BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

H.-G. ZEUTHEN

Note sur le principe de correspondance

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 5 (1873), p. 186-190

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1873__5__186_1>

MÉLANGES.

NOTE SUR LE PRINCIPE DE CORRESPONDANCE (1);

Par M. H.-G. ZEUTHEN.

1. Le principe de correspondance s'énonce de la manière suivante, bien connue (2) :

« Lorsqu'on a sur une droite (L) deux séries de points X et Y telles, qu'à un point X correspondent η points Y, et à un point Y ξ points X, et que cette correspondance peut s'exprimer par une

---

(1) Les trois premiers numéros de cette Note sont extraits des nos 25 et 26 d'un Mémoire, *Sur les propriétés générales de systèmes de courbes*, qui vient d'être inséré dans les *Mémoires de l'Académie danoise*. Seulement je profite, dans la Note actuelle, de l'énoncé du théorème I d'un beau Mémoire de M. Halphen, qui vient aussi de paraître (*Bulletin de la Société Math.*, t. I, p. 132), pour donner, soit à l'énoncé, soit à la démonstration de la règle dans le n° 2, une meilleure rédaction, sans en altérer la réalité.

(2) *Voir* le Mémoire de M. *Chasles* dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 27 juin 1864.

équation algébrique, le nombre des points X qui coïncident avec des points correspondants Y est $\xi + \eta$. »

Nous en donnerons ici une démonstration différente de celle qu'on emploie ordinairement.

Soient A et B deux points fixes placés dans un même plan que (L), mais au dehors de (L), et de telle manière que le point C, où la droite AB rencontre (L), ne soit pas un des points cherchés où un point X coïncide avec un point correspondant Y. Le lieu des points d'intersection Z des droites AX et BY, joignant des points correspondants X et Y aux points fixes A et B, sera une courbe algébrique. Elle passera ξ fois par A, qui est le point d'intersection de BC avec les droites qui joignent A aux ξ points X qui correspondent à C, regardé comme un point Y. Une droite AX passant par A aura à côté des ξ points confondus en A, pour points d'intersection avec le lieu (Z), les η points où elle rencontre les droites correspondantes BY. Le lieu est donc de l'ordre $\xi + \eta$; ses $\xi + \eta$ points d'intersection avec la droite (L) sont les points cherchés.

2. Ayant réduit la détermination des points où X coïncide avec Y à celle des points d'intersection de (L) avec la courbe (Z), nous avons aussi substitué à la question de la multiplicité des solutions indiquées par le principe de correspondance celle du nombre des points d'intersection de (L) et (Z) qui se confondent en un même point D. Or ce nombre est égal à la somme des ordres des segments infiniment petits XZ, interceptés par la droite (L) et la courbe (Z) sur une sécante AX, dont la distance au point D est infiniment petite du premier ordre. Les angles des triangles XYZ et DXZ, étant finis suivant nos suppositions, la distance DX est du premier ordre, et XY du même ordre que XZ. On trouve ainsi la règle suivante :

Le nombre de coïncidences de X *et* Y, *qui ont lieu en un point* D *de la droite* (L), *est égal à la somme des ordres des segments infiniment petits* XY, *interceptés sur* (L) *par un point* X *dont la distance à* D *est infiniment petite du premier ordre et par les points correspondants* Y. [L'ordre d'une distance finie est égal à zéro [1].]

[1] Mon Mémoire déjà cité contient beaucoup d'applications de cette règle. On pourrait aussi en faire usage pour démontrer le théorème II de M. Halphen. *Voir* encore le n° 4 de cette Note.

On peut se servir de la même règle pour compter les coïncidences confondues qu'on trouve en appliquant le principe de correspondance à des faisceaux de droites ou à des courbes unicursales; car ces correspondances peuvent être remplacées par celles des points d'une droite. Il n'est pas difficile, non plus, de la rendre applicable pour compter les coïncidences confondues qu'on trouve par l'extension du principe de correspondance à des courbes quelconques dues à MM. Cayley et Brill.

3. La cause de la grande importance du principe de correspondance, c'est la circonstance que, pour en faire usage, il suffit de *savoir* que la correspondance dont il s'agit *peut être* exprimée par une équation algébrique, et qu'on n'a pas besoin de *connaître cette équation*. Or, même dans les cas où il serait extrêmement difficile ou impossible de trouver l'équation, on peut, sans aucune difficulté, découvrir qu'elle existe. En réalité, dans aucune des nombreuses recherches, à ma connaissance, auxquelles ce principe a été appliqué, il n'a été nécessaire de s'assurer, par une discussion particulière, de l'existence de cette équation.

