BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Revue bibliographique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 5 (1873), p. 145-158

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1873__5__145_0>

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

JACOBI (C.-G.-J.). — VORLESUNGEN ÜBER DYNAMIK, NEBST FÜNF HINTERLASSENEN ABHANDLUNGEN DESSELBEN, herausgegeben von A. CLEBSCH. — Berlin, Druck und Verlag von Georg Reimer, 1866. — 1 vol. in-4°. Prix : 6⅔ Thlr.

L'important Ouvrage dont nous voulons ici donner très-sommairement l'analyse est l'une des plus belles productions de son illustre auteur. La Mécanique analytique n'avait fait, depuis Lagrange, aucun progrès comparable à celui-là, et, comme à une telle hauteur les voies les plus diverses semblent se réunir et se confondre, le Calcul intégral, en même temps, a reçu du Livre posthume de Jacobi un accroissement important, qui éclaire, en la simplifiant, une de ses théories les plus vastes et les plus difficiles.

L'exposition des méthodes nouvelles forme un Cours de Mécanique professé à Königsberg en 1843, dont M. Clebsch, dix ans après la mort de Jacobi, nous présente la rédaction exacte en lui conservant la forme de Leçons.

Les idées principales s'étaient répandues parmi les géomètres ; Jacobi lui-même en avait, à plusieurs reprises, esquissé les traits principaux. Dans un Mémoire justement admiré, imprimé en 1837 dans le tome 17 du *Journal de Crelle,* plusieurs résultats importants, qui se retrouvent dans les *Vorlesungen,* sont énoncés et en partie démontrés. Jacobi, malgré sa mort prématurée, avait d'ailleurs assuré aux géomètres ce précieux héritage ; un Mémoire écrit par lui-même et retrouvé dans ses papiers forme, en effet, l'exposition presque complète de la théorie nouvelle. La publication de M. Clebsch la présente avec plus d'ensemble, en donnant, sur chaque point, d'abondants exemples et de minutieux détails ; elle restera classique, tout le fait présumer, car à l'importance du fond se joint un rare mérite d'exposition et une netteté bien rarement atteinte dans la discussion de théories aussi difficiles.

Lagrange, dans la *Mécanique analytique,* a donné aux équations du mouvement d'un système une forme élégante et générale, simplifiée presque aussitôt par une heureuse transformation de Poisson, dont Hamilton, le premier, a montré le résultat final sous la forme remarquable qui doit conserver son nom. En restreignant son étude au cas fort étendu auquel s'applique le principe des forces vives, Hamilton introduit dans les équations une seule fonction des variables inconnues, dont les dérivées partielles, par rapport à ces variables, sont égales aux dérivées de celles-ci par rapport au temps ou à leurs valeurs changées de signes. Cette forme symétrique, indépendante de la nature du problème, et sous laquelle les questions les plus diverses ne se distinguent les unes des autres que par la forme d'une fonction homogène du second degré, dans tous les cas, par rapport à la moitié des variables, semble déjà un fait analytique bien remarquable. Hamilton y a joint une autre remarque qui, grâce aux commentaires de Jacobi, rendra son nom immortel. Les équations différentielles dont la formation dépend d'une seule fonction peuvent toujours s'intégrer aussi à l'aide d'une seule fonction supposée connue, que Hamilton nomme *fonction caractéristique*, et dont les dérivées partielles par rapport aux constantes qu'elle renferme, égalées à d'autres constantes, donnent les intégrales du problème.

Ce beau théorème, malheureusement, restait sans application utile; car la formation de la fonction caractéristique, telle que la définit Hamilton, suppose la résolution préalable du problème. Hamilton, il est vrai, a indiqué deux équations différentielles auxquelles satisfait sa fonction caractéristique, et dont la solution commune pourrait être recherchée indépendamment de l'étude directe du problème primitif; mais, sur cette question difficile, les méthodes connues n'avaient pas prise, et Hamilton n'a donné aucune ouverture.

