naissance, et le cercle métallique agira sur une aiguille aimantée placée dans le voisinage; c'est la découverte de Seebeck. L'intensité du courant ainsi produit est sensiblement proportionnelle à la différence de température des deux soudures, mais pour de petites différences seulement; car, si, la soudure froide étant maintenue à zéro, on échauffe l'autre de plus en plus, le courant atteint un maximum correspondant à la température de 280 degrés environ, puis il décroît, s'annule vers 500 degrés et change ensuite de direction.

D'un autre côté, Pelletier a montré qu'un courant tel que celui dont nous parlons tend toujours à refroidir la soudure la plus chaude et à réchauffer la plus froide, de telle sorte que, si l'on veut l'entretenir, il faut fournir incessamment de la chaleur à la première et en enlever à la seconde; le courant est donc assimilable à une machine dans laquelle l'effet est produit par le transport de la chaleur qui passe d'un corps chaud à un corps froid. Si, dans le phénomène réel, des circonstances accessoires inévitables ne venaient pas s'adjoindre à celles que nous avons dites, le cercle de Seebeck pourrait être assimilé à une machine thermique, et les principes aujourd'hui si célèbres sur la théorie des machines à vapeur, celui de Sadi Carnot particulièrement, pourraient lui être appliqués. M. Thomson signale très-expressément l'échauffement de tous les points du fil par l'action du courant comme une circonstance contraire aux suppositions faites dans la démonstration du principe; il passe outre cependant, en faisant observer que les conséquences qu'il va obtenir deviennent par là incertaines; l'une de ces conséquences, celle que l'on peut regarder comme la traduction du principe admis, est la proportionnalité du courant à la différence de température des soudures, et l'expérience, malheureusement, est formellement contraire, nous l'avons dit, à un tel résultat.

Considérant alors plus particulièrement le cas où le courant a atteint son intensité maxima, M. Thomson admet que, dans ce cas, en traversant la soudure la plus chaude, il n'y produit aucun effet thermique, et la raison qu'il en donne semble au moins fort plausible : la soudure a acquis, en effet, la température à laquelle correspond la plus grande force électromotrice, et, par conséquent, soit qu'on l'échauffe, soit qu'on la refroidisse, l'intensité du courant diminue; un échauffement, en d'autres termes, ferait naître un courant contraire à celui qui existe, et celui-là doit, par conséquent, d'après le principe de Pelletier, refroidir la soudure; mais un refroidissement produisant le même effet, un courant, de sens opposé à celui qui existe, doit échauffer la soudure; et, comme les deux assertions sont contradictoires, il faut admettre qu'à cette température l'effet calorifique découvert par Pelletier ne saurait se produire.

Ce raisonnement n'est qu'une induction, il faut le remarquer, et n'a pu être produit qu'à ce titre. M. Thomson en conclut que le courant dont une soudure est maintenue à cette température particulière présenterait cette propriété paradoxale de réchauffer la soudure froide sans refroidir la soudure chaude, et donnerait, par conséquent, en même temps que le travail qu'on peut lui demander, une production de chaleur sans dépense; et c'est pour ne pas admettre une telle dérogation aux principes incontestés que M. Thomson est conduit à annoncer que, dans l'intérieur d'un fil homogène dont les températures sont inégales, un courant peut produire du froid.

Ce raisonnement est ingénieux et hardi; il doit faire grand honneur à son auteur, si ses conclusions sont confirmées, mais sans renverser aucun principe dans le cas où elles ne le seraient pas.