Je crois qu'on a toujours reconnu comme condition nécessaire de l'application du principe de correspondance l'existence de cette équation algébrique, mais je conviens qu'on ne l'a pas toujours dit expressément. J'approuve donc que M. Geiser ([1]) en demande une indication expresse, et je lui ai obéi dans l'énoncé du principe au n° **1**; mais, comme j'ai toujours regardé cette condition comme inséparable du principe, et je crois que tous ceux qui l'ont employé ont fait de même, j'ai été fort étonné de voir que le professeur de Zurich croit borner ainsi considérablement l'importance du principe. Les absurdités auxquelles conduirait l'application du principe à des cas où la condition dont il s'agit ne serait pas remplie sont tellement grandes, qu'il n'est pas permis de croire que sa nécessité aurait échappé à ceux qui ont fait usage de ce principe sans l'énoncer expressément. Du reste, dans l'énoncé du principe de correspondance que cite M. Geiser, qui est le premier énoncé de ce principe ([2]) (pour les cas de $\xi = \eta = 1$ et $\xi = 1$, $\eta = 2$), M. Chasles indique assez clairement cette condition, en faisant la

([1]) *Sopra un teorema fondamentale della Geometria* (*Annali di Matematica*, IV).
([2]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 24 déc. 1855.

restriction que la correspondance se présente « dans une question où il n'entre pas de transcendantes (fonctions ou courbes) ». Si la correspondance ne doit pas dépendre de fonctions ou de courbes transcendantes, on peut conclure *a fortiori* qu'on ne doit pas non plus appliquer le principe à des cas où elle dépend des courbes graphiques *arbitraires*, ou d'une séparation *arbitraire* de quantités réelles et imaginaires, comme dans les exemples de M. Geiser, ni non plus à des cas où elle dépend d'une séparation *arbitraire* de droite et de gauche, d'arcs convexes et concaves, etc.

4. Nous ajouterons encore quelques remarques ultérieures sur l'*usage du principe de correspondance*. On sait qu'au moyen de ce principe on peut déterminer le nombre de points d'intersection de deux courbes planes [1], et le nombre de ceux de trois surfaces [2], si l'on connaît le degré de chacune des équations par rapport à chacune des coordonnées. En appliquant les mêmes considérations à un espace doué d'un nombre quelconque de dimensions, on verra qu'il est possible de trouver, par le principe de correspondance, quel sera le degré d'une équation résultant d'une élimination d'un nombre quelconque de variables, par rapport à chacune des variables qui y restent. Or la résolution algébrique d'un problème consiste, en général, en une série d'éliminations. On voit donc que, quant à la détermination du nombre de solutions d'une question, on peut remplacer la recherche algébrique par des applications du principe de correspondance (qui peuvent se faire sans qu'on pense aux équations algébriques).

L'avantage de ce procédé, c'est qu'on y fait abstraction de toutes les circonstances étrangères à ce seul but, de trouver le *nombre* de solutions, et que la voie qui y conduit le plus directement se présente ainsi plus facilement.

La connaissance du nombre des solutions peut avoir un intérêt propre (ordre ou classe d'une courbe, etc.); mais elle est aussi essentielle pour la résolution algébrique complète de la question; car, ayant trouvé le degré de l'équation finale qui sert à la résoudre, on connaît aussi la forme de cette équation. Chaque équation nu-

---

[1] *Voir* la Communication de M. Chasles, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 30 sept. 1872.

[2] *Voir* la Communication de M. Fonret, au *Bulletin de la Société Math.*, t. I, p. 122.

mérique, fournie par le principe de correspondance, correspond à une équation algébrique : l'un des membres de l'équation numérique indique le degré de l'équation algébrique, pendant que l'autre indique la distribution des différentes espèces de ses solutions. De cette façon, la résolution numérique par le principe de correspondance servira à guider la résolution algébrique.

Considérons, par exemple, la détermination par le principe de correspondance du nombre V des courbes d'un système qui sont tangentes à une droite donnée, si l'on connaît le nombre μ des courbes passant par un point donné, les ordres b et c des lieux des points doubles et cuspidaux de courbes du système, et les nombres des différentes courbes du système, qui ont des branches multiples. En désignant par n l'ordre des courbes du système, on trouve

$$2\mu(n-1) = V + 2b + 3c + \Sigma,$$

où le premier membre indique l'ordre de l'équation servant à déterminer les points d'une droite où deux points d'intersection avec une même courbe du système coïncident. Cette équation aura pour racines simples les V abscisses des points de contact de la droite avec des courbes du système, pour racines doubles et triples les abscisses des points d'intersection avec les deux lieux de points singuliers, et Σ racines qui sont les abscisses des points d'intersection avec les branches multiples de courbes du système (comptés d'après la règle du n° 2).

Si $n = 2$, on doit avoir $b = c = 0$, et Σ indique le nombre de coniques infiniment aplaties d'un système, comptées d'après la règle suivante, qui n'est qu'une transcription de celle du n° 2 : *Le nombre des coniques infiniment aplaties, qui coïncident avec une droite* (D), *est égal à la somme des ordres des segments infiniment petits, interceptés sur une droite différente de* (D), *par les coniques du système qui passent par un point dont la distance à la droite* (D) *est infiniment petite du premier ordre* [1].

---

[1] M. Halphen fait usage d'une autre règle (*loc. cit.*, p. 137).