Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

Painvin

Note sur l'intersection de deux courbes

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 5 (1873), p. 138-144

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1873__5__138_1>

MÉLANGES.

NOTE SUR L'INTERSECTION DE DEUX COURBES;

PAR M. PAINVIN.

1. Lorsque deux courbes ont en commun un point O multiple, d'ordre p pour l'une, et d'ordre q pour l'autre, on sait que les deux courbes ont pq points communs coïncidant avec le point O, pourvu que les deux courbes n'aient pas de tangentes communes en ce point; cette proposition est facile à démontrer.

Mais lorsque les deux courbes ont des tangentes communes au point considéré, le nombre des points communs coïncidant avec O peut dépasser pq, et la détermination exacte de ce nombre est très-importante dans l'étude des courbes et des surfaces. Je dois signaler un Article de M. Halphen sur le même sujet, publié dans le *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. I, p. 133.

Le point multiple étant pris pour origine des coordonnées, l'axe des y étant la tangente commune, la question peut être posée ainsi :

Trouver le nombre des points coïncidant avec l'origine et communs aux deux courbes

$$x^{i_0}\varphi_{p-i_0}+x^{i_1}\varphi_{p-i_1+1}+x^{i_2}\varphi_{p-i_2+2}+\ldots=0,$$
$$x^{j_0}\psi_{q-j_0}+x^{j_1}\psi_{q-j_1+1}+x^{j_2}\psi_{q-j_2+2}+\ldots=0,$$

les lettres φ_i et ψ_i désignant des fonctions homogènes en x et y, et du degré i.

2. La méthode que je vais indiquer permet toujours de résoudre la question, lorsque les exposants $i_0, i_1, i_2, \ldots, j_0, j_1, \ldots$ sont donnés numériquement, et cela sans difficulté et sans calculs pénibles.

Mais peut-on avoir une réponse générale, qui dispense de faire ces calculs, lorsqu'on laisse aux exposants leurs valeurs indéterminées?

Jusqu'à présent, je n'ai pu résoudre la question de cette manière générale, que dans le cas particulier où l'une des équations ne renferme le facteur x qu'à son premier terme.

Ainsi l'on peut énoncer la proposition suivante :

Soient les deux courbes

$$(1)\quad \begin{cases} C=x^{i_0}\varphi_{p-i_0}+x^{i_1}\varphi_{p-i_1+1}+x^{i_2}\varphi_{p-i_2+2}+\ldots+x^{i_k}\varphi_{p-i_k+k} \\ \qquad +\varphi_{p+k+1}+\ldots=0, \\ D=x^{j_0}\psi_{q-j_0}+\psi_{q+1}+\ldots=0; \end{cases}$$

le nombre des points coïncidant avec l'origine O *et communs aux deux courbes* C *et* D *est égal à*

$$pq+\text{le plus petit des nombres }\{rj_0+i_r\},$$

i_r étant nul, lorsque r est supérieur à k.

On suppose que les fonctions φ_{p+k+1} et ψ_{q+1} ne renferment pas le facteur x. C'est cette proposition que je vais démontrer. Je l'ai déjà énoncée dans ce *Bulletin*, t. IV, p. 131.

3. Je vais d'abord montrer que le théorème est vrai pour $k=0$; j'établirai ensuite que, si la proposition est admise pour une valeur quelconque de k, elle sera vraie pour la valeur $k+1$.

N. B. Pour abréger, je désignerai par $N((C,D))$ le nombre des points coïncidant avec O et communs aux courbes C et D.

1° Soit $k=0$, c'est-à-dire considérons les deux courbes

$$(1)\qquad \begin{cases} C = x^{i_0}\varphi_{p-i_0} + \varphi_{p+1} + \ldots = 0, \\ D = x^{j_0}\psi_{q-j_0} + \psi_{q+1} + \ldots = 0, \end{cases}$$

les fonctions φ_{p+1} et ψ_{q+1} ne renfermant pas le facteur x.

Supposons $i_0 > j_0$, et formons alors la combinaison

$$(2)\qquad \Sigma = C\psi_{q-j_0} - D . x^{i_0-j_0}\varphi_{p-i_0},$$

ce qui donne

$$(3)\qquad \begin{cases} \Sigma = [\varphi_{p+1}\psi_{q-j_0} - x^{i_0-j_0}\psi_{q+1}\varphi_{p-i_0}] \\ \qquad + [\varphi_{p+2}\psi_{q-j_0} - x^{i_0-j_0}\psi_{q+2}\varphi_{p-i_0}] + \ldots . \end{cases}$$

Or, d'après l'identité (2), on a évidemment

$$N((D,\Sigma)) = N((D,C)) + N((D,\psi_{q-j_0})),$$

d'où l'on déduit

$$(4)\qquad N((C,D)) = N((D,\Sigma)) - N((D,\psi_{q-j_0})).$$

Mais l'origine est un point multiple d'ordre q pour la courbe D et d'ordre $(p+q+1-j_0)$ pour la courbe Σ; d'ailleurs ces deux courbes n'ont pas de tangentes communes en O; par conséquent,

$$N((D,\Sigma)) = q(p+q+1-j_0).$$

D'un autre côté, la courbe ψ_{q-j_0} se compose de $q-j_0$ droites distinctes passant par l'origine, et chacune d'elles y rencontre la courbe D en $(q+1)$ points confondus en O, par suite

$$N((D,\psi_{q-j_0})) = (q+1)(q-j_0).$$

Eu égard à ces valeurs, la relation (4) donne

$$N((C,D)) = q(p+q+1-j_0) - (q+1)(q-j_0) = pq + j_0,$$

c'est-à-dire que le nombre des points coïncidant avec O et communs aux deux courbes (1) est égal à

$$(5)\qquad pq + \text{le plus petit des nombres } (rj_0 + i_r),$$

car la formule $(rj_0 + i_r)$ donne

$$i_0 \text{ pour } r=0, \text{ et } j_0 \text{ pour } r=1, \text{ puisque } i_1 = 0.$$

4. 2° Soit k quelconque, c'est-à-dire considérons les deux courbes

$$(1)\quad \begin{cases} C = x^{i_0}\varphi_{p-i_0} + x^{i_1}\varphi_{p-i_1+1} + x^{i_2}\varphi_{p-i_2+2} + \ldots + x^{i_k}\varphi_{p-i_k+k} \\ \qquad + \varphi_{p+k+1} + \ldots = 0, \\ D = x^{j_0}\psi_{q-j_0} + \psi_{q+1} + \ldots = 0, \end{cases}$$

les fonctions φ_{p+k+1} et ψ_{q+1} ne renfermant pas le facteur x.

Nous admettons que le théorème énoncé au n° 2 est vrai, lorsque l'équation de la courbe (C) renferme k termes consécutifs qui, à partir du terme du moindre degré, sont divisibles par x, l'équation de la courbe (D) n'admettant toujours le facteur x qu'à son premier terme; je dis que le théorème est encore vrai, lorsque l'équation de la courbe (C) renfermera $(k+1)$ termes consécutifs divisibles par x, à partir du premier, l'équation de la courbe (D) ne renfermant toujours x qu'à son premier terme.

Soit d'abord $i_0 < j_0$.

Formons la combinaison

$$(2)\qquad \Sigma = C.x^{j_0-i_0}\psi_{q-j_0} - D.\varphi_{p-i_0},$$

c'est-à-dire

$$(3)\qquad \Sigma = [x^{i_1+j_0-i_0}\psi_{q-j_0}\varphi_{p-i_1+1} - \psi_{q+1}\varphi_{p-i_0}] + [\ldots] + \ldots.$$

D'après l'identité (2), on a

$$(4)\qquad N((C,\Sigma)) = N((C,D)) + N((C,\varphi_{p-i_0}));$$

or, en raisonnant comme on vient de le faire au n° 3, on trouve

$$N((C,\Sigma)) = p(p+q+1-i_0);\quad N((C,\varphi_{p-i_0})) = (p+1)(p-i_0),$$

d'où il résulte

$$(5)\qquad N((C,D)) = pq + i_0.$$

Ce calcul et cette conclusion conviennent encore au cas où $i_0 = j_0$.

Soit en second lieu $i_0 > j_0$.