M. Maxwell, à qui je reviens, consacre un Chapitre au travail depuis longtemps célèbre de M. Thomson, et s'adresse un peu trop, comme dans plus d'une page de son Livre, à un lecteur déjà familiarisé avec la question. La base essentielle du raisonnement, en effet, est l'existence d'une température pour laquelle le cuivre et le fer sont neutres, en ce sens qu'un courant peut traverser la soudure qui les réunit sans produire ni chaleur ni froid. Or les preuves expérimentales ou théoriques d'une assertion aussi importante sont absolument passées sous silence. Après avoir dit qu'à cette température la force électromotrice est maxima, on lit, sans aucune explication : « A la température de 280 degrés, le fer et le cuivre sont » neutres l'un pour l'autre, et aucun effet réversible n'est produit » à la soudure ». Si je cite cette lacune aisée à corriger, c'est que de telles négligences sont trop fréquentes pour qu'il ne soit pas permis, sinon de les tenir pour volontaires, tout au moins de les regarder comme indifférentes à l'auteur. La question, d'ailleurs, est de grande importance; quand la force électromotrice des deux métaux atteint sa valeur maxima, les deux métaux, à la température correspondante, sont-ils à l'état neutre? Le raisonnement rapporté plus haut prouve seulement qu'un courant infiniment petit ne doit, à cette température, ni réchauffer ni refroidir la soudure; mais en est-il de même pour un courant fini? L'expérience serait fort difficile, et n'a pas jusqu'ici, à ma connaissance, donné des résultats décisifs. Est-il bien certain, d'ailleurs, comme l'indique M. Thomson dans son très-ingénieux Mémoire, que l'effet thermique produit sur la soudure, changeant de signe avec le sens du courant, soit proportionnel à son intensité? Est-il vrai ensuite qu'un courant qui traverse un anneau composé de cuivre et de fer échauffe l'une des soudures précisément autant qu'il refroidit l'autre? La soudure chaude se refroidit et la soudure froide s'échauffe; ces deux effets simultanés tendent à ralentir le courant; ne faut-il pas en conclure qu'il y a en ce moment production d'énergie, puisqu'une partie du courant disparaît et que l'échauffement de la soudure froide doit l'emporter sur le refroidissement de la soudure chaude? Pour étudier le phénomène, il faudrait d'ailleurs faire entrer en ligne de compte l'effet de la conductibilité calorifique et l'échauffement normal proportionnel au carré de l'intensité du courant. On aimerait à rencontrer cette discussion, si délicate qu'elle soit, dans un Traité général sur l'Électricité et le Magnétisme. J. Bertrand.

SCHLEUSING (R. von). — Beitrag zur Integralrechnung, enthaltend die Integration einiger algebraischen und transcendenten Functionen. — Berlin, Weidmann'sche Buchhandlung, 1873. Gr. in-4°, 76 p. Prix : $2\frac{2}{3}$ Thlr.

L'auteur a été conduit à composer ce Recueil, en cherchant à former, d'une manière régulière, les coefficients de certaines séries, dans le cas où ces coefficients se présentent sous forme d'intégrales. L'Ouvrage se compose de deux Sections et d'un Appendice. La première Section donne le développement des intégrales à différentielle algébrique, et des intégrales qui se ramènent immédiatement à celles-là, telles que

$$\int x^{mn-1}(1-x^n)^p\,dx,\quad \int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad \int \sin^m v\cos^n v\,dv,\ldots,$$

pour les divers cas de m et de n pairs ou impairs. La seconde Section contient les intégrales à différentielle algébrique et trigonométrique, comprises dans la formule générale

$$\int x^n \cos^m x \sin^p x\, dx.$$

L'Appendice reprend certains cas particuliers, non traités dans ce qui précède. L'exécution typographique de cet Ouvrage mérite des éloges; seulement on y trouve la faute, si commune, qui consiste à remplacer les zéros par des *o* italiques.

GAUSS (F.-G.). — FÜNFSTELLIGE VOLLSTÄNDIGE LOGARITHMISCH-TRIGONOMETRISCHE TAFELN FÜR DECIMALTHEILUNG DES QUADRANTEN. Zum Gebrauche für Schule und Praxis bearbeitet. — Berlin, L. Rauh, 1873 ([1]).

Ce Volume est le complément du Recueil dont nous avons déjà rendu compte ([2]), et nous en avions déjà annoncé la publication, en exprimant d'avance nos regrets de ce que l'auteur adoptât des dénominations qui donnent à la réforme toutes les apparences et tous les inconvénients des demi-mesures. Maintenant, que nous avons le Livre entre les mains, nous ne pouvons que persister dans notre manière de voir. Cet Ouvrage, élaboré et imprimé avec tant de soin, est à nos yeux une entreprise manquée, et nous doutons qu'il contribue à vaincre les préjugés qui militent en faveur de la division traditionnelle du cercle.

Outre la confusion perpétuelle que ne peut pas manquer d'amener la similitude des notations employées à la fois pour les *degrés de la nouvelle division* et pour les *degrés de l'ancienne division,* nous signalerons dans le nouveau Volume, comparé au premier, une infériorité typographique provenant de la disproportion entre la hauteur des pages et la force du caractère employé. Les interlignes trop larges et les chiffres trop maigres fatiguent la vue,

---

([1]) GAUSS (F.-G.). — *Tables logarithmiques et trigonométriques complètes à cinq figures, pour la division décimale du quadrant; Ouvrage destiné à l'enseignement et à la pratique.* 1 vol. in-8°, 140-XX p. Prix : 2 Thlr.

([2]) *Bulletin*, t. III, p. 234.

et la malencontreuse division des lignes en groupes de 1, 3, 3, 3, introduite par M. Bremiker, est loin de contribuer à la clarté.

