BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Revue bibliographique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 4 (1873), p. 273-278

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1873__4__273_0>

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

TODHUNTER (I.), late Fellow and principal mathematical Lecturer of St. John's College, Cambridge. — RESEARCHES IN THE CALCULUS OF VARIATIONS, PRINCIPALLY ON THE THEORY OF DISCONTINUOUS SOLUTIONS; an Essay to which the Adams Prize was awarded in the University of Cambridge in 1871. — London & Cambridge, Macmillan & Co., 1871. — In-8°, 278 p. Prix : 8 fr.

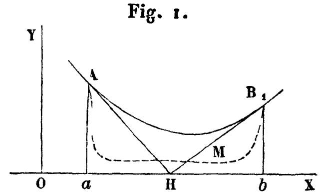
Ce nouvel Ouvrage de M. Todhunter traite d'une partie des plus intéressantes du Calcul des variations, et il nous paraît destiné à apporter la clarté dans des questions qui ont fait jusqu'ici le sujet d'un grand nombre de discussions et de recherches. Quand les géomètres ont voulu appliquer les principes de Lagrange et de Jacobi à des problèmes particuliers de Calcul des variations, ils se sont trouvés en présence de difficultés d'une nature très-singulière, tenant, au fond, à la discontinuité, et dont nous allons donner une idée en étudiant quelques exemples spéciaux.

Proposons-nous d'abord le problème suivant : Étant donnés deux points A et B, trouver la courbe passant par ces deux points, et telle qu'elle engendre, par sa révolution autour d'une droite donnée, un segment de surface d'aire minimum. Si l'on applique les règles du Calcul des variations, on trouvera comme solution une chaînette passant par les deux points. La détermination de cette chaînette dépend d'une équation transcendante qui donne deux solutions réelles dans certains cas, et dans d'autres ne fournit aucune solution. Ce premier fait, qu'il peut ne pas y avoir de solution, doit paraître déjà étonnant; mais, avant d'essayer de s'en rendre compte, il importe de signaler d'autres contradictions.

Puisqu'il y a deux chaînettes passant par les deux points A et B, il faut savoir quelle est celle qui donne la surface la plus petite, et une discussion bien simple montre encore, sans aucune difficulté, que des deux courbes il y en a une pour laquelle les tangentes en A et en B se coupent au-dessus de l'axe, tandis que pour l'autre chaînette elles se coupent au-dessous. La première chaînette est au-dessus de la seconde, et il semble que c'est elle qui doit engendrer la surface dont l'aire est la plus petite de toutes. Il est bien vrai que le Calcul des variations ne donne et ne doit donner que la ligne pour laquelle l'aire est plus petite que pour les lignes infiniment voisines; mais il est clair aussi que le minimum absolu doit correspondre à un minimum fourni par le Calcul des variations. Ainsi on n'aura qu'à choisir, semble-t-il, entre les deux chaînettes fournies par le Calcul des variations; il faudra prendre celle qui est au-dessus de l'autre, et le problème sera résolu. On va voir que cette conclusion est absolument inexacte, et qu'elle tient, en définitive, non au Calcