BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

R. LIPSCHITZ

Extrait de six mémoires publiés dans le journal de mathématiques de Borchardt

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 4 (1873), p. 97-110
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1873__4__97_0>

EXTRAIT
DE SIX MÉMOIRES PUBLIÉS DANS LE JOURNAL DE MATHÉMATIQUES DE BORCHARDT;

PAR M. R. LIPSCHITZ.

(Analyse rédigée par l'Auteur.)

I.

Recherches sur les fonctions entières et homogènes de n différentielles (1).

Si l'on détermine le lieu d'un point dans l'espace par les coordonnées rectangulaires x_1, x_2, x_3, le carré de la distance du point (x_1, x_2, x_3) au point $(x_1+dx_1, x_2+dx_2, x_3+dx_3)$, ou le carré de l'élément linéaire dans l'espace, partant du point (x_1, x_2, x_3), sera mesuré, en vertu des principes de la Géométrie *euclidienne*, par la somme des trois carrés

$$dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2. \tag{1}$$

Considérons maintenant les trois variables x_1, x_2, x_3 comme des fonctions indépendantes quelconques de trois nouvelles variables y_1, y_2, y_3. Alors l'expression (1) se transformera dans la fonction entière et homogène du second degré des différentielles dy_1, dy_2, dy_3,

$$\left\{\begin{array}{l} e_{1,1}\,dy_1^2+e_{2,2}\,dy_2^2+e_{3,3}\,dy_3^2+2e_{2,3}\,dy_2\,dy_3 \\ \qquad +2e_{3,1}\,dy_3\,dy_1+2e_{1,2}\,dy_1\,dy_2, \end{array}\right. \tag{2}$$

dont les coefficients dépendent des variables y_1, y_2, y_3. Les équations

$$y_1=\text{const.},\quad y_2=\text{const.},\quad y_3=\text{const.}$$

représentent trois familles de surfaces; le carré de l'élément li-

---

(1) *Journal de Borchardt*, t. 70, p. 71-102. Analyse dans les *Comptes rendus de l'Académie de Berlin* pour 1869, janvier, p. 44-53.

néaire, pour une surface individuelle d'une de ces familles, de la première, par exemple, se déduit de l'expression (2) en y posant $y_1 =$ const., et $dy_1 = 0$, et prend la forme

$$e_{2,2}\,dy_2^2 + 2e_{2,3}\,dy_2\,dy_3 + e_{3,3}\,dy_3^2. \tag{2*}$$

A une telle expression du carré de l'élément linéaire pour une surface se rattachent les recherches de Gauss, dans lesquelles la surface est considérée, non comme la limite d'un corps, mais comme un corps dont une dimension devient nulle, et qui est en même temps flexible, mais inextensible. Ces recherches, présentées par l'auteur sous le titre de *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, en 1827, à la Société royale des Sciences de Gœttingue, et annoncées dans le 177e numéro des *Göttingische gelehrte Anzeigen* pour la même année, contiennent les premiers germes des travaux dont nous allons exposer ici les résultats.

Les travaux actuels sont relatifs à des fonctions formées au moyen d'un nombre donné de quantités indépendantes les unes des autres et de leurs différentielles premières, lesquelles sont rationnelles, entières et homogènes par rapport aux différentielles, et de forme quelconque par rapport aux variables elles-mêmes, pourvu qu'elles soient différentiables. En représentant par $a, b, c, \ldots$ la suite des nombres depuis 1 jusqu'à n, désignons par x_a le système des n variables, et par $f(dx)$ une fonction de l'espèce indiquée, dont le degré, par rapport aux différentielles, soit exprimé par le nombre p. *Nous considérerons la fonction $f(dx)$ comme une forme algébrique du $p^{\text{ième}}$ degré des n différentielles dx_a, dont les coefficients dépendront des variables x_a.* Si les variables x_a sont des fonctions indépendantes quelconques de n nouvelles variables y_k, et que l'on pose