Malgré ces graves défauts, qu'il eût été si facile d'éviter, les Tables que nous annonçons pourront rendre de grands services aux calculateurs, en attendant que la France, à qui est due l'initiative de la réforme, continue son œuvre et se décide enfin à tirer parti des précieux manuscrits qui dorment, depuis trois quarts de siècle, dans les bibliothèques de l'Observatoire et de l'Institut.

J. H.

GRELLE (Prof. Dr. Fr.). — Leitfaden zu den Vorträgen über höhere Mathematik I. am Königl. Polytechnikum zu Hannover. Manuscript. — Hannover, Riemschneider, 1871. 1 vol. in-8°, 163 p. Prix : 2 Thlr.

Ce résumé contient les éléments du Calcul différentiel et du Calcul intégral, jusqu'à la théorie des équations différentielles exclusivement. Il se divise en trois Parties principales :

I. *Théorie des fonctions explicites d'une seule variable.* — Ce Chapitre comprend la différentiation et l'intégration des fonctions d'une seule variable, avec des applications à la théorie des courbes planes.

II. *Théorie des fonctions explicites de plusieurs variables.* — Dérivées partielles, différentielles totales, théorème de Taylor, maxima et minima, formes indéterminées (cet article aurait pu être omis sans inconvénient pour les fonctions de plusieurs variables), intégration de la différentielle $Pdx + Qdy$, intégrales doubles, changement de variables dans ces intégrales.

III. *Théorie des fonctions implicites.* — Différentielles et dérivées, changement des variables indépendantes, maxima et minima relatifs, théorème de Lagrange.

Le Volume est terminé par un *Appendice,* traitant de la résolution des équations numériques et suivie d'une Table des matières détaillée et d'une courte Notice historique sur les diverses méthodes qui ont servi successivement pour l'exposition du Calcul différentiel.

Chaque Chapitre du Livre est suivi d'un Recueil d'exercices.

J. H.

CASSANI (Dott. Pietro), professore di Matematica e di Meccanica applicata presso l'Istituto Tecnico di Venezia. — GEOMETRIA RIGOROSA. — Venezia-Trieste-Milano, C. Coen; 1872. 1 vol. in-12.

La Géométrie, comme toutes les sciences concrètes, s'appuie sur un certain nombre de postulats, qu'il ne faut pas chercher à démontrer, parce qu'ils ne sont nullement des vérités nécessaires, fondées exclusivement sur les lois de la raison, mais seulement l'expression scientifique de *faits* reconnus par l'expérience.

L'indication précise de ces postulats sous la forme la plus simple, le rétablissement explicite de ceux qui sont habituellement sous-entendus, la suppression de ceux qui ne sont point primordiaux, c'est-à-dire qui sont des conséquences nécessaires des autres, tel est l'objet de la vraie philosophie géométrique, qui a fait, dans ces derniers temps, de remarquables progrès.

Mais ces progrès n'ont guère été suivis par les auteurs de Traités classiques, qui continuent généralement, soit à admettre des propositions que l'on peut démontrer, soit à sous-entendre certains postulats nécessaires, ou à en remplacer d'autres par des démonstrations vicieuses.

L'auteur du Livre dont nous venons de transcrire le titre a entrepris d'établir les éléments de la Géométrie sur des bases rationnelles, depuis le début jusqu'au point où aucun postulat nouveau n'est plus nécessaire, et où les Traités ordinaires ne laissent plus rien à désirer, en général, sous le rapport de la rigueur.

Son Ouvrage comprend trois Parties principales, respectivement consacrées à la sphère, à la droite et au plan.

L'idée de commencer la Géométrie par l'étude de la sphère n'est pas nouvelle; mais M. Cassani nous paraît avoir fait faire à cette étude un progrès sérieux, en donnant une démonstration simple et ingénieuse de ce théorème, que deux sphères ne peuvent se toucher qu'en des points isolés.

L'auteur, après avoir démontré ensuite que ces points isolés doivent se réduire à un seul, considère la ligne droite, correspondant à deux points donnés, comme le lieu des points de contact des sphères tangentes entre elles, qui ont leur centre en ces deux points. Ce mode de génération nous paraît être le meilleur que l'on puisse adopter. Les autres parties de la « Géométrie rigoureuse » sont susceptibles, d'après nous, de perfectionnements en même temps que de simplifications. Nous essayerons de justifier cette appréciation en publiant prochainement une « Exposition nouvelle des principes fondamentaux de la Géométrie », dans laquelle nous emprunterons seulement à M. Cassani, outre le plan général de son Ouvrage, les deux propositions remarquables que nous avons citées plus haut. D. T.