BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

R. LIPSCHITZ

Extrait de six mémoires publiés dans le journal de mathématiques de Borchardt

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 4 (1873), p. 297-320

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1873__4__297_1>

© Gauthier-Villars, 1873, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

EXTRAIT
DE SIX MÉMOIRES PUBLIÉS DANS LE JOURNAL DE MATHÉMATIQUES DE BORCHARDT;

PAR M. R. LIPSCHITZ.

(Analyse rédigée par l'Auteur.)

IV.

Développement de quelques propriétés des formes quadratiques de n différentielles.

Premier Article [1].

Un des buts principaux des recherches que nous analysons ici successivement était l'étude plus approfondie de la *mesure de courbure* de Gauss. Outre les voies suivies jusqu'à présent et conduisant à ce but, on peut encore choisir celle qui consiste à présenter, sous un point de vue plus général, *toutes les conceptions fondamentales relatives à la courbure d'une surface*, et à en tirer ensuite *la conception de la mesure de courbure*. A cet effet, il s'agit de trouver une définition du *rayon de courbure* qui se prête sans contrainte à une extension naturelle. Or des principes admis de la Mécanique usuelle résulte ce théorème que, *lorsqu'un point matériel, qui n'est soumis à l'action d'aucune force accélératrice, doit se mouvoir sur une surface déterminée, la pression exercée en chaque point de la trajectoire est inversement proportionnelle au rayon de courbure de cette trajectoire*. On peut définir, d'après cela, *la valeur réciproque du rayon de courbure* comme une quantité qui

[1] *Journal de Borchardt*, t. 71, p. 274-287.

est directement proportionnelle *à la pression résultante dans ce mouvement*. Si, de plus, un système d'un nombre quelconque de points matériels se meut en vertu des mêmes lois de la Mécanique, sans être soumis à l'action d'aucune force accélératrice, mais qu'entre les coordonnées des points de ce système il existe, indépendamment du temps, un certain nombre d'équations de condition, alors, pour tout déplacement virtuel du système de points matériels, compatible avec les équations de condition, *la somme des moments de toutes les pressions* a une valeur déterminée, qui, *pour un point matériel assujetti à rester sur une surface*, se réduit *au moment de la seule pression correspondante*. Soient, comme dans III, x_a les coordonnées des divers points matériels du système mobile; supposons que la forme $2f\left(\frac{dx}{dt}\right)$, représentée explicitement dans (29), I, désigne la somme des forces vives de tous les points matériels, et que l'on ait, en outre, l fonctions indépendantes quelconques y_α des variables x_a, la lettre α, ainsi que, dans la suite, les lettres $\beta, \gamma, \ldots$, parcourant la série des nombres $1, 2, \ldots, l$, et l étant $< n$; admettons enfin que l'on ait, entre les coordonnées x_a, le système de l équations

$$y_\alpha = \text{const.} \tag{1}$$

Par l'introduction de l multiplicateurs indéterminés λ_α, on peut maintenant formuler le problème de Mécanique dont il s'agit, en demandant que la première variation de l'intégrale

$$\int_t^t [f(x') + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots + \lambda_n y_n]\, dt \tag{2}$$

s'annule, les valeurs initiales $x_a^{(0)}$ et les valeurs finales x_a de l'intégration restant invariables. D'après cela, l'équation

$$\sum_a \left(\frac{d\dfrac{\partial f(x')}{\partial x'_a}}{dt} - \frac{\partial f(x')}{\partial x_a} \right) \delta x_a - \sum_\alpha \lambda_\alpha \delta y_\alpha = 0 \tag{3}$$

devra être satisfaite, indépendamment des valeurs des variations. Mais l'expression

$$\sum_\alpha \lambda_\alpha \delta y_\alpha \tag{4}$$

représente *la somme des moments de toutes les pressions, relative à un déplacement virtuel du système de points matériels, correspondant aux valeurs* δy_α, somme dont il était question tout à l'heure. Comme la définition de cette notion repose sur les principes admis de la Mécanique usuelle, personne ne mettra en doute que, si l'on commence par transformer la forme quadratique $f(dx)$ par l'introduction d'un système quelconque de nouvelles variables à la place des variables x_a, et si ensuite le système des l fonctions y_α est remplacé par un nouveau système de l fonctions, indépendantes entre elles, de ces fonctions, l'expression (4) ne doive se changer dans l'expression qui serait formée de la même manière au moyen des nouveaux éléments correspondants. Mais les raisons analytiques de ce fait conservent leur force pour toute forme quadratique essentiellement positive $f(dx)$, dans laquelle le déterminant Δ ne s'évanouit pas. Nous allons, en conséquence, aux considérations que nous venons d'exposer, en substituer d'autres plus générales, dont les principes sont expliqués dans III, et où la mesure de la force vive d'un point matériel en mouvement revient à une expression plus générale du carré de l'élément linéaire dans l'espace. C'est pourquoi nous n'imposerons à la forme $f(dx)$, qui entre dans l'intégrale (2), aucune autre condition que celles que nous venons d'indiquer, savoir : qu'elle soit essentiellement positive, et que le déterminant correspondant Δ ne s'annule pas.

Des équations (1) on tire successivement les deux systèmes d'équations

$$(5) \qquad \frac{dy_\alpha}{dt} = 0, \quad \frac{d^2 y_\alpha}{dt^2} = 0.$$

En combinant le dernier de ces deux systèmes avec le système de n équations différentielles contenu dans (3), on pourra exprimer les n quantités $\frac{d^2 x_a}{dt^2}$ et les l quantités λ_α en fonctions homogènes du second degré des quotients différentiels x'_b, et par la substitution de ces valeurs des λ_α l'expression (4) se change également en une forme quadratique des x'_b. Le système d'équations différentielles contenu dans (3) entraîne, de plus, comme conséquence, l'intégrale

$$(6) \qquad f(x') = \text{const.},$$

où la constante, à cause de la nature essentiellement positive de la forme $f(dx)$, doit être une grandeur essentiellement positive. Dans l'expression (4), qui est linéaire par rapport aux variations δy_α, considérons ces dernières comme arbitraires, mais constantes, et les quotients différentiels x'_b comme variables, mais assujettis toutefois à satisfaire aux équations $\frac{dy_\alpha}{dt} = 0$ du système (5) et à l'équation (6); et posons le problème de *maxima* et *minima*, consistant à *déterminer les valeurs* x'_b *de manière que la première différentielle de l'expression* (4), *prise par rapport à ces quantités, s'évanouisse*. Comme l'expression (4), *lorsqu'on soumet à une transformation quelconque la forme* $f(dx)$, *et qu'on remplace le système des fonctions* y_α *par un système équivalent, a la propriété de se transformer en même temps*, et que la condition demandée ne peut détruire cette propriété, *la solution du problème de maxima et minima devra participer à cette propriété*. C'est sur l'étude de ce problème que roule le présent travail.