Tel était l'état de la question lorsque pour la première fois, en 1837, elle attira l'attention de Jacobi. L'étude du Mémoire d'Hamilton lui révéla une généralisation qui transforme toute la théorie. La fonction caractéristique n'est pas unique, comme l'avait indiqué Hamilton; elle peut être remplacée par toutes les solutions complètes, en nombre infini, comme on sait, de l'une des deux équations données par l'illustre géomètre de Dublin. La seconde de ces équations devient inutile.

Cette importante généralisation devait naître nécessairement de l'étude du Mémoire d'Hamilton; l'éminent inventeur, en effet, ayant donné les deux équations qui définissent pour lui la fonction caractéristique, les géomètres ne pouvaient manquer de s'exercer à prouver la réciproque, en cherchant si toute solution commune à ces équations possède les propriétés de la fonction caractéristique. Or le problème ainsi posé ne présente aucune difficulté, et les premières tentatives devaient montrer qu'une seule équation est suffisante ; dans la démonstration, qui s'offre d'elle-même, la seconde ne joue aucun rôle.

Un géomètre beaucoup moins habile que Jacobi aurait donc pu très-aisément se trouver conduit à la belle découverte sur laquelle repose aujourd'hui l'une des plus admirables théories du Calcul intégral; mais le résultat que nous venons d'énoncer ne forme, quelle qu'en soit l'élégance, qu'une faible partie de l'œuvre nouvelle ; c'est dans l'étude de ses conséquences que se révèle presque à chaque page un génie qu'on serait tenté de nommer incomparable, si notre siècle n'avait produit déjà des géomètres tels que Gauss et Cauchy. Après avoir ramené la solution d'un problème de Mécanique à la recherche d'une solution d'une seule équation différentielle partielle, Jacobi s'est demandé tout d'abord comment les théories connues peuvent conduire à une telle solution. La seule méthode générale dont il eût alors connaissance était celle de Pfaff ; en l'appliquant au nouveau problème, on est ramené tout d'abord au système primitif d'équations, dont la solution dès lors ne semble aucunement avancée. Il y a plus, le problème semble plutôt s'être compliqué, puisque la solution complète devient une simple préparation à celle de la question nouvelle, dans laquelle il s'est transformé. De moins habiles sans doute, satisfaits de cette critique judicieuse et incontestable, auraient cru leur œuvre terminée. La théorie d'Hamilton semble, en effet, approfondie, jugée de haut et condamnée sans retour.

Loin de renoncer à l'étude dont il avait, au contraire, aperçu toute l'importance, Jacobi, dans la remarque que nous venons de rappeler, vit la condamnation de la théorie de Pfaff bien plus encore que de celle d'Hamilton. Quand deux problèmes, en effet, se ramènent l'un à l'autre, les solutions directes de chacun d'eux ont, au fond, le même degré de complication, et, si l'un d'eux exige des calculs notablement plus compliqués que l'autre, le géomètre doit tenir pour certain qu'il est possible de les simplifier.

Le Mémoire de 1837 se termine, en effet, par une exposition de la théorie de Pfaff, perfectionnée et simplifiée par la suppression, dans le cas général, de toutes les opérations qui, dans l'étude des problèmes de Mécanique, semblaient donner à la question transformée une complication supérieure à celle du problème primitif.

L'identité de deux problèmes tenus jusque-là pour distincts étant constatée, on pourrait croire que l'on peut, de deux manières seulement, tirer parti de cette belle remarque, en ramenant la première question à la seconde, ou la seconde à la première. Jacobi cependant, dès la première Communication à l'Académie des Sciences de Paris, en 1836, appelait l'attention sur une combinaison remarquable des deux problèmes, qui frappa vivement les géomètres. Dans un grand nombre de cas, en effet, pour obtenir la fonction caractéristique d'Hamilton, il n'est pas nécessaire d'avoir intégré complétement les équations différentielles du problème de Mécanique : la moitié des intégrales peut suffire; dès qu'elles sont connues, on peut immédiatement calculer les autres. C'est ce qui a lieu, en particulier, toutes les fois qu'on étudie le mouvement d'un point dans un plan; une seule intégrale, outre celle des forces vives, permet alors de former la fonction caractéristique pour en déduire, par de simples différentiations, les deux intégrales qui complètent la solution. MM. Liouville et Poisson suppléèrent bien aisément à la démonstration que Jacobi n'avait pas donnée, et l'élégant théorème, détaché de la théorie générale, fut introduit aussitôt dans notre enseignement classique, à la Faculté des Sciences de Paris et à l'École Polytechnique.

Jacobi, cependant, continuait ses études, et, à l'occasion de la mort de Poisson, en 1839, il signalait à l'Académie un beau théorème, démontré depuis vingt-huit ans par l'éminent géomètre qu'elle venait de perdre, et dont l'auteur lui-même avait, suivant Jacobi, méconnu l'importance et la profondeur, ce résultat réellement fondamental, prodigieux et sans exemple dans la Science, ajoutait Jacobi, étant resté à la fois découvert et caché.

D'après ce théorème, en effet, deux intégrales d'un problème de Mécanique étant connues, on peut, par un calcul régulier et facile, en obtenir une troisième; celle-ci, par sa combinaison avec les deux autres, en fournit une quatrième, puis une cinquième, et l'application répétée du même procédé peut conduire à la solution complète.

Pour qui sait la difficulté presque toujours insurmontable des intégrations, et la facilité avec laquelle, au contraire, les premières intégrales s'obtiennènt dans chaque cas, l'admiration de Jacobi semble justifiée, et le théorème, tel que nous l'énonçons, est véritablement prodigieux.

Il faut malheureusement en rabattre dans les applications, et l'énoncé, Jacobi ne l'ignorait pas, laisse subsister des cas d'exception dont le nombre est tel, qu'aucun problème, jusqu'ici, n'a pu être résolu par l'application pure et simple du théorème de Poisson à deux intégrales primitivement obtenues. La proposition générale n'est pas pour cela en défaut : l'équation donnée par Poisson est exacte dans tous les cas ; mais elle se réduit souvent à une identité et souvent aussi à une relation qui n'apprend rien, parce qu'elle rentre dans les précédents.

C'est après la mort de Jacobi, mais plusieurs années avant la publication des *Vorlesungen,* que le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de Berlin (*Journal de Crelle,* tome 60) a publié son beau Mémoire sur l'intégration des équations différentielles partielles. La théorie des équations de la Mécanique, généralisée et transformée, a ramené l'esprit de l'illustre auteur sur un sujet déjà plus d'une fois abordé par lui et en apparence bien différent. Le théorème de Poisson, généralisé également suivant les besoins de la théorie nouvelle, y joue un rôle considérable, et c'est précisément un des cas particuliers dans lesquels on peut le considérer comme en défaut qui forme, en se reproduisant sans cesse, le pivot en quelque sorte et le nœud de la méthode. Notre intention n'est pas d'analyser ici ce chef-d'œuvre, qui, publié depuis dix ans déjà, est aujourd'hui connu de tous les géomètres.

L'Ouvrage publié par M. Clebsch contient la rédaction, fort élégamment écrite par le digne élève d'un si grand maître, de trente-quatre Leçons professées à Königsberg pendant les années 1842 et 1843. Plusieurs belles découvertes, révélées dès cette époque à ses élèves, avaient été seulement indiquées au public ; quelques-unes même étaient restées complétement inédites. Plus d'un géomètre, on le comprend, en s'exerçant sur des indications très-exactes quoique incomplètes, a dû rencontrer quelques-unes des vérités déjà enseignées à Königsberg, et il est bien difficile de décider la part de mérite, on peut même dire de gloire, qu'il a par là méritée. La question est aussi insoluble que futile ; le récit des circonstances connues est le devoir de l'historien, qui ne peut ni ne doit s'ériger en tribunal pour prononcer sur les droits de chacun.

Un champ de blé ou une maison doivent de toute nécessité appartenir à quelqu'un, et, si le doute s'élève, un jugement sans appel doit trancher la question ; il n'en est pas de même d'une vérité scientifique : la propriété peut rester douteuse, ou, pour en parler mieux, il n'y a pas lieu de l'adjuger. Quand on sait qui le premier a fait la découverte, à qui et sous quelle forme il l'a communiquée, quel autre l'a publiée le premier sans que sa loyauté soit révoquée en doute, je n'ai jamais compris ce que l'on cherche à décider de plus en demandant à qui elle appartient.

Jacobi passe en revue, en les esquissant à grands traits, les principes généraux de la Science du mouvement. Sur les équations du mouvement du centre de gravité, ses Leçons s'éloignent peu de nos meilleurs Ouvrages classiques.

Le principe des forces vives est l'occasion d'une remarque fort neuve sans doute pour les auditeurs du Cours de 1843, et qui, aujourd'hui encore, doit intéresser plus d'un lecteur. En supposant l'existence d'une fonction des forces homogènes, Jacobi obtient une équation remarquable, qui prend une forme beaucoup plus simple encore lorsque la fonction est de degré -2 ; une des conséquences signalées par l'auteur s'applique à un système de points dans lesquels l'attraction serait en raison inverse du cube de la distance, pour démontrer que l'un d'eux, au moins dans ce cas, doit s'éloigner indéfiniment, ou que deux points primitivement séparés doivent se choquer et se réunir en un seul. Jacobi n'épuise pas toutes les conséquences de sa remarque, dont on peut déduire aisément que le système doit, à la longue, se dissiper ou se condenser, de telle sorte que tous les points dont la distance ne grandit pas indéfiniment se rapprochent jusqu'à n'en former qu'un seul.

A l'occasion du principe des aires, Jacobi examine le cas où l'un des points du système décrit uniformément une circonférence de cercle ; une intégrale élégante convient à ce cas pour remplacer le principe des forces vives et celui des aires, qui séparément ne sont plus applicables. Le mouvement de Jupiter pouvant, dans une première approximation, être considéré comme circulaire et uniforme, on aperçoit une application possible à l'Astronomie, qui n'est d'ailleurs que rapidement indiquée dans les *Vorlesungen*.

Le principe de la moindre action examiné ensuite est expliqué avec une précision jusqu'ici trop rare dans les plus célèbres Ouvrages. Peut-être serait-il juste de faire une exception pour Olinde Rodrigues qui, dans la *Correspondance sur l'École Polytechnique,* avait déjà signalé comme indispensable la condition sous-entendue seulement par les meilleurs auteurs, et sur laquelle insiste Jacobi.

Jacobi, à cette occasion, donne une indication de ses travaux sur la distinction des maxima et minima, en indiquant l'application élégante au cas du mouvement d'une planète.

Quelques remarques relatives à ce problème célèbre peuvent peut-être s'ajouter utilement aux résultats donnés par Jacobi.

Et d'abord il faut distinguer soigneusement l'intégrale minima et la plus petite valeur possible de l'intégrale considérée. La première en effet est plus petite que les intégrales infiniment voisines, et l'on ne peut rien affirmer sur le résultat de sa comparaison avec d'autres. En étudiant les lignes *minima* ou *géodésiques* sur une surface, Jacobi énonce cette règle remarquable : si l'on considère toutes les lignes minima issues d'un même point, elles enveloppent, en général, une courbe lieu de leurs intersections successives; chacune d'elles est minima jusqu'au point de contact avec cette courbe et jusqu'à ce point seulement. Lorsque cette courbe enveloppe n'existe pas, on ne peut mener d'un point à un autre qu'une seule ligne géodésique, qui est nécessairement la plus courte possible. C'est ce qui a lieu : Jacobi l'a affirmé depuis longtemps, pour les surfaces à courbures opposées, et M. O. Bonnet, s'appuyant sur un beau Mémoire de Sturm, a donné avec élégance la démonstration signalée comme difficile par l'illustre auteur. Mais on peut faire, au sujet de cet élégant théorème, une remarque curieuse : la ligne minima indiquée par la règle de Jacobi n'est pas réellement la plus courte, et l'on prouve aisément que l'une des lignes géodésiques partant d'un point donné M et touchant la courbe enveloppe en I, ajoutée à un arc quelconque II' de cette courbe enveloppe, donne une somme précisément égale à celle de la ligne géodésique qui va de M en I'. Si l'on remplace l'arc II' par la corde géodésique, évidemment plus courte, on obtiendra un chemin allant de M en I', et plus court que celui qu'indique Jacobi comme un minimum. Il n'y a là nulle contradiction, on doit le remarquer, et la distinction faite entre la ligne *la plus courte entre toutes* et la ligne plus courte que les voisines, nommée généralement *ligne minima*, dissipe toute difficulté.