$$\frac{\partial x_a}{\partial y_k} = c_{a,k}, \tag{3}$$

on aura, entre les différentielles dx_a et dy_k, les équations linéaires

$$dx_a = c_{a,1}\,dy_1 + c_{a,2}\,dy_2 + \ldots + c_{a,n}\,dy_n, \tag{4}$$

et le déterminant fonctionnel

$$C = \Sigma \pm c_{1,1}\,c_{2,2} \ldots c_{n,n} = |\,c_{a,b}\,|$$

ne devra pas s'annuler. De la substitution des variables y_k dans la forme $f(dx)$ résulte une équation

$$(5) \qquad f(dx) = g(dy),$$

où $g(dy)$ désigne une forme du $p^{\text{ième}}$ degré des différentielles dy_k. Nous supposerons constamment que, pour $p \gtreqless 2$, le déterminant appartenant à la formule $f(dx)$,

$$(6) \qquad \Delta = \sum \pm \frac{\partial^2 f(dx)}{\partial dx_1 \partial dx_1} \cdots \frac{\partial^2 f(dx)}{\partial dx_n \partial dx_n} = \left| \frac{\partial^2 f(dx)}{\partial dx_a \partial dx_b} \right|$$

ne s'évanouit pas identiquement; alors le déterminant correspondant à la forme $g(dy)$,

$$(7) \qquad \mathrm{E} = \sum \pm \frac{\partial^2 g(dy)}{\partial dy_1 \partial dx_1} \cdots \frac{\partial_2 g(dy)}{\partial dy_n \partial dy_n} = \left| \frac{\partial^2 g(dy)}{\partial dy_k \partial dy_l} \right|,$$

en vertu de l'égalité $\mathrm{E} = \Delta \mathrm{C}^2$, remplira pareillement la condition.

Étant données deux formes du $p^{\text{ième}}$ degré et de n différentielles, $f(dx)$ et $g(dy)$, on les considérera comme appartenant à la même classe ou à des classes différentes, suivant que l'une des formes pourra ou non se transformer dans l'autre de la manière indiquée, et l'on étendra en conséquence les autres principes fondamentaux, développés dans la théorie de la transformation des fonctions entières et homogènes au moyen des substitutions linéaires.

D'après cette définition, les expressions ci-dessus (1) et (2) sont des formes quadratiques de trois différentielles, et appartiennent à la même classe. De plus, l'expression (2*) est une forme quadratique des deux différentielles dy_2, dy_3. Si l'on imagine que la surface $y_1 = \text{const.}$, pour laquelle cette expression représente le carré de l'élément linéaire, puisse être développée sur une seconde surface, rapportée aux variables indépendantes w_2, w_3, les variables y_2, y_3 seront des fonctions, indépendantes entre elles, des variables w_2, w_3, et le carré de l'élément linéaire pour la seconde surface appartiendra à la même classe que l'expression (2*). Gauss s'est occupé en passant de cette relation, à l'occasion de la *solution générale du problème de représenter les parties d'une surface donnée,* *sur une autre surface, de manière que la représentation soit semblable à la surface représentée dans ses moindres parties,* art. 4 [1], puis l'a développée complétement dans les *Disquisitiones generales circa superficies curvas,* déjà citées, art. 12 et 13. Dans ce dernier endroit, Gauss fait remarquer que *la théorie des lignes les plus courtes sur une surface donnée appartient à la théorie des propriétés de la surface qui sont indépendantes d'une déformation de cette surface.* Si, pour la surface $y_1 = \text{const.}$, l'expression (2*) du carré de l'élément linéaire est donnée, la ligne la plus courte sur la surface est alors déterminée par la condition que la première variation de l'intégrale

$$\int \sqrt{e_{2,2}\, dy_2^2 + 2e_{2,3}\, dy_2 dy_3 + e_{3,3}\, dy_3^2}$$

s'annule, tandis que le système initial $(y_2^{(0)}, y_3^{(0)})$ et le système final (y_2, y_3) de l'intégrale demeurent invariables. La détermination de cette *variété* du premier ordre pour les variables y_2, y_3 ne contient aucun élément qui ne soit tiré de la forme quadratique (2*), et c'est là-dessus que repose la proposition énoncée par Gauss.