Formons la combinaison

$$(6)\qquad \Sigma_1 = C.\psi_{q-j_0} - D.x^{i_0-j_0}\varphi_{p-j_0},$$

c'est-à-dire

$$(7)\quad \begin{cases} \Sigma_1 = [x^{i_1}\varphi_{p-i_1+1}\psi_{q-j_0} - x^{i_0-j_0}\psi_{q+1}\varphi_{p-i_0}] \\ \quad + [x^{i_2}\varphi_{p-i_2+2}\psi_{q-j_0} - x^{i_0-j_0}\psi_{q+2}\varphi_{p-i_0}] + \ldots \\ \quad + [x^{i_k}\varphi_{p-i_k+k}\psi_{q-j_0} - x^{i_0-j_0}\psi_{q+k}\varphi_{p-i_0}] \\ \quad + [\varphi_{p+k+1}\psi_{q-j_0} - x^{i_0-j_0}\psi_{q+k+1}\varphi_{p-i_0}] + \ldots. \end{cases}$$

D'après l'identité (6), on a

$$N((D, \Sigma_1)) = N((D, C)) + N((D, \psi_{q-j_0})),$$

d'où l'on déduit

$$(8) \qquad N((C, D)) = N((D, \Sigma_1)) - N((D, \psi_{q-j_0})).$$

On a d'abord

$$(9) \qquad N((D, \psi_{q-j_0})) = (q+1)(q-j_0).$$

Déterminons maintenant $N((D, \Sigma_1))$.

Remarquons que l'équation de la courbe Σ_1 (7) renferme le facteur x à ses k premiers termes, et l'équation de la courbe (D) ne le renferme qu'à son premier terme; le théorème admis est donc applicable au cas actuel, et l'on a

$$(10) \quad N((D, \Sigma_1)) = q(p+q+1-j_0) + \text{le plus petit des nombres } (\rho j_0 + h_\rho),$$

h_ρ désignant, dans l'équation de Σ_1, l'exposant de x facteur dans le terme qui en a ρ avant lui; ρ peut avoir les valeurs $0, 1, 2, \ldots, k-1, k$, en admettant l'hypothèse $h_k = 0$.

Eu égard aux valeurs (9) et (10), l'égalité (8) donne

$$\begin{aligned} N((C, D)) &= pq + j_0 + \text{le plus petit des nombres } (\rho j_0 + h_\rho) \\ &= pq + \text{le plus petit des nombres } [(\rho+1)j_0 + h_\rho]; \end{aligned}$$

ou, en remplaçant $\rho + 1$ par r

$$(11) \quad N((C, D)) = pq + \text{le plus petit des nombres } (rj_0 + h_{r-1}).$$

On voit, par l'équation (7) de la courbe Σ_1, que l'on devra prendre

$$(11\,bis) \qquad \begin{cases} h_{r-1} = i_r, & \text{si } i_r < i_0 - j_0, \\ h_{r-1} = i_0 - j_0 + g_r, & \text{si } i_r > i_0 - j_0 + g_r; \end{cases}$$

g_r est l'exposant de x qui peut se trouver en facteur dans le terme ψ_{q+r}.

D'après la remarque qui termine l'alinéa précédent, r ne devra avoir que les valeurs $1, 2, 3, \ldots, k, k+1$, avec l'hypothèse $i_{k+1} = 0$; quant à g_r, l'indice r ne peut jamais être inférieur à 2, puisque le terme ψ_{q+1} n'admet pas le facteur x.

J'observe de suite que, si $i_0 < j_0$, tous les nombres $(rj_0 + h_{r-1})$ sont supérieurs à i_0, qui est un des nombres contenus dans cette formule. En effet, les nombres renfermés dans cette formule ne peuvent être que

$$rj_0 + i_r, \quad \text{ou} \quad rj_0 + i_0 - j_0 + g_r;$$

or les premiers sont plus grands que j_0, et *a fortiori* seront plus grands que i_0, puisque l'on suppose $j_0 > i_0$; quant aux seconds, ils sont visiblement supérieurs à i_0; car la plus petite valeur de r est 1, auquel cas on trouve i_0, puisque $g_1 = 0$. Ainsi, lorsqu'on suppose $i_0 < j_0$, i_0 est le plus petit des nombres que puisse fournir la formule $(rj_0 + h_{r-1})$. Donc la formule (5), trouvée dans le premier cas, peut être renfermée dans la formule (11).

Je remarque maintenant que les nombres donnés par la formule $(rj_0 + h_{r-1})$ sont, d'après les conditions (11 *bis*) : ou de la forme

(1°) $\quad r'j_0 + i_{r'}, \qquad$ si $\quad i_{r'} < i_0 - j_0,$

ou de la forme

(2°) $\quad r''j_0 + i_0 - j_0 + g_{r''}, \quad$ si $\quad i_{r''} > i_0 - j_0 + g_{r''};$

les nombres r' et r'' ne doivent jamais avoir les mêmes valeurs et ne peuvent prendre que les valeurs de la suite $1, 2, 3, \ldots, k, k+1$.