Une remarque sur le problème du mouvement elliptique semblera peut-être plus curieuse et plus nouvelle : si l'on considère le mouvement d'un point attiré vers un centre fixe en raison inverse du carré de la distance, et partant avec une vitesse initiale donnée d'une position également donnée, toutes les ellipses décrites, et qui ont même grand axe, seront enveloppées par une même ellipse ayant pour foyers le point attirant et le point initial considéré. Le minimum de l'intégrale de la moindre action s'étend sur chaque trajectoire, d'après le principe de Jacobi, jusqu'à son contact avec cette enveloppe, c'est-à-dire, comme on le prouve aisément, jusqu'à l'extrémité de la corde qui passe par le point de départ donné et par le second foyer. L'arc de courbe ainsi défini étant le seul qui puisse, entre les deux extrémités, satisfaire aux conditions analytiques du problème, il semble que cette fois l'intégrale doit être bien réellement un minimum; car il faut bien que la somme des produits de la vitesse par l'élément parcouru, qui évidemment ne peut devenir nulle, ait, pour un certain chemin, une valeur moindre que tous les autres. Ce n'est pas toujours cependant à l'arc d'ellipse indiqué par Jacobi que correspond ce minimum absolu. Il faut remarquer, en effet, que le principe des forces vives, introduit, on le sait, comme équation de condition, assigne à la vitesse, en chaque point du plan, une valeur déterminée. Or cette valeur, nulle sur les points d'une certaine circonférence, est imaginaire pour ceux qui sont placés en dehors ; si donc on réunit deux points par un chemin qui emprunte un arc à la circonférence limite, la partie correspondante de l'intégrale sera nulle, et la comparaison avec les intégrales voisines, qui pourront devenir imaginaires, échappera aux règles du Calcul des variations. L'intégrale peut devenir ainsi plus petite que celle que fournit le Calcul des variations, et l'on prouve aisément qu'à l'arc défini par Jacobi peut correspondre une valeur plus grande que pour un chemin composé d'un arc pris sur le cercle limite dont nous avons parlé et de deux portions de rayons du même cercle. Un tel chemin ne saurait, il est vrai, être réellement parcouru, puisque la vitesse s'y trouve nulle sur une partie du parcours; mais il est aisé de remplacer l'arc de cercle par un chemin voisin placé dans son intérieur, de manière à rendre le trajet possible, tout en laissant l'intégrale plus petite que le minimum signalé jusqu'ici ([1]).

Après avoir rappelé le principe de la moindre action et précisé le sens qu'on y doit attacher, Jacobi démontre un théorème analogue, mais complétement distinct pourtant, dû à Hamilton. L'intégrale qui, d'après le nouveau principe, est minima, dont, pour parler plus correctement, la variation est nulle, diffère de celle de la moindre action, dans le cas où le principe de la moindre action a lieu, par l'addition seulement d'un terme proportionnel au temps; mais les conditions sous lesquelles la variation est nulle sont ici complétement changées, et le temps du trajet qui, dans le principe de la moindre action, ne jouait aucun rôle, est ici une des données de la question, tandis que la constante des forces vives qui était donnée ne l'est plus dans l'énoncé nouveau. — Si l'on applique, par exemple, les deux théorèmes au mouvement elliptique d'une planète, dans le premier, le chemin réellement suivi est comparé à toutes les routes possibles ayant mêmes extrémités et pour lesquelles la vitesse en chaque point est exprimée par la formule des forces vives; dans le second, il l'est à tous les chemins parcourus d'une manière arbitraire sous la seule condition que la durée du trajet ait une valeur donnée.