Une autre définition de la même *variété* du premier ordre est donnée par cette proposition de Mécanique analytique, qu'*un point matériel, qui n'a aucune force motrice, et qui est contraint de se mouvoir sur une surface donnée, décrit sur cette surface une ligne de moindre longueur.* Si la surface est désignée comme ci-dessus, le lieu (y_2, y_3) du point matériel mobile au bout du temps t est déterminé, en vertu du principe établi par Hamilton, dans son Mémoire *On a general Method in Dynamics* [2], par la condition que la première variation de l'intégrale

$$\int \frac{1}{2}\left[e_{2,2}\left(\frac{dy_2}{dt}\right)^2 + 2e_{2,3}\frac{dy_2}{dt}\frac{dy_3}{dt} + e_{3,3}\left(\frac{dy_3}{dt}\right)^2\right] dt$$

s'évanouisse, la position du point matériel à l'époque initiale et à l'époque finale de l'intégration restant invariable.

---

(1) *Astronomische Abhandlungen von* SCHUMACHER, Heft 3.

(2) *Philosoph. Transact. of the R. Soc. of London,* 1834, Part II, p. 247; 1835, Part I, p. 95.

Ces deux problèmes de calcul des variations peuvent être étendus au cas où l'on suppose que, à la place de la forme quadratique de deux différentielles, on a pris une forme quelconque $f(dx)$, du $p^{\text{ième}}$ degré (p étant $\gtreqless 2$), des n différentielles dx_n. Alors l'un des problèmes consiste à rendre $n-1$ des variables x_a dépendantes de l'une quelconque d'entre elles x, de telle manière que la première variation de l'intégrale

$$(8) \qquad R = \int \sqrt[p]{f(dx)}$$

s'évanouisse, tandis que les systèmes des valeurs $x_a^{(0)}$ et x_a, correspondant respectivement au commencement et à la fin de l'intégration, restent invariables. Le second problème consiste, au contraire, à rendre les n variables x_a dépendantes d'une variable indépendante t, de telle manière que la première variation de l'intégrale

$$(9) \qquad \Theta = \int_{t_0}^{t} f\left(\frac{dx}{dt}\right) dt$$

soit égale à zéro, tandis que les systèmes des valeurs $x_a^{(0)}$ et x_a, correspondant respectivement à la valeur initiale t_0 et à la valeur finale t de la variable t, restent invariables. L'expression trouvée par Lagrange pour la variation complète de la forme $f(x')$, où l'on a posé $\frac{dx_a}{dt} = x'_a$,

$$(10) \qquad \delta f(x') = \sum_a \left[\frac{\partial f(x')}{\partial x_a} - \frac{d\frac{\partial f(x')}{\partial x'_a}}{dt} \right] \delta x'_a + \frac{d\sum_a \frac{\partial f(x')}{\partial x'_a}}{dt} \delta x_a,$$

donne *le système d'équations différentielles qui convient au second problème,*

$$(11) \qquad \frac{d\frac{\partial f(x')}{\partial x'_a}}{dt} - \frac{\partial f(x')}{\partial x_a} = 0.$$

En conséquence de l'hypothèse établie ci-dessus, que le déterminant

$\Delta = \left| \dfrac{\partial^2 f(dx)}{\partial dx_a \partial dx_b} \right|$ ne doit pas s'évanouir identiquement, ce système d'équations différentielles permet d'exprimer les n dérivées les plus élevées $\dfrac{d^2 x_a}{dt^2}$ en fonction des quantités x_b et $\dfrac{dx_b}{dt}$. D'après les principes exposés dans le Mémoire intitulé : *Erörterung der Möglichkeit, ein gegebenes System gewöhnlicher Differentialgleichungen vollständig zu integriren* (Bonn, 1868), et publié en italien dans les *Annali di Matematica* (serie IIª, t. II, fasc. IV, p. 288-302), le système (11) peut donc, sous les conditions de continuité déterminées dans le Mémoire cité, s'intégrer complétement, et cela *d'une seule manière,* de telle façon que les variables x_a et leurs dérivées x'_a prennent, pour $t = t_0$, les valeurs assignées d'avance