Or considérons d'abord les nombres de la suite (2°); le nombre r'' pourra prendre une ou plusieurs des valeurs de la suite $1, 2, \ldots, k, k+1$; et alors les deux cas suivants pourront se présenter : ou bien, parmi les valeurs que devra prendre r'', une d'elles sera l'unité, ou bien toutes les valeurs que prendra r'' seront supérieures à l'unité.

Dans le premier cas, la suite (2°) renfermera le nombre i_0 correspondant à $r'' = 1$, puisque $g_1 = 0$; et tous les autres nombres que pourra donner la suite (2°) seront évidemment supérieurs à i_0, puisque les autres valeurs de r'', s'il y en a, seront plus grandes que 1.

Dans le second cas, on trouvera toujours dans la suite (1°) un nombre inférieur au plus petit des nombres que pourra fournir la suite (2°); soit, en effet, r_1 la valeur de r'' à laquelle correspond le plus petit des nombres de la suite (2°); r_1 est, d'après notre hypothèse, plus grand que 1; par conséquent la suite (1°) renfermera le nombre correspondant à $r' = 1$, c'est-à-dire $j_0 + i_1$; et alors $i_1 < i_0 - j_0$; on a donc

$$j_0 + i_1 < j_0 + (i_0 - j_0), \quad \text{et } a\ fortiori \quad < r_1 j_0 + (i_0 - j_0) + g_{r_1};$$

c'est-à-dire que le nombre $(j_0 + i_1)$ de la suite (1°) est inférieur à $(r_1 j_0 + i_0 - j_0 + g_{r_1})$, qui est, par hypothèse, le plus petit des nombres de la suite (2°).

Ainsi i_0 est le seul des nombres de la suite (2°) pour lequel il n'y en ait pas un inférieur renfermé dans la suite (1°); on peut donc laisser de côté tous les nombres de la suite (2°), sauf le nombre i_0. Mais remarquons que la suite (1°) renfermera ce nombre i_0, si nous convenons d'attribuer à r' la valeur o qui jusqu'à présent se trouvait exclue; il en résulte alors que le plus petit des nombres fournis par l'une ou l'autre des suites (1°) et (2°) sera nécessairement renfermé dans la formule $(rj_0 + i_r)$, où r devra avoir maintenant les valeurs $0, 1, 2, \ldots, k, k+1$, avec la condition $i_{k+1} = 0$.

La proposition énoncée est donc complétement démontrée.

5. J'indiquerai les exemples suivants :

$$(1^\circ) \quad \left\{ \begin{array}{l} C = x^3 + x\varphi_3 + x^2\theta_3 + x^3\chi_3 + x^6\varphi_1 + \varphi_8 + \ldots = 0, \\ D = x^2 + \psi_3 + \ldots = 0, \end{array} \right.$$

$$N((C, D)) = 2.3 + 3 = 9.$$

$$(2^\circ) \left\{ \begin{array}{l} C = x^7 + x^6\varphi_2 + x^5\varphi_4 + x^4\varphi_6 + x^3\varphi_8 + x^2\varphi_{10} + x\varphi_{12} + \varphi_{14} + \ldots = 0, \\ D = x + \psi_2 + \ldots = 0, \end{array} \right.$$

$$N((C, D)) = 1.7 + 7 = 14.$$

$$(3^\circ) \quad \left\{ \begin{array}{l} C = x^9 + x^7\varphi_3 + x^2\varphi_9 + x^{12} + x\varphi_{12} + \varphi_{14} + \ldots = 0, \\ D = x^2 + \psi_3 + \ldots = 0, \end{array} \right.$$

$$N((C, D)) = 2.9 + 6 = 24.$$

$$(4^\circ) \quad \left\{ \begin{array}{l} C = x + x^2 + x^3 + x^4 + \varphi_5 + \ldots = 0, \\ D = x + \psi_2 + \ldots = 0, \end{array} \right.$$

$$N((C, D)) = 1.1 + 1 = 2.$$

Ces résultats ont été obtenus à l'aide de la formule générale que nous venons d'établir, et vérifiés en appliquant directement la méthode qui nous a servi à démontrer cette formule.