La propriété curieuse découverte par Hamilton se présentait dans son Mémoire comme importante, surtout parce que cette intégrale, qui présente un caractère de minimum, est précisément la fonction caractéristique. Nous avons dit comment Jacobi, généralisant une première fois les découvertes de Hamilton, en a considérablement accru l'importance en y rattachant une théorie complète des équations différentielles partielles du premier ordre. A chaque équation de ce genre correspond un système d'équations différentielles ordinaires, que l'on peut nommer *corrélatif*, et la dépendance des deux problèmes est telle, que toute solution complète de l'équation aux dérivées partielles permet d'intégrer le système corrélatif, tandis que la solution du système d'équations différentielles

([1]) Cette remarque curieuse, je l'ai appris depuis que ces lignes sont écrites, a été faite récemment par M. Todhunter dans son Ouvrage intitulé : *Researches of the Calculus of variations*, 1871. (Voir *Bulletin*, t. IV, p. 273.)

ordinaires fournit une solution complète de l'équation aux dérivées partielles.

Jacobi donne un grand nombre d'exemples fort intéressants de sa belle théorie; il n'indique aucune exception. Dans le tome III des *Mathematische Annalen,* publiées à Leipzig ([1]), M. A. Mayer croit pouvoir en signaler une qui, se présentant à la suite d'une transformation souvent nécessaire, aurait une très-grande importance. M. Mayer, il est vrai, fait voir aussitôt, et d'une manière extrêmement élégante, qu'à l'aide d'une très-légère modification on peut éviter la difficulté. Quelque élégant que soit l'artifice de M. Mayer, un peu d'attention montrera qu'il était inutile, et que la règle prescrite par Jacobi n'était nullement en défaut dans le cas indiqué par lui; aucun changement n'était donc nécessaire. La méthode proposée par M. Mayer fournit seulement une solution nouvelle analogue à celle de Jacobi, qui subsiste sans modification.

Sa méthode, en effet, consiste à calculer une certaine intégrale V pour l'exprimer ensuite en fonctions de quantités désignées, qui, dans les *Vorlesungen,* sont nommées $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_1^0, q_2^0, q_3^0, \ldots,$ et le cas d'exception signalé par M. Mayer est celui où la fonction V se réduit à zéro. « On ne peut, dit-il alors, l'exprimer sous la forme demandée par Jacobi. » C'est là une inadvertance du savant auteur; les quantités $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_1^0, q_2^0, q_3^0, \ldots$ ne sont plus, en effet, arbitraires dans ce cas; il existe, on le démontre aisément, entre elles une relation nécessaire, et le premier membre de cette relation peut être considéré comme l'expression de *zéro* en fonction des lettres demandées. Cette remarque, faite au Collége de France, dans une Leçon à laquelle assistait M. Darboux, a été l'occasion d'un développement intéressant que ce jeune géomètre aura, prochainement sans doute, l'occasion de livrer au public.

Parmi les applications données par Jacobi, l'une des plus élégantes est, sans contredit, la démonstration du célèbre théorème d'Abel, déduit de l'étude d'un problème de Mécanique fort simple. Si l'on considère, en effet, le mouvement d'un système de points qui ne sont sollicités par aucun eforce, ou qui le sont par des forces dirigées vers un point fixe et proportionnelles à la distance à ce point, sa solution n'offre aucune difficulté. Or il arrive que, en adoptant un

---

([1]) Voir *Bulletin,* t. II, p. 364.

système de variables analogues aux coordonnées elliptiques introduites dans la Science par Lamé, l'équation aux dérivées partielles corrélative du problème admet une solution composée d'une somme d'intégrales abéliennes, qui se présente pour ainsi dire d'elle-même, et dont la comparaison avec la solution directe fournit une démonstration du théorème célèbre que Jacobi, quelques années après la mort d'Abel, appelait : *Carum heredium a geometris acceptum*. Les Leçons de Jacobi, à partir de la trentième, sont consacrées à l'étude des équations différentielles du premier ordre. La théorie qu'il expose, très-nouvelle à l'époque où cinquante auditeurs se pressaient à Königsberg autour de la chaire de Jacobi, est aujourd'hui bien connue des géomètres : un beau Mémoire, publié en 1862, leur en a révélé tous les détails. La publication de ce Mémoire a coïncidé avec celle des travaux d'un jeune géomètre d'un rare mérite, Edmond Bour, qui, par ses propres recherches, avait retrouvé alors, en s'aidant des résultats antérieurement publiés par d'autres, le principe et l'ordre le plus naturel et le plus simple des belles découvertes de Jacobi. « La publication posthume de son Ouvrage vient d'avoir lieu, disait Bour, par les soins de M. Clebsch, et c'est avec une bien vive satisfaction que, en tenant compte de la différence entre le couronnement de l'édifice d'un maître et les essais incertains d'un élève, j'ai constaté, dans la nouvelle méthode de Jacobi, l'identité la plus parfaite avec celle que j'ai eu l'honneur de soumettre sept ans avant à l'Académie. »

Les Leçons de Jacobi avaient été publiquement professées, en 1842, devant un nombreux auditoire, dix ans avant l'entrée de Bour à l'École Polytechnique, et l'illustre géomètre était mort longtemps avant que notre ingénieux compatriote fût en âge d'aborder les savants problèmes sur lesquels il s'est depuis si brillamment exercé ; aucune question de priorité ne pouvait donc, en apparence, être soulevée entre eux, et Bour, qui, dans la phrase citée plus haut, s'exprime avec tant de convenance et de justesse, semble moins heureusement inspiré quand il écrit quelques phrases plus loin : « Jacobi démontre *mon* théorème au début de son Ouvrage. »

L'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre étant, au fond, le sujet traité par Jacobi et approfondi par lui avec une incomparable supériorité, il est juste de rappeler que la première solution satisfaisante du problème général a été donnée par Cauchy, en 1817, dans le *Bulletin de la Société Philomathique*. C'est là que, pour la première fois, et dans un Mémoire resté ignoré par Jacobi, les complications inutiles introduites dans la méthode de Pfaff ont été habilement écartées, et Jacobi devait, vingt ans plus tard seulement, proposer une méthode équivalente au fond, mais à laquelle les *Vorlesungen* ont donné depuis une perfection qui fait, selon l'expression de Bour, de la solution de ce problème difficile, le chapitre le plus élégant et le plus achevé du Calcul intégral.

A l'occasion de la méthode de Cauchy et du Mémoire publié par Jacobi en 1837, dans le tome 17 du *Journal de Crelle,* on me permettra de revenir sur une objection déjà anciennement produite à la démonstration du résultat final des deux illustres géomètres, et qui, acceptée en principe par les auteurs qui ont traité la question depuis, ne me paraît pas cependant avoir été considérée sous son véritable jour.

Cauchy, pour intégrer une équation du premier ordre, que nous supposerons, pour simplifier, à deux variables indépendantes, introduit une variable auxiliaire dont l'emploi revient à considérer la surface cherchée comme le lieu d'une série de courbes que l'on prend pour inconnues. La surface étant supposée déterminée, je veux dire l'attention étant appelée, en particulier, sur l'une des surfaces qui satisfont au problème, on peut, pour celle-là, considérer la génération par une courbe comme indéterminée et écrire arbitrairement une équation de condition qui, introduite dans le problème, ne diminuera en rien le nombre des solutions. Or il arrive qu'en procédant ainsi le nombre des équations surpasse celui des inconnues, et qu'en en laissant une de côté on peut obtenir une solution qui a précisément le degré de généralité de la solution générale, et qui, devant la comprendre, ne peut manquer de lui être identique. Cauchy a vu cela très-nettement; mais, sans se contenter de cette raison sommaire, qu'il n'a pas même donnée, il a voulu établir directement que cette équation surabondante sera toujours satisfaite d'elle-même; or la démonstration n'a, suivant moi, aucune force. Je n'ai pas dit, comme on l'a cru, qu'elle peut se trouver en défaut et que des exceptions peuvent se produire; on ne dit pas même assez, suivant moi, en faisant remarquer que ces exceptions existent dans le cas général. Je vais plus loin en affirmant que, tant qu'on reste dans la théorie générale, la démonstration ne prouve absolument rien, et ne rend pas même vraisemblable le théorème qu'on veut démontrer.