$$(12) \qquad x_a = x_a^{(0)}, \quad x'_a = x'^{(0)}_a.$$

On a généralement, pour une des intégrales,

$$(13) \qquad f(x') = f_0[x'^{(0)}],$$

$f_0[x'^{(0)}]$ étant le résultat de la substitution des valeurs (12) dans $f(x')$.

Du système (11) on peut déduire $n - 1$ équations différentielles ne contenant plus la différentielle dt, et qui coïncident avec les $n - 1$ équations différentielles correspondant *au problème de la variation de l'intégrale* (8). Supposons ces $n - 1$ équations différentielles intégrées de manière que, pour $x_{c_1} = x_{c_1}^{(0)}$, on ait les équations

$$(14) \qquad x_a = x_a^{(0)}, \quad \frac{dx_a}{dx_{c_1}} = \frac{x'^{(0)}_a}{x'^{(0)}_{c_1}}.$$

Alors de l'intégrale (13) résulte l'équation

$$(15) \qquad \mathrm{R} = \int_{x_{c_1}^{(0)}}^{x_{c_1}} \sqrt[p]{pf\left(\frac{dx}{dx_{c_1}}\right)}\, dx_{c_1} = \sqrt[p]{pf_0[x'^{(0)}]}\,(t - t_0),$$

qui exprime les dépendances entre la variable x_{c_1} et la variable t; et cette équation fait voir que, dans chacune des valeurs d'intégration x_a, la variable t n'entre que par les n combinaisons $(t - t_0)\, x'^{(0)}_b$.

Les valeurs d'intégration x_a ne sont donc fonctions que des n quantités $x_b^{(0)}$ et des n quantités $(t-t_0)x_b'^{(0)}$.

Tandis que la variable indépendante t passe de la valeur t_0 à la valeur t, le système des valeurs d'intégration x_a, en passant progressivement du système de valeurs $x_a^{(0)}$ au système de valeurs x_a, parcourt *une variété du 1^er^ ordre, qui ne dépend que de la nature de la forme $f(dx)$*. Par la transformation de la forme $f(dx)$ dans la forme $g(dy)$, dont le résultat est représenté par l'équation (5), les intégrales (8) et (9) et le système d'équations différentielles (11) se changent dans les algorithmes correspondants relatifs à la forme $g(dy)$. Admettons maintenant que, pour $t=t_0$, les systèmes $x_a^{(0)}$ et $y_k^{(0)}$, $x_a'^{(0)}$ et $y_k'^{(0)}$ se correspondent respectivement. *Alors, de l'équation* (4) *résulte, entre les quantités $x_a'^{(0)}$ et $y_k'^{(0)}$, le système d'équations linéaires*

$$(16)\qquad x_a'^{(0)} = c_{a,1}^{(0)}y_1'^{(0)} + c_{a,2}^{(0)}y_2'^{(0)} + \dots + c_{a,n}^{(0)}y_n'^{(0)},$$

la substitution des valeurs $x_a^{(0)}$ à la place des x_a dans une fonction des x_a, et la substitution des valeurs $y_k^{(0)}$ à la place des y_k dans une fonction des y_k étant indiquées par l'adjonction du signe $^{(0)}$. On a aussi l'équation

$$(17)\qquad f_0[x'^{(0)}] = g_0[y'^{(0)}].$$

Ici les valeurs d'intégration x_a et les valeurs d'intégration y_k définissent la même *variété* du 1^er^ ordre.