Les considérations développées jusqu'ici se rattachent bien au système d'équations différentielles obtenu dans (3), et font usage de l'intégrale (7) de ce système; mais elles n'exigent pas que l'on suppose connue une intégration complète du système. C'est pourquoi, dans le problème de maxima et minima, nous introduirons, au lieu des quotients différentiels $\frac{dx_b}{dt}$, les différentielles dx_b. En faisant cela dans les expressions λ_α, on devra remplacer les équations (3), (5), (6) par les équations

$$(7)\quad \begin{cases} \sum_a \left(d\frac{\partial f(dx)}{\partial dx_a} - \frac{\partial f(dx)}{\partial x_a}\right)\delta x_a - \sum_\alpha \lambda_\alpha \delta y_\alpha = 0, \\ dy_\alpha = 0, \quad d^2 y_\alpha = 0, \\ f(dx) = \text{const.} \end{cases}$$

Aux notations (29), I, et (30), I, ajoutons maintenant les nouvelles notations

$$(8)\qquad \sum_{a,b} \frac{A_{a,b}}{\Delta}\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_a}\frac{\partial y_\beta}{\partial x_b} = (\alpha, \beta),$$

$$(9)\qquad -\sum_{a,b} \frac{A_{a,b}}{\Delta} f_a(dx)\frac{\partial y_\beta}{\partial x_b} + \sum_{a,b} \frac{\partial^2 y_\beta}{\partial x_a \partial x_b} dx_a\, dx_b = \eta_\beta(dx).$$

Les quantités λ_α sont ensuite déterminées par les équations

$$(10) \qquad \sum_\alpha (\alpha, \beta)\lambda_\alpha + \eta_\beta\, dx = 0,$$

pour lesquelles le déterminant $|\alpha, \beta|$ ne peut pas s'annuler, et les expressions elles-mêmes sont données par les formules suivantes :

$$(11) \qquad \lambda_\alpha + \sum_\beta [\alpha, \beta]\eta_\beta\, dx = 0.$$

Ces expressions conduisent à une représentation explicite de la forme résultant de (4), *quadratique par rapport aux différentielles* dx_a, *linéaire par rapport aux variations* δy_α,

$$(12) \qquad \frac{1}{2}\sum_\alpha \lambda_\alpha \delta y_\alpha = \lambda(dx) = \frac{1}{2}\sum_{a,b} \lambda_{a,b}\, dx_a\, dx_b.$$

Le problème de maxima et minima proposé pour cette forme, en désignant par ω et par ϑ_α des facteurs indéterminés, est équivalent à la condition que les n dérivées de l'expression

$$(13) \qquad -\lambda(dx) + \omega f(dx) + \sum_\alpha \vartheta_\alpha\, dy_\alpha,$$

prises par rapport aux quantités dx_a, deviennent égales à zéro. De ces n équations et des l équations $dy_\alpha = 0$ du système (7) résulte un système de $n + l$ équations, homogènes et linéaires par rapport aux n quantités dx_a et aux l quantités ϑ_α, et pouvant être rangées de telle façon que les coefficients forment un tableau symétrique. Le déterminant de ce tableau $D(\omega)$ peut être mis sous la forme

$$(14) \qquad D(\omega) = D_0\omega^{n-l} + D_1\omega^{n-l-1} + \ldots + D_{n-l},$$

les coefficients $D_0, D_1, D_2, \ldots, D_{n-l}$ étant des fonctions homogènes des variations δy_α, des degrés respectifs $0, 1, 2, \ldots, n-l$, et le coefficient D_0 ne pouvant s'annuler. La quantité ω est déterminée par l'équation du $(n-l)^{\text{ieme}}$ degré

$$(15) \qquad D(\omega) = 0,$$

dont les racines sont toutes réelles. A chaque racine se rapporte une détermination des quantités dx_a, et à une telle détermination correspond chaque fois la relation

$$(16)\qquad \omega = \frac{\lambda(dx)}{f(dx)}.$$

Si ω_1 et ω_2 sont deux racines différentes de l'équation (15), et qu'à la première se rapporte le système des quantités $dx_a = d^{(1)}x_a$, à la seconde le système des quantités $dx_a = d^{(2)}x_a$, on a la relation

$$(17)\qquad \sum_a \frac{\partial f(d^{(1)}x)}{\partial d^{(1)}x_a} d^{(2)}x_a = 0,$$

laquelle, d'après la définition donnée dans III, signifie que les *variétés* du premier ordre $d^{(1)}x_a$ et $d^{(2)}x_a$ sont *normales entre elles ou orthogonales par rapport à la forme* $2f(dx)$.

De ce qui précède il résulte que les coefficients de l'équation (15), ou les coefficients de la fonction $\frac{D(\omega)}{D_0}$,

$$(18)\qquad \frac{D_1}{D_0},\quad \frac{D_2}{D_0},\quad \ldots,\quad \frac{D_{n-l}}{D_0},$$

ont la propriété d'être *covariants de la combinaison de la forme* $f(dx)$ *avec le système des fonctions* y_α *rendues constantes*. La même chose a lieu pour toute fonction rationnelle et entière de ces $n-1$ expressions. Nous sommes donc en état de former des combinaisons de quantités qui soient *invariantes par rapport à la forme* $f(dx)$ *et au système des fonctions* y_α *rendues constantes*.

Représentons par

$$(19)\qquad F(\delta y_1, \delta y_2, \ldots, r_1, r_2, \ldots)$$

une fonction entière et rationnelle des expressions (18), qui soit en même temps homogène et de l'*ordre pair* q par rapport aux quantités $\delta y_1, \delta y_2, \ldots, \delta y_l$, et dans laquelle les coefficients des puissances positives et des produits de puissances positives des δy_α soient désignés par $r_1, r_2, \ldots$.

Si, au lieu des l fonctions y_α, on introduit l fonctions $\bar{y}_\alpha$ des y_α, et que l'on ait les équations

$$(20)\qquad \overline{\delta y}_\alpha = k_{\alpha,1}\delta y_1 + k_{\alpha,2}\delta y_2 + \ldots + k_{\alpha,l}\delta y_l,$$

il en résultera, pour deux valeurs quelconques des nombres α_1, α_2, l'équation

$$(21)\qquad \overline{\delta y}_{\alpha_1}\,\overline{\delta y}_{\alpha_2} = \sum_{\beta_1,\beta_2} k_{\alpha_1,\beta_1} k_{\alpha_2,\beta_2}\, \delta y_{\beta_1}\, \delta y_{\beta_2}.$$

Mais les fonctions définies par (8) jouissent aussi de la propriété que, si (α_1, α_2) se change, par l'introduction des $\bar{y}_\alpha$, en $(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2)$, il vient l'équation formée de la même manière

$$(22)\qquad (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2) = \sum_{\beta_1,\beta_2} k_{\alpha_1,\beta_1} k_{\alpha_2,\beta_2} (\beta_1, \beta_2).$$

C'est là-dessus qu'est fondée la méthode suivante pour la formation des *combinaisons invariantes des quantités de l'espèce indiquée.*

Soit un terme quelconque de la fonction $F(\delta y_1, \delta y_2, \ldots, r_1, r_2, \ldots)$, *résultant de la multiplication de l'expression*

$$\delta y_{\alpha_1}\, \delta y_{\alpha_2} \ldots \delta y_{\alpha_q}$$

(*où, parmi les indices* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$, *il peut y en avoir un nombre quelconque qui soient égaux entre eux*) *par l'un des éléments* r_1, $r_2, \ldots$. *Écrivons toutes les* $q!$ *permutations des* q *indices les unes sous les autres, en partageant chaque permutation en groupes de deux indices chacun,*

$$\begin{array}{l} \alpha_1\, \alpha_2\;\; \alpha_3\, \alpha_4\, \ldots \alpha_{q-1}\, \alpha_q, \\ \alpha'_1\, \alpha'_2\;\; \alpha'_3\, \alpha'_4 \ldots \alpha'_{q-1}\, \alpha'_q, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{array}$$

formons, d'après chaque ligne, le produit des $\frac{1}{2}q$ *fonctions*

$$(\alpha_1, \alpha_2)(\alpha_3, \alpha_4) \ldots (\alpha_{q-1}, \alpha_q),$$

puis faisons la somme de tous ces produits. Si, dans chaque terme de la fonction $F(\delta y_1, \delta y_2, \ldots, r_1, r_2, \ldots)$, *on remplace le produit* $\delta y_{\alpha_1} \delta y_{\alpha_2} \ldots \delta y_{\alpha_q}$ *qu'il contient, par l'expression correspondante de la somme que nous venons de former, affectée du dénominateur* $q!$, *c'est-à-dire par*

$$\frac{1}{q!} \mathop{\mathrm{S}}_{\alpha} (\alpha_1, \alpha_2)(\alpha_3, \alpha_4) \ldots (\alpha_{q-1}, \alpha_q),$$

alors $F(\delta y_1, \delta y_2, \ldots, r_1, r_2, \ldots)$ *se changera en une combinaison invariante des quantités de l'espèce indiquée.*

Dans le cas où le nombre l est égal à l'unité, c'est-à-dire où il n'existe qu'*une seule* fonction y_1, la définition donnée pour la fonction $\lambda(dx)$ se simplifie comme il suit :

$$(23) \qquad 2\lambda(dx) = \lambda_1 \delta y_1 = -\frac{\eta_1(dx)}{(1,1)}\delta y_1.$$

La fonction *unique* $(1, 1)$ coïncide alors avec le *premier paramètre différentiel de la fonction* y_1, défini vers la fin du Mémoire III. L'équation (15) devient du $(n-1)^{\text{ième}}$ degré, et les coefficients D_0, D_1, $D_2, \ldots$ de la fonction $D(\omega)$ sont multipliés par les puissances de la quantité δy_1 d'exposants égaux à leurs indices. La méthode exposée pour la formation des *combinaisons invariantes des quantités de l'espèce indiquée* se trouve ainsi abrégée en même temps. Si, dans la fonction $2\lambda(dx)$ définie par (23), on remplace δy_1 par la quantité $\sqrt{(1,1)}$, ce qui donne

$$(24) \qquad 2\lambda(dx) = \lambda_1\sqrt{(1,1)} = -\frac{\eta_1(dx)}{\sqrt{(1,1)}};$$

si l'on introduit cette substitution dans le problème proposé de maxima et minima, et que l'on désigne, en les entourant de parenthèses, les fonctions ainsi transformées, alors tous les *invariants* donnés par notre méthode seront des fonctions rationnelles et entières *de certains invariants élémentaires,* savoir, *des expressions d'ordre pair*

$$(25) \qquad \left(\frac{D_2}{D_0}\right), \quad \left(\frac{D_4}{D_0}\right), \ldots,$$

et *des produits deux à deux ou bien des carrés des expressions d'ordre impair*

$$(26) \qquad \left(\frac{D_1}{D_0}\right), \quad \left(\frac{D_3}{D_0}\right), \ldots.$$

Si, à l'hypothèse $l = 1$, on joint encore l'hypothèse que $f(dx)$ soit égale à la forme spéciale

$$(27) \qquad f(dx) = \frac{1}{2}\sum_a dx_a^2,$$

alors l'expression

$$\frac{\lambda(dx)}{f(dx)} = \lambda_1 \frac{\sqrt{(1,1)}}{\sum_a dx_a^2} = - \frac{\eta_1(dx)}{\sqrt{(1,1)}\sum_a dx_a^2}$$

devient égale à la valeur réciproque, prise avec le signe —, de la quantité que M. Kronecker, dans son second Mémoire *Sur les systèmes de fonctions de plusieurs variables* (¹), a désignée par la lettre ρ. Si l'on substitue, dans l'équation (15), la relation $\omega = -\frac{1}{\rho}$, le problème de maxima et minima fournit les $n-1$ valeurs singulières de la quantité ρ dont il est parlé dans ce Mémoire. Lorsqu'on a $n=3$, et que x_1, x_2, x_3 sont les coordonnées rectangulaires d'un point de la surface $y_1 = \text{const.}$, d'où résulte que, comme dans (1), I, $\sum_a dx_a^2$ représente *le carré de l'élément linéaire dans l'espace,* alors ρ est le *rayon de courbure* de la surface en question, pour la section normale définie par les quantités dx_1, dx_2, dx_3; le problème de maxima et minima détermine *le plus grand et le plus petit rayon de courbure,* c'est-à-dire *les deux rayons de courbure principaux,* et les coefficients $\left(\frac{D_1}{D_0}\right)$, $\left(\frac{D_2}{D_0}\right)$ de la fonction $\frac{D(\omega)}{D_0}$ représentent respectivement *la somme et le produit des valeurs réciproques des deux rayons de courbure principaux*. Dans le sens indiqué plus haut, la seconde quantité et le carré de la première sont des *invariants* pour la combinaison de la forme quadratique correspondante $f(dx)$ avec l'équation $y_1 = \text{const.}$

Les fonctions y_α étant indépendantes entre elles, on peut leur adjoindre $n-l$ fonctions arbitraires y_σ (σ, et plus tard τ,... désignant les nombres depuis $l+1$ jusqu'à n), de telle façon que les y_α et les y_σ constituent ensemble un système de fonctions des x_a, indépendantes entre elles. Par l'introduction de ces nouvelles variables, la fonction $\lambda(dx)$ devra être transformée. Supposons que la transformation de la forme $f(dx)$ donne les résultats

(¹) *Ueber Systeme von Functionen mehrerer Variabelen* (*Monatsbericht der Berliner Akademie* v. J. 1869, 5. August, p. 691).

suivants :