Je cherche à préciser la question, non à en exagérer l'importance, qui est petite. L'assertion de Cauchy est exacte; l'équation surabondante est, *en général*, satisfaite d'elle-même, et j'en ai dit la raison : l'exception ne peut se présenter que dans des cas particuliers; c'est la preuve seulement qui n'est pas acceptable. On se borne, en effet, à faire voir que la fonction, qui doit être nulle, est le produit de deux facteurs dont l'un se réduit à zéro : si donc l'autre n'est pas infini, la démonstration est faite, et il semble que l'on peut considérer le cas où il en est ainsi comme une exception. Mais il n'en est pas ainsi; car, par cela seul que le premier facteur est nul, si le théorème n'était pas exact, ce que l'on doit ignorer pendant qu'on le démontre, la démonstration prouverait que le second est infini. Appliquée mot pour mot avec le correctif qu'on lui a fait subir, la démonstration de Cauchy permettrait d'énoncer la proposition suivante : « Toute fonction qui s'annule pour une » valeur de la variable est identiquement nulle, excepté dans des » cas particuliers. » On a, en effet, identiquement

$$\Phi(x) = \Phi(x_0)\, e^{\int_{x_0}^{x} \frac{\Phi'(x)\,dx}{\Phi(x)}},$$

et si $\Phi\,(x_0)$ est nul, $\Phi\,(x)$ le sera également, *à moins que* l'autre facteur ne soit infini. Cauchy ne dit pas autre chose sur la fonction qu'il étudie.

Il est bien vrai que, cette fonction étant réellement nulle, le second facteur, dans chaque cas que l'on examinera, ne deviendra pas infini, et qu'il sera facile de s'en assurer, mais c'est par d'autres raisons qu'on est en droit de l'affirmer d'avance; comme je l'ai dit, la preuve proposée par Cauchy ne démontre absolument rien, et l'on présente l'objection sous un très-faux jour en signalant seulement des cas d'exception.

J. Bertrand.

WILLIAMSON (Benj.), A. M., Fellow and Tutor, Trinity College, Dublin. — An Elementary Treatise on the Differential Calculus, containing the Theory of Plane Curves, with numerous Examples. — Second Edition, revised and enlarged. — London, Longmans, Green & Co., 1873. — 1 vol. petit in-8°, 367 p., 48 figures dans le texte. Prix : 10 sh. 6 d.

Nous recommandons ce Volume aux professeurs, qui sauront suppléer aux défauts de l'exposition théorique, et qui y trouveront un Recueil précieux d'applications et d'exemples bien choisis. On remarquera, en particulier, les développements donnés par l'auteur sur la théorie des maxima et des minima, sur la construction des courbes planes, sur les changements de variables, etc.

Quant à la partie théorique du Livre, nous ne pouvons qu'exprimer notre étonnement de voir un auteur, attaché à la célèbre Université des Hamilton, des Boole, des Salmon, des Jellett, traiter les principes du Calcul différentiel à un point de vue aussi arriéré. Il ne suffit pas de citer dans sa Préface une page du Livre de Carnot, *Sur la Métaphysique du Calcul infinitésimal*, pour prouver qu'on s'en est approprié le contenu, et ce n'est pas un demi-siècle après la publication des Ouvrages d'enseignement de Cauchy qu'il devrait être permis d'employer les infiniment petits sans dire ce que c'est, ni de démontrer le théorème de Taylor par la méthode des coefficients indéterminés. C'est pour cela que nous n'indiquons ce Livre aux commençants que comme un bon Recueil d'exercices.

L'auteur annonce la prochaine publication d'un Traité de Calcul intégral (*An Elementary Treatise on the Integral Calculus, containing applications to Curves and Surfaces*). J. H.