En considérant maintenant, dans la représentation des valeurs d'intégration x_a au moyen des n quantités $(t-t_0)x_b'^{(0)}$, les premières de ces quantités comme invariables, les secondes comme variables, les quantités x_a se présenteront comme fonctions du système de nouvelles variables

$$(18)\qquad (t-t_0)x_b'^{(0)} = u_b,$$

que l'on peut appeler *variables normales*. Si l'on procède de même pour la forme $g(dy)$, qui appartient à la même classe que $f(dx)$, les valeurs d'intégration y_k dépendront des n quantités $y_k^{(0)}$ et des n quantités $(t-t_0)y_k'^{(0)}$; la constance des $x_a^{(0)}$ entraînant comme conséquence la constance des $y_k^{(0)}$, les quantités y_k deviendront des fonctions des nouvelles variables

(19) $$(t - t_0) y_l'^{(0)} = z_l,$$

et les variables u_b seront, en vertu de (16), liées aux variables z_l par les équations

(16*) $$u_a = c_{a,1}^{(0)} z_1 + \ldots + c_{a,n}^{(0)} z_n.$$

Les variables normales u_a sont donc des fonctions linéaires des variables normales z_k. On peut ici placer cette remarque, qui trouvera son application dans le Mémoire III, que les variables normales u_b, par la combinaison des équations (15) et (18), admettent aussi pour définition la formule

(18*) $$u_b = \frac{R}{\{pf_0[x'^{(0)}]\}^{\frac{1}{p}}} x_b'^{(0)}.$$

Transformons la forme $f(dx)$ par l'introduction du système des *variables normales* u_b, de sorte qu'il en résulte l'équation

(20) $$f(dx) = \varphi(du);$$

alors $\varphi(du)$ sera un *type normal de la forme* $f(dx)$. Si, pour une forme $g(dy)$ appartenant à la même classe que $f(dx)$, on forme le système correspondant de variables normales z_l, défini par (19), et que l'on établisse le type normal $\chi(dz)$, on aura l'équation

(21) $$\varphi(du) = \chi(dz),$$

tandis que les variables u_a sont, en vertu de (16*), des fonctions linéaires homogènes des variables z_k. *L'espèce de la dépendance entre $\varphi(du)$ et $\chi(dz)$ est donc d'un autre degré que l'espèce de la dépendance entre $f(dx)$ et $g(dy)$. A cause de cela, la conception du type normal fournit un moyen pour l'étude des propriétés d'une classe de formes.*

Par la substitution (16*), l'expression finie $f_0(u)$, relative à la forme $f(dx)$, et la forme à coefficients constants $f_0(du)$, relative à la même forme $f(dx)$, se transformeront aussi dans les algorithmes correspondants, relatifs à la forme $g(dy)$, de sorte qu'on aura les équations

$$(22)\qquad f_0(u) = g_0(z),$$

$$(23)\qquad f_0(du) = g_0(dz).$$

En même temps, l'intégrale R, définie par (8), prendra la valeur

$$(8^*)\qquad \mathrm{R} = \sqrt[p]{pf_0(u)} = \sqrt[p]{pg_0(z)}.$$

Par la combinaison des équations (21) et (23), on obtient encore la relation remarquable

$$(23^*)\qquad \varphi(du) - f_0(du) = \chi(dz) - g_0(dz).$$

Parmi les formes de n différentielles, celles *dont les coefficients sont constants* occupent une place à part, et il est à souhaiter de pouvoir reconnaître si une forme donnée $f(dx)$ est transformable ou non en une forme à coefficients constants. Quand le degré p est $\geqq 2$, cette question peut être décidée par la considération du type normal de la forme $f(dx)$. Supposons que la forme $f(dx)$ puisse être transformée dans la forme $g(dy)$, dont les coefficients soient constants. Alors le système d'équations différentielles relatif à la forme $g(dy)$, et qui se tire de (11), est intégré complétement de la manière indiquée plus haut, au moyen des équations

$$(24)\qquad y_k = y_k^{(0)} + (t - t_0)y_k'^{(0)},$$

et, en conséquence, les variables y_k sont liées aux *variables normales* z_k, définies dans les formules (19), par les équations