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} &f(dx) = g(dy),\\ &g(dy) = \frac{1}{2}\sum_{k,l} e_{k,l}\, dy_k\, dy_l,\\ &|e_{k,l}| = \mathrm{E}, \quad \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial e_{k,l}} = \mathrm{E}_{k,l},\\ &d\,\frac{\partial g(dy)}{\partial dy_k} - \frac{\partial g(dy)}{\partial y_k} = \sum_l e_{k,l}\, d^2 y_l + g_k(dy),\\ &g_k(dy) = \frac{1}{2}\sum_{m,n} g_{k,m,n}\, dy_m\, dy_n, \quad g_{k,m,n} = \frac{\partial e_{k,m}}{\partial y_n} + \frac{\partial e_{k,n}}{\partial y_m} - \frac{\partial e_{m,n}}{\partial y_k}. \end{aligned}\right.$$

De (8), on tire l'équation

$$\frac{\mathrm{E}_{\alpha,\beta}}{\mathrm{E}} = (\alpha, \beta).$$

En posant maintenant, en général,

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\mathrm{E}_{k,l}}{\mathrm{E}} = (k,l),\\ &\eta_\beta(dx) = \zeta_\beta(dy),\\ &\lambda(dx) = \mu(dy),\\ &\mu(dy) = \frac{1}{2}\sum_{a,b} \mu_{a,b}\, dy_a\, dy_b, \end{aligned}\right.$$

on tirera de (9) et de (11)

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} &-\sum_k (k,\beta)\, g_k(dy) = \zeta_\beta(dy),\\ &\lambda_\alpha + \sum_\beta [\alpha, \beta]\, \zeta_\beta(dy) = 0, \end{aligned}\right.$$

et la fonction $\mu(dy)$ sera complétement déterminée. Si l'on formule maintenant, par rapport à la fonction transformée $\mu(dy)$, le problème de maxima et minima, posé pour la fonction $\lambda(dx)$, alors la condition $f(dx) =$ const. sera remplacée par la condition $g(dy) =$ const., et les conditions $dy_\alpha = 0$ pourront être introduites directement dans les formes $\mu(dy)$ et $g(dy)$, de sorte qu'on aura

$$(31)\qquad \overline{g(dy)} = \frac{1}{2}\sum_{\sigma,\tau} e_{\sigma,\tau}\, dy_\sigma\, dy_\tau,$$

$$(32)\qquad \overline{\mu(dy)} = \frac{1}{2}\sum_{\sigma,\tau} \mu_{\sigma,\tau}\, dy_\sigma\, dy_\tau.$$

D'après cela, l'expression (13') se changera dans l'expression

$$(33)\qquad \frac{1}{2}\sum_{\sigma,\tau}(-\mu_{\sigma,\tau} + \omega e_{\sigma,\tau})\, dy_\sigma\, dy_\tau,$$

la signification de la quantité ω n'ayant subi aucune altération. Les $n - l$ dérivées de (33), par rapport aux quantités dy_σ, étant égalées à zéro, donneront la solution du problème de maxima et minima proposé. Entre le déterminant précédent $D(\omega)$ et le déterminant symétrique qui appartient au système de ces $n - l$ dérivées, on a la relation [1]

$$(34)\qquad D(\omega) = \frac{\Delta}{E}\,|-\mu_{\sigma,\tau} + \omega e_{\sigma,\tau}|.$$

Ici l'on a

$$D_0 = \frac{\Delta\,|e_{\sigma,\tau}|}{E},$$

et les coefficients de la fonction $\dfrac{D(\omega)}{D_0}$ se présentent exprimés au moyen du système des variables y_α, y_σ; on peut exprimer de la même manière les *invariants* développés plus haut. Si l est égal à l'unité, les équations (23) et (24) donnent respectivement

$$(35)\qquad 2\mu(dy) = -\frac{\zeta_1(dy)}{(1,1)}\,\delta y_1,\quad 2\mu(dy) = -\frac{\zeta_1(dy)}{\sqrt{(1,1)}},$$

et, en conséquence, l'expression du second membre de l'équation (34) se trouve aussi simplifiée.

---

[1] L'introduction de cette formule entraîne quelques modifications dans les formules du texte des Memoires originaux. Dans le texte de IV, $D(\omega)$ a la signification ci-dessus; dans le texte de V, on a pose $D(\omega) = |\mu_{\sigma,\tau} + \omega e_{\sigma,\tau}|$.

V.

Développement de quelques propriétés des formes quadratiques de n différentielles.

Deuxieme Article (¹).

Nous avons supposé que la forme quadratique $f(dx)$, par la substitution des variables y_α, y_σ, se change dans la forme $g(dy)$, et que celle-ci, en vertu des conditions $y_\alpha = \text{const.}$, $dy_\alpha = 0$, se change dans la forme $\overline{g(dy)}$ des $n - l$ différentielles dy_σ, représentée par (31), IV. Le problème de la variation de l'intégrale (2), IV, est alors remplacé par le problème de la variation de l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t} \overline{g(y')}\,dt, \tag{1}$$

lequel entraîne le système d'équations différentielles

$$\frac{d\dfrac{\partial\overline{g(y')}}{\partial y'_\sigma}}{dt} - \frac{\partial\overline{g(y')}}{\partial y_\sigma} = 0. \tag{2}$$

Les valeurs d'intégration y_σ, qui satisfont au système (2), ne dépendent ainsi que de la forme $\overline{g(dy)}$. Au contraire, *une combinaison de quantités, qui est un invariant pour la combinaison de la forme $f(dx)$ avec le système qui rend constantes les fonctions y_α*, peut ou bien dépendre aussi des seuls coefficients $e_{\sigma,\tau}$ de la forme $\overline{g(dy)}$ et de leurs dérivées partielles par rapport aux variables y_σ, et cela de manière à être *un invariant de la forme* $\overline{g(dy)}$, ou bien ne pas jouir de cette propriété. Dans les considérations qui ont été exposées dans IV sur la courbure de la surface $y_1 = \text{const.}$, la forme quadratique $2\overline{g(dy)}$, qui coïncide alors avec (2*), I, exprime *le carré de l'élément linéaire sur la surface*. Les expressions $\left(\dfrac{D_1}{D_0}\right)^2$ et $\left(\dfrac{D_l}{D_0}\right)$ ont été désignées, dans l'endroit cité, comme *des invariants pour la combinaison de la forme correspondante $f(dx)$ avec l'équation $y_1 =$* const. Une seule de ces expressions,

(¹) *Journal de Borchardt*, t. 71, p. 288-295.

la seconde, $\left(\frac{D_2}{D_0}\right)$, qui est *la mesure de courbure* de Gauss, est, comme nous l'avons déjà remarqué plus haut, *un invariant de la forme* $\overline{g(dy)}$. Nous allons maintenant faire voir comment, même dans certaines hypothèses plus générales, on peut reconnaître si une combinaison de quantités, invariante pour la combinaison de la forme $f(dx)$ avec le système des fonctions y_α rendues constantes, est en même temps un invariant de la forme $\overline{g(dy)}$.