$$(24^*)\qquad y_k = y_k^{(0)} + z_k.$$

On a, d'après cela, pour notre forme $g(dy)$, l'équation

$$(25)\qquad \chi(dz) = g_0(dz).$$

Or celle-ci entraîne avec elle, en vertu de (23*), l'équation

$$(26)\qquad \varphi(du) = f_0(du),$$

et ainsi se trouve établi le critérium suivant : *Une forme $f(dx)$, d'un degré égal ou supérieur au second, peut ou ne peut pas* *être transformée en une forme à coefficients constants, suivant que le type normal de cette forme est ou n'est pas une forme à coefficients constants.*

C'est ici le lieu de rappeler que *la théorie des formes du* $p^{\text{ième}}$ *degré de n différentielles est en relation très-étroite avec les recherches sur la nature de l'espace,* que Gauss a, le premier, inaugurées ([1]), et que, plus tard, Riemann, dans son Mémoire posthume : *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* ([2]), a reprises avec une grande généralité. Ces recherches partent de ce que la position d'un point dans l'espace est déterminable par la mesure de trois quantités x_1, x_2, x_3, et qu'à un changement continu de cette position correspond une variation continue de ces trois quantités. La mesure de la distance entre le point (x_1, x_2, x_3) et un point voisin $(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$ *n'est pas nécessairement* alors la racine carrée de la somme des carrés de trois différentielles exactes. La mesure de cette distance, ou l'élément linéaire dans l'espace, peut, au contraire, être supposée égale à la racine carrée d'une forme quadratique quelconque essentiellement positive, ou, plus généralement, à la racine $p^{\text{ième}}$ d'une forme quelconque essentiellement positive, du $p^{\text{ième}}$ degré, des différentielles dx_1, dx_2, dx_3. L'établissement de la possibilité d'une telle théorie de l'espace fait voir en même temps la raison pour laquelle tous les efforts pour fonder l'axiome XI d'Euclide sans hypothèse préalable ont dû échouer. *Si, au lieu des trois variables* x_1, x_2, x_3, *on considère les n variables* x_a, *et que l'on prenne l'expression*

$$\sqrt[p]{pf(dx)}$$

pour l'élément linéaire de cette variété du $n^{\text{ième}}$ *ordre, alors l'intégrale* R, *définie par* (8), *mesurera la longueur d'une ligne d'étendue finie, et le problème de calcul de variations, posé pour l'intégrale* R, *donne à cette longueur une valeur minimum.* Lorsque la forme $f(dx)$ est transformable en une forme $g(dy)$ à coefficients constants, la nature de la *ligne* ou VARIÉTÉ *du premier ordre* correspondante est exprimée par les équations (24). Si l'on

---

([1]) Voir ses Lettres à Schumacher du 17 mai et du 12 juillet 1831.

([2]) *Abhandlungen der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, Bd. XIII.

a, en outre, $p = 2$, la forme $2g(dy)$, dont les coefficients sont constants, et qui est supposée essentiellement positive, est toujours égale à la somme des carrés de n différentielles; l'expression du carré de l'élément linéaire coïncide avec celle qui découle des principes de la Géométrie *euclidienne;* les *lignes de longueur minimum,* représentées par les équations (24), se changent dans les *lignes droites* de la Géométrie *euclidienne,* et l'équation (8*) devient le *théorème de Pythagore.*

Le critérium que nous avons indiqué pour savoir si une forme $f(dx)$, dans le cas de $p \gtreqless 2$, est transformable en une forme à coefficients constants, suppose l'intégration complète du système d'équations différentielles (11). *Une forme du premier degré*

$$f(dx) = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \ldots + a_n dx_n$$

possède cette propriété dans le cas, et seulement dans ce cas, où elle est égale à *une différentielle exacte.* Or les *conditions* connues d'*intégrabilité* peuvent être résumées en disant que *la forme, bilinéaire par rapport aux deux systèmes* dx_a *et* δx_b,

$$(27) \qquad \delta f(dx) - df(\delta x) = \sum_{a,b} \left(\frac{\partial a_a}{\partial x_b} - \frac{\partial a_b}{\partial x_a} \right) dx_a \delta x_b,$$

qui est un covariant de la forme $f(dx)$, *doit s'évanouir identiquement.* Pour les formes du second degré de n différentielles, on peut pareillement établir un critérium qui conduit au but, sans l'intégration préalable d'un système d'équations différentielles.

Dans le Mémoire cité plus haut, Gauss a démontré que, si, par un point d'une surface donnée, on mène des sections normales, et que l'on détermine leurs rayons de courbure, *le produit des valeurs réciproques du plus grand et du plus petit rayon de courbure reste invariable dans une déformation de la surface.* Cette quantité, que Gauss appelle la *mesure de la courbure de la surface* au point donné, est d'une haute importance. Si le carré de l'élément linéaire pour la surface est représenté par la forme quadratique (2*) des deux différentielles dy_2, dy_3, l'expression de la mesure de courbure, donnée par Gauss, art. II, est un *invariant* de la forme (2*). *Cet invariant s'évanouit, toutes les fois que la forme correspondante peut être transformée dans la forme à* *coefficients constants*

$$dw_2^2 + dw_3^2,$$

ou encore toutes les fois que la surface donnée est développable sur un plan.

Dans le cas d'une forme quadratique $f(dx)$ de plus de deux différentielles, pour trouver des combinaisons *covariantes* à cette surface dans une transformation quelconque de la forme $f(dx)$ en une forme $g(dy)$, on peut partir des considérations que Lagrange a exposées dans la *Mécanique analytique* (seconde Partie, section IV), touchant la transformation des expressions différentielles. Ces considérations donnent, pour la forme $f(dx)$, l'équation

$$(28)\quad \sum_a \left[d\frac{\partial f(dx)}{\partial dx_a} - \frac{\partial f(dx)}{\partial x_a}\right]\delta x_a = \sum_k \left[d\frac{\partial g(dy)}{\partial dy_k} - \frac{\partial g(dy)}{\partial y_k}\right]\delta y_k,$$

dont le premier membre, divisé par dt^2 et égalé à zéro, fournit le système d'équations différentielles (11). Représentons maintenant la forme quadratique $f(dx)$ comme il suit,

$$(29)\qquad f(dx) = \frac{1}{2}\sum_{a,b} a_{a,b}\, dx_a\, dx_b,$$

de manière que, d'après (6), le déterminant soit

$$\Delta = \sum \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{n,n} = |\, a_{a,b}\,|;$$

et faisons, de plus,

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a_{a,b}} = \mathrm{A}_{a,b}.$$

Donnons au multiplicateur de δx_a dans le premier membre de (28) la forme

$$\sum_b a_{a,b}\, dx_b^2 f_a(dx),$$

$f_a(dx)$ désignant la forme quadratique suivante des différentielles dx_g,

$$(30)\quad \begin{cases} f_a(dx) = \frac{1}{2}\sum_{g,h} f_{a,g,h}\, dx_g\, dx_h, \\ f_{a,g,h} = \frac{\partial a_{a,g}}{\partial x_h} + \frac{\partial a_{a,h}}{\partial x_g} - \frac{\partial a_{g,h}}{\partial x_a}. \end{cases}$$

Alors *la forme quadrilinéaire,* par rapport aux quatre systèmes de variations indépendantes

$$d^1 x_a,\quad \delta^1 x_b,\quad dx_g,\quad \delta x_h$$

des variables x_a,

$$(31)\quad \begin{cases} \Psi(d^1 x, \delta^1 x, dx, \delta x) \\ \quad = \sum_{a,b} \Big\{ \delta \frac{\partial f_a(dx)}{\partial\, dx_b} - d\, \frac{\partial f_a(\delta x)}{\partial\, \delta x_b} \\ \qquad + \frac{1}{2}\sum_{c,d} \frac{A_{c,d}}{\Delta}\left[\frac{\partial f_c(dx)}{\partial\, dx_a}\frac{\partial f_d(\delta x)}{\partial\, \delta x_b} - \frac{\partial f_c(\delta x)}{\partial\, \delta x_a}\frac{\partial f_d(dx)}{\partial\, dx_b}\right]\Big\} d^1 x_a \delta^1 x_b, \end{cases}$$