On atteint ce but en démontrant une dépendance entre l'expression $\lambda(dx)$, définie par (12), IV, et la forme quadrilinéaire

$$\Psi(d^1x,\ \delta^1x,\ dx,\ \delta x),$$

définie par (31), I, et covariante de la forme $f(dx)$. A l'aide de quatre systèmes indépendants de différentielles dx_a, d^1x_a, d^2x_a, d^3x_a, on déduit d'abord de la définition de $\lambda(dx)$ *la forme bilinéaire*

$$(3)\qquad \lambda(dx,\ d^1x) = \frac{1}{2}\sum_b \frac{\partial\lambda(dx)}{\partial\, dx_b}\, d^1x_b,$$

puis de celle-ci *la forme quadrilinéaire*

$$(4)\qquad \begin{cases} K(dx,\ d^2x,\ d^1x,\ d^3x) \\ \quad = [4\lambda(dx,\ d^1x)\lambda(d^2x,\ d^3x) - 4\lambda(dx,\ d^3x)\lambda(d^2x,\ d^1x)], \end{cases}$$

les crochets du second membre indiquant que, conformément à la méthode développée dans IV, chaque expression $\delta y_\alpha \delta y_\beta$ est remplacée par l'expression (α, β) correspondante. *La nouvelle forme* $K(dx,\ d^2x,\ d^1x,\ d^3x)$ *est, d'après cela, covariante de la combinaison de la forme* $f(dx)$ *avec les relations qui rendent constantes les fonctions* y_α, et la même propriété appartient à la différence

$$(5)\qquad -\frac{1}{2}\Psi(dx,\ d^2x,\ d^1x,\ d^3x) + K(dx,\ d^2x,\ d^1x,\ d^3x).$$

Désignons maintenant par $\Omega(dy,\ d^2y,\ d^1y,\ d^3y)$ la forme qui correspond à la forme $g(dy)$, comme la forme $\Psi(dx,\ d^2x,\ d^1x,\ d^3x)$ correspond à la forme $f(dx)$; par $L(dy,\ d^2y,\ d^1y,\ d^3y)$ la forme qui prend, pour la forme $g(dy)$, la place de la forme $K(dx,\ d^2x,\ d^1x,\ d^3x)$; et par $\overline{\Omega}(dy,\ d^2y,\ d^1y,\ d^3y)$ la forme qui prend, pour la forme $\overline{g(dy)}$ des $n-l$ différentielles dy_σ, la place de la forme $\Psi(dx, d^2x, d^1x, d^3x)$. Alors on a d'abord l'équation

$$(6)\quad \begin{cases} -\frac{1}{2}\Psi(dx, d^2x, d^1x, d^3x) + K(dx, d^2x, d^1x, d^3x) \\ = -\frac{1}{2}\Omega(dy, d^2y, d^1y, d^3y) + L(dy, d^2y, d^1y, d^3y). \end{cases}$$

Mais on a aussi, dans les cas où les quatre systèmes de différentielles

$$dy_\alpha,\quad d^1y_\alpha,\quad d^2y_\alpha,\quad d^3y_\alpha$$

sont supposés nuls, l'équation

$$(7)\quad \begin{cases} -\frac{1}{2}\Omega(dy, d^2y, d^1y, d^3y) + L(dy, d^2y, d^1y, d^3y) \\ = -\overline{\Omega}(dy, d^2y, d^1y, d^3y). \end{cases}$$

En vertu de ces deux équations, la forme $\overline{\Omega}(dy, d^2y, d^1y, d^3y)$, *covariante de la forme* $\overline{g(dy)}$, *nous ramène à la forme* $\Psi(dx, d^2x, d^1x, d^3x)$, *covariante de la forme* $f(dx)$.

La forme quadrilinéaire $\Psi(dx, d^2x, d^1x, d^3x)$ s'annule, d'après le dernier théorème de I, dans le cas, et seulement dans ce cas, où la forme $f(dx)$ peut être transformée en une forme à coefficients constants. Cette condition est, entre autres, évidemment toujours remplie, lorsque l'intégrale (2), IV, se rapporte au mouvement d'un système de points matériels suivant les lois réellement existantes de la Mécanique. Sous cette condition que $f(dx)$ soit transformable en une forme à coefficients constants, la forme $\Omega(dy, d^2y, d^1y, d^3y)$ s'annule naturellement aussi, et de (7) résulte l'équation

$$(8)\quad \begin{cases} L(dy, d^2y, d^1y, d^3y) = -\frac{1}{2}\overline{\Omega}(dy, d^2y, d^1y, d^3y), \\ dy_\alpha = d^1y_\alpha = d^2y_\alpha = d^3y_\alpha = 0. \end{cases}$$

Cette équation permet, pour certaines combinaisons de quantités, invariantes pour la combinaison de la forme $f(dx)$ avec le système des fonctions y_α rendues constantes, de faire voir que ces combinaisons sont invariantes aussi pour la forme $\overline{g(dy)}$. Une telle combinaison de quantités s'obtient, pour une valeur quelconque du nombre l, au moyen du coefficient $\frac{D_2}{D_0}$ de la puissance ω^{n-l-2} dans la fonction $\frac{D(\omega)}{D_0}$, en remplaçant, suivant la méthode exposée, dans ce coefficient, qui est une fonction homogène du second degré des variations δy_α, chaque produit $\delta y_\alpha \delta y_\beta$ par l'expression (α, β) correspondante. Cette combinaison de quantités, lorsque $f(dx)$ est transformable en une forme à coefficients constants, devient *un invariant de la forme* $\overline{g(dy)}$,

$$(9) \qquad \left(\frac{D_2}{D_0}\right).$$

Si l'on calcule, en effet, pour la forme $\overline{g(dy)}$, l'*invariant* $\overline{\omega}$ analogue à celui qui a été défini dans (32), II, pour la forme $f(dx)$, et que nous avons représenté par ψ, alors de (8) résultera l'équation

$$(10) \qquad \left(\frac{D_2}{D_0}\right) = -\frac{1}{2}\overline{\omega}.$$

L'expression $\left(\frac{D_2}{D_0}\right)$ est, d'après les dénominations employées, pour $n = 3$, la *mesure de courbure de Gauss*, et, pour une valeur quelconque de n, peut être considérée comme *une généralisation de la mesure de courbure de Gauss*.

Dans le cas où l est égal à l'unité, certaines combinaisons de quantités, de l'espèce dont il s'agit, ont été désignées sous le nom d'*invariants élémentaires*. Parmi elles, les *expressions d'ordre pair*, indiquées dans (25), IV,

$$\left(\frac{D_2}{D_0}\right), \quad \left(\frac{D_4}{D_0}\right), \ldots,$$

lorsque $f(dx)$ est transformable en une forme à coefficients constants, sont toutes en même temps *des invariants de la forme* $\overline{g(dy)}$.