est un covariant de la forme $f(dx)$. Cette forme, que M. Christoffel, dans son Mémoire : *Ueber die Transformation der homogenen Differenzialausdrücke zweiten Grades* (*Journal de Borchardt*, t. 70, p. 46-70), a désignée (p. 58) par G_4, est une *forme bilinéaire* de deux systèmes de $\frac{n(n-1)}{2}$ combinaisons

$$d^1 x_a \delta^1 x_b - \delta^1 x_a d^1 x_b, \quad \text{et} \quad dx_g \delta x_h - \delta x_g dx_h.$$

Cette forme, comme nous le montre sa représentation, doit s'évanouir identiquement, toutes les fois que la forme $f(dx)$ peut être transformée en une forme à coefficients constants.

Lorsque la forme de deux différentielles

$$(29^*)\qquad 2f(dx) = a_{1,1}\, dx_1^2 + 2\, a_{1,2}\, dx_1\, dx_2 + a_{2,2}\, dx_2^2$$

désigne le carré de l'élément linéaire pour une surface rapportée aux variables x_1 et x_2, alors, entre la *mesure de courbure de Gauss k* au point (x_1, x_2) de la surface et la forme correspondante $\Psi(d^1 x, \delta^1 x, dx, \delta x)$, on a l'équation

$$(32)\quad \tfrac{1}{2}\Psi(d^1 x, \delta^1 x, dx, \delta x) = -k(d^1 x_1 \delta^1 x_2 - \delta^1 x_1 d^1 x_2)(dx_1 \delta x_2 - \delta x_1 dx_2).$$

Comme les systèmes des valeurs x_1, x_2 composent *une* VARIÉTÉ *du second ordre,* on peut s'exprimer en disant que, *lorsque la forme* *quadrilinéaire* $\Psi(d^1 x, \delta^1 x, dx, \delta x)$, *correspondant à une forme* $f(dx)$, *s'évanouit identiquement, la forme* $f(dx)$ *est transformable en une forme à coefficients constants.* La démonstration de cette proposition, qui n'a pas encore été donnée, même pour $n = 2$, s'obtient par la considération du système de n équations différentielles

$$\sum_b a_{a,b} \frac{d\zeta_b}{dt} + \frac{1}{2} \sum_b \frac{\partial f_a(x')}{\partial x'_b} \zeta_b = 0, \tag{33}$$

où les valeurs de x_c et de x'_c sont tirées de l'intégration complète du système (11) indiquée ci-dessus. Dès que la forme

$$\Psi(d^1 x, \delta^1 x, dx, \delta x)$$

est identiquement nulle, les n systèmes d'expressions

$$\zeta_b = \frac{\partial x_b}{(t - t_0)\partial x_l'^{(0)}} = \frac{\partial x_b}{\partial u_l} \tag{34}$$

devront satisfaire au système d'équations différentielles (33), et par suite l'intégrer complétement. De ce fait on déduit alors l'équation ci-dessus (26), qui équivaut à la proposition énoncée. *L'évanouissement identique de la forme quadrilinéaire*

$$\Psi(d^1 x, \delta^1 x, dx, \delta x),$$

relative à une forme $f(dx)$, *est donc la condition nécessaire et suffisante pour que la forme* $f(dx)$ *puisse être transformée en une forme à coefficients constants.* Avec ce théorème nous possédons un critérium qui, comme nous l'avons annoncé plus haut, ne suppose pas l'intégration préalable d'un système d'équations différentielles, et qui peut être appliqué directement dans un cas donné quelconque.

(*A suivre.*)