M. Kronecker (*loc. cit.*), dans l'hypothèse mentionnée plus haut de $l = 1$, $f(dx) = \frac{1}{2}\sum_a dx_a^2$, a désigné l'expression $\left(\frac{D_{n-1}}{D_0}\right)$ comme une généralisation de la mesure de courbure de Gauss; d'après le théorème cité, cette expression, pour toute valeur *impaire* du nombre n, est *un invariant pour la forme* $g(dy)$.

Le Mémoire dont nous allons ci-après rendre compte renferme un examen du problème de maxima et minima proposé, dans IV, pour la fonction $\lambda(dx)$, et les conceptions déduites de ce problème dans l'hypothèse que la fonction $g(dy)$ ne renferme que les carrés des différentielles dy_k. Il nous semble à propos de mentionner dès à présent le contenu de ce résumé. Posons, pour abréger, $e_{k,k} = e_k$, de sorte que $g(dy)$ se trouve exprimé comme il suit :

$$g(dy) = \frac{1}{2}\sum_k e_k\,dy_k^2. \tag{11}$$

D'après cela, les formules (31), IV; (32), IV; (33), IV, donneront respectivement les équations

$$\overline{g(dy)} = \frac{1}{2}\sum_\sigma e_\sigma\,dy_\sigma^2, \tag{12}$$

$$\overline{\mu(dy)} = -\frac{1}{4}\sum_\sigma\sum_\alpha \frac{\partial e_\sigma}{\partial y_\alpha}\,\delta y_\alpha\,dy_\sigma^2, \tag{13}$$

et l'expression

$$\frac{1}{2}\sum_\sigma\left(\frac{1}{2}\sum_\alpha \frac{\partial e_\sigma}{\partial y_\alpha}\,\delta y_\alpha + \omega e_\sigma\right) dy_\sigma^2. \tag{14}$$

Le problème de maxima et minima proposé pour la fonction

$$\lambda(dx) = \mu(dy)$$

se résout en égalant à zéro les $n - l$ dérivées de (14) par rapport aux quantités dy_σ, c'est-à-dire au moyen des $n - l$ équations

$$\left(\frac{1}{2}\sum_\alpha \frac{\partial e_\sigma}{\partial y_\alpha}\,\delta y_\alpha + \omega e_\sigma\right) dy_\sigma = 0. \tag{15}$$

Comme, en outre, le déterminant E a présentement pour valeur $e_1 e_2 \ldots e_n$, la relation (34), IV, se change dans la suivante :

$$D(\omega) = \frac{\Delta}{e_1 e_2 \ldots e_n}\prod_{\tau=l+1}^{\tau=n}\left(\omega + \frac{1}{2}\sum_\alpha \frac{\partial \log e_\tau}{\partial y_\alpha}\,\delta y_\alpha\right), \tag{16}$$

et l'on trouve, pour déterminer les $n - l$ racines ω_τ de l'équation

$D(\omega) = 0$, la relation

$$(17) \qquad \omega_\tau = -\frac{1}{2}\sum_\alpha \frac{\partial \log e_\tau}{\partial y_\alpha}\,\delta y_\alpha.$$

Dans la résolution du problème de maxima et minima, il s'agit de savoir si une racine déterminée ω_τ est simple ou multiple. Supposons que les racines égales à ω_τ soient désignées par $\omega_{\tau'}, \omega_{\tau''}, \ldots$; on aura la solution du problème en question en égalant à zéro toutes les différentielles dy_σ, à l'exception des différentielles dy_τ, $dy_{\tau'}$, $dy_{\tau''}, \ldots$, correspondant à ces racines. On peut maintenant égaler à des constantes les quantités y_σ elles-mêmes, à l'exception des quantités $y_\tau, y_{\tau'}, \ldots$; alors les équations résultantes représenteront, *pour les variables* y_σ, *la variété déterminée par la solution de notre problème,* et cette variété sera *du premier, du second, du troisième, etc. ordre,* suivant que la racine correspondante ω_τ sera *simple, double, triple, etc.*

Des variétés du premier ordre, qui sont situées à l'intérieur des variétés correspondant à deux racines différentes ω_{τ_1}, ω_{τ_2}, *sont orthogonales entre elles par rapport à la forme* $2f(dx)$. Ce théorème, qui découle de l'équation (17), IV, renferme le théorème de M. Dupin, ainsi que la généralisation de ce théorème donnée par M. Lie (*Nachrichten der K. Gesellschaft d. Wiss. zu Gottingen,* 10 mai 1871), et dans laquelle notre forme $f(dx)$ est égale à $\frac{1}{2}\sum_a dx_a^2$.

La fonction $L(dy, d^2y, d^1y, d^3y)$, définie plus haut, lorsqu'on pose $dy_\alpha = d^1y_\alpha = d^2y_\alpha = d^3y_\alpha = 0$, a maintenant pour expression

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &L(dy, d^2y, d^1y, d^3y)\\ &\quad = \frac{1}{4}\sum_\alpha \frac{1}{e_\alpha}\sum_{\sigma,\sigma'} \frac{\partial e_\sigma}{\partial y_\alpha}\frac{\partial e_{\sigma'}}{\partial y_\alpha}(dy_\sigma d^2y_{\sigma'} - d^2y_\sigma dy_{\sigma'})(d^1y_\sigma d^3y_{\sigma'} - d^3y_\sigma d^1y_{\sigma'}).\end{aligned}\right.$$

Si nous introduisons encore la supposition

$$f(dx) = \frac{1}{2}\sum_\alpha dx_\alpha^2.$$

alors l'équation (8) a lieu, et *pour l'invariant* $\bar{\omega}$ *de* $\overline{g(dy)}$ on a l'équation

$$(19) \qquad -\bar{\omega} = \frac{1}{4}\sum_{\alpha}\frac{1}{e_\alpha}\sum_{\sigma,\sigma'}\frac{\partial \log e_\sigma}{\partial y_\alpha}\,\frac{\partial \log e_{\sigma'}}{\partial y_\alpha}.$$

De plus, il faudra faire, dans (16), $\Delta = 1$. Dans le cas de $l = 1$, il vient

$$(20) \qquad D(\omega) = \frac{1}{e_1}\prod_{\tau=2}^{\tau=n}\left(\omega + \frac{1}{2}\frac{\partial \log e_\tau}{\partial y_1}\,\partial y_1\right),$$

et, si l'on remplace ∂y_1 par $\sqrt{(1,1)} = \frac{1}{\sqrt{e_1}}$, on trouve, pour déterminer les *invariants* de $\overline{g(dy)}$, énumérés dans (25), IV, la relation

$$(21) \quad \frac{1}{e_1}\prod_{\tau=2}^{\tau=n}\left(\omega + \frac{1}{2}\frac{\partial \log e_\tau}{\partial y_1}\frac{1}{\sqrt{e_1}}\right) = D_0\left[\omega^{n-1} + \left(\frac{D_1}{D_0}\right)\omega^{n-2} + \ldots + \left(\frac{D_{n-1}}{D_0}\right)\right].$$

VI.

Développement d'une dépendance entre les formes quadratiques de n différentielles et les transcendantes abéliennes (¹).

Le caractère spécifique d'une branche de la théorie des formes de n différentielles est exprimé par la condition que les coefficients d'une telle forme soient des fonctions algébriques des variables, et que, dans la transformation de la forme, les variables primitives soient égalées à des fonctions algébriques des nouvelles variables. Cette branche comprend la transformation de la forme $\sum_a dx_a^2$ au moyen des coordonnées elliptiques généralisées $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Au sujet des coordonnées elliptiques, on peut consulter le travail de Jacobi intitulé : *Des lignes géodésiques sur un ellipsoïde, et des diverses applications d'une substitution analytique remarquable* (²),

---

(¹) *Journal de Borchardt*, t. 74, p. 150-171.

(²) *Von der geodatischen Linie auf einem Ellipsoid und den verschiedenen Anwen-*

et ses *Leçons de Dynamique* [1]. Cette transformation implique, entre les formes quadratiques de n différentielles et les transcendantes abéliennes, une dépendance qui fait l'objet du présent Mémoire.

Pour exprimer les n variables x_a au moyen des n coordonnées elliptiques y_k, nous supposerons que, entre ces dernières et n quantités réelles $a_1, a_2, \ldots, a_n$, on ait les inégalités

$$(1) \qquad y_1 > a_1 > y_2 > a_2 > \ldots > y_n > a_n;$$

que, pour un y indéterminé, on pose

$$(2) \qquad \chi(y) = (y-y_1)(y-y_2)\ldots(y-y_n),$$

$$(3) \qquad \mathfrak{Q}(y) = (y-a_1)(y-a_2)\ldots(y-a_n),$$

et que, en désignant par la notation de Lagrange la différentiation relative à y, on ait les équations

$$(4) \qquad x_e^2 = -\frac{\chi(a_e)}{\mathfrak{Q}'(a_e)}.$$

Alors aux valeurs réelles des y_k correspondront aussi des valeurs réelles des x_e. On obtient de plus *la transformation de la forme* $\sum_e dx_e^2$,

$$(5) \qquad \sum_e dx_e^2 = \frac{1}{4}\sum_e \frac{\chi'(y_e)}{\mathfrak{Q}(y_e)}\,dy_e^2,$$

de laquelle découlent les diverses applications des coordonnées elliptiques qui se présenteront ici. La forme qui constitue le second membre de (5) étant de l'espèce de (11), V,

$$2g(dy) = \sum_k e_k\,dy_k^2,$$

les n équations $y_b =$ const. désigneront, d'après le langage établi dans III, n *variétés* du $(n-1)^{\text{ieme}}$ ordre, jouissant de la propriété que les *variétés* du premier ordre, qui sont communes à $n-1$ quel-

---

dungen einer merkwürdigen analytischen Substitution (*Monatsbericht der Berliner Akademie* v. J. 1839, April, et *Journal für Mathematik*, t. 19, p. 309).

[1] *Vorlesungen über Dynamik*, Vorlesung 29 und 30.

conques des *variétés* en question, *sont deux à deux normales entre elles, ou orthogonales par rapport à la forme* $\sum_a dx_a^2$. En d'autres termes, les n équations $y_b =$ const. composent un système de n *variétés* du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre, qui sont *orthogonales par rapport à la forme* $\sum_a dx_a^2$. Les coefficients e_k ont pour valeurs, d'après (5),

$$(6) \qquad e_k = \frac{\chi'(y_k)}{4\mathfrak{Q}(y_k)}.$$

La première application de la transformation (5) est relative à ce que, dans les considérations de III, on a posé le nombre $p = 2$, la forme $f(dx) = \frac{1}{2}\sum_a dx_a^2$, la fonction $U = 0$. Alors $F(dx) = \sum_a dx_a^2$ est également une forme à coefficients constants; on a, pour l'équation hamiltonienne aux dérivées partielles correspondante,

$$(7) \qquad \sum_a \left(\frac{\partial P}{\partial x_a}\right)^2 = 1,$$

et l'intégrale complète R de cette équation a pour expression

$$(8) \qquad R = \left[\sum_a (x_a - x_a^{(0)})^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Par l'introduction des coordonnées elliptiques, il vient

$$F(dx) = G(dy), \quad G(dy) = 2g(dy) = \sum_k e_k dy_k^2,$$

et l'équation hamiltonienne aux différentielles partielles correspondante s'écrit ainsi :

$$(9) \qquad \sum_a \frac{1}{e_a}\left(\frac{\partial P}{\partial y_a}\right)^2 = 1.$$

Maintenant Jacobi a fait voir que, si $c_2, c_3, \ldots, c_n$ désignent des constantes réelles; si, de plus, on a les inégalités

$$(10) \qquad y_1 > a_1 > c_2 > y_2 > \ldots > c_n > y_n > a_n,$$

et que l'on introduise la fonction du $(n-2)^{\text{ième}}$ degré

$$(11) \qquad \mathfrak{P}(y) = (y-c_2)(y-c_3)\,..\,(y-c_n),$$

l'équation aux différentielles partielles (9) sera satisfaite par l'intégrale complète, renfermant les constantes arbitraires $c_1, c_2, \ldots, c_n$,

$$(12) \qquad \begin{cases} \mathrm{P} & \mathrm{P}_1, \\ \mathrm{P}_1 = \sum\limits_e \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{a_e}^{y_e} \sqrt{\dfrac{\mathfrak{P}(y_e)}{\mathfrak{Q}(y_e)}}\cdot dy_e + c_1. \end{cases}$$

D'après les développements donnés dans III, la fonction P_1, jointe à ses $n-1$ dérivées $\dfrac{\partial \mathrm{P}_1}{\partial c_r} = \Phi_r$, où $r = 2, 3, \ldots, n$, fournit une transformation de la forme $\mathrm{F}(dx) = \mathrm{G}(dy)$, dont le type a été donné dans (19), III. En vertu des relations actuelles, les coefficients $m_{r,s}$ sont égaux à zéro toutes les fois que l'on a $r \gtrless s$, et se déterminent simplement lorsque $r = s$. On a, d'après cela, pour la nouvelle transformation,

$$(13) \qquad \sum_k e_k\, dy_k^2 = d\mathrm{P}_1^2 + \sum_r \frac{\gamma(c_r)}{\mathfrak{P}'(c_r)}\, d\Phi_r^2,$$

et, en égalant successivement à des constantes les nouvelles variables $\mathrm{P}_1, \Phi_2, \Phi_3, \ldots, \Phi_n$, on a la représentation d'un nouveau système de n *variétés* du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre, *orthogonales entre elles par rapport à la forme* $\sum\limits_k e_k\, dy_k^2$, ou, ce qui est la même chose, *par rapport à la forme* $\sum\limits_a dx_a^2$.

Comme, dans le cas actuel, la forme $\mathrm{F}(dx) = \sum\limits_a dx_a^2$ est, ainsi qu'on l'a déjà remarqué, une forme à coefficients constants, on aura lieu d'appliquer le théorème énoncé dans III pour cette hypothèse, et en vertu duquel, pour le système d'équations différentielles (7), III, le même système d'intégrales est représenté, d'une part, par les équations (18), III, où l'on devra poser $\mathrm{P} = \mathrm{P}_1$,

$$\left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x_a}\right) = \left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x_a}\right)_0,$$

et dont $n-1$ entraînent comme conséquence la $n^{\text{ième}}$, et, d'autre part, par les $n-1$ équations

$$\Phi_r = \Phi_r^{(0)}.$$

Les dérivées $\frac{\partial P_1}{\partial x_e}$ sont ici les *expressions algébriques*

$$(14)\qquad \frac{\partial P_1}{\partial x_e} = \sum_a \frac{\mathfrak{P}(y_a)\mathfrak{Q}(y_a)}{\chi'(y_a)} \cdot \frac{x_e}{y_a - a_e}.$$

Les quantités $\Phi_r = \frac{\partial P_1}{\partial c_r}$ ont la *forme transcendante*

$$(15)\qquad \Phi_r = \sum_a -\frac{1}{4}\int_{a_a}^{y_a} \frac{\mathfrak{P}(y_a)}{y_a - c_r} \frac{dy_a}{\sqrt{\mathfrak{P}(y_a)\mathfrak{Q}(y_a)}},$$

et le théorème énoncé se change dans le *théorème d'Abel.*

Une deuxième application de l'équation (5) s'obtient lorsque, dans les développements de IV et V, on remplace à la fois la forme $f(dx)$ par $\frac{1}{2}\sum_a dx_a^2$, et les variables y_α, y_σ par les coordonnées elliptiques correspondantes. On rencontre alors les simplifications qui se déduisent de l'introduction de l'équation (11), V. Les équations (6) ont pour conséquence la determination

$$(16)\qquad \frac{\partial \log e_\sigma}{\partial y_\alpha} = -\frac{1}{y_\sigma - y_\alpha},$$

et comme on a $\Delta = 1$, et que $f(dx)$ est *une forme à coefficients constants,* les équations (16), V, et (12), V, se changent respectivement en

$$(17)\qquad D(\omega) = \frac{1}{e_1 e_2 \ldots e_l} \prod_{\tau=l+1}^{\tau=n} \left[\omega - \sum_\alpha \frac{\delta y_\alpha}{2(y_\tau - y_\alpha)}\right],$$

$$(18)\qquad -\frac{1}{2}\bar{\omega} = \frac{1}{4}\sum_\alpha \frac{1}{e_\alpha} \sum_{\sigma,\sigma'} \frac{1}{(y_\sigma - y_\alpha)(y_{\sigma'} - y_\alpha)}.$$

En outre, de (21), V, dans la supposition de $l = 1$, on tire la relation

$$(19)\quad \frac{1}{e_1}\prod_{\tau=2}^{\tau=n}\left[\omega - \frac{1}{2(y_\tau - y_1)\sqrt{e_1}}\right] = D_0\left[\omega^{n-1} + \left(\frac{D_1}{D_0}\right)\omega^{n-2} + \ldots + D_{n-2}\right].$$

Ici $-\frac{1}{2}\overline{\omega}$ et les expressions $\left(\frac{D_2}{D_0}\right)$, $\left(\frac{D_4}{D_0}\right)$, ... sont *des invariants de la forme* $\overline{g(dy)} = \frac{1}{2}\sum_\sigma e_\sigma dy_\sigma^2$.

Le problème de Calcul des variations correspondant aux hypothèses en question et expliqué dans IV, lequel, d'après une remarque faite au commencement de l'analyse de V, se ramène au problème de la variation de l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t}\overline{g(y')}\,dt,$$

est *une généralisation de la question de la ligne géodésique sur l'ellipsoïde*. Le système d'équations différentielles correspondant (2), V, prend, en vertu de (11), V, la forme

$$(20)\qquad e_\sigma y''_\sigma + \frac{de_\sigma}{dt}y'_\sigma - \frac{\partial\overline{g(y')}}{\partial y_\sigma} = 0;$$

et *l'équation hamiltonienne aux différentielles partielles* correspondante à la forme $\overline{g(dy)}$ est la suivante :

$$(21)\qquad \sum_\sigma \frac{1}{e_\sigma}\left(\frac{\partial P}{\partial y_\sigma}\right)^2 = 1.$$

Si maintenant, d'après la méthode due à Jacobi, on introduit une fonction

$$(22)\qquad \mathfrak{P}_{n-l-1}(y) = (y - c_{l+2})(y - c_{l+3})\ldots(y - c_n),$$

les constantes réelles $c_{l+2}, \ldots, c_n$ étant soumises aux inégalités

$$(23)\qquad a_{l+1} > c_{l+2} > y_{l+1} > a_{l+2} > \ldots > c_n > y_n > a_n,$$

et si l'on pose

$$(24)\qquad \begin{cases} \chi_l(y) = (y - y_1)(y - y_2)\ldots(y - y_l), \\ \overline{\chi_{n-l}(y)} = (y - y_{l+1})(y - y_{l+2})\ldots(y - y_n), \end{cases}$$

on a l'intégrale complète, avec les constantes arbitraires c_{l+1}, $c_{l+2}, \ldots, c_n$,

$$(25)\quad \left\{ \begin{aligned} & P = P_{l+1}, \\ & P_{l+1} = \sum_\sigma \frac{1}{2} \int_{a_\sigma}^{y_\sigma} \sqrt{\frac{\chi_l(y_\sigma)\,\varphi_{n-l-1}(y_\sigma)}{\mathfrak{L}(y_\sigma)}} \cdot dy_\sigma + c_{l+1}. \end{aligned} \right.$$

Or la fonction P_{l+1}, jointe aux $n-l-1$ dérivées $\frac{\partial P_{l+1}}{\partial c_\xi} = \Phi_\xi^{(l)}$, forme un système de nouvelles variables, par l'introduction duquel la forme $2\overline{g(dy)}$ se transforme d'une manière semblable à la formule (19), III. Actuellement aussi tous les coefficients de la nouvelle forme s'évanouissent, à l'exception de ceux qui sont multipliés *par les carrés des différentielles,* et l'on obtient *la transformation*

$$(26)\qquad \sum_\sigma e_\sigma dy_\sigma^2 = dP_{l+1}^2 + \sum_\xi \frac{-4\,\overline{\chi_{n-l}(c_\xi)}}{\varphi'_{n-l-1}(c_\xi)}\, d\Phi_\xi^{(l)2}.$$

En même temps, les équations $\Phi_\xi^{(l)} = \Phi_\xi^{(l)(0)}$ sont $n-l-1$ intégrales du système (20), et les $n-l$ *variétés* du $(n-l-1)^{\text{ième}}$ ordre $P_{l+1} = \text{const.}$ composent, *par rapport à la forme* $2\overline{g(dy)}$ *un système de variétés orthogonales.*

Bonn, le 20 août 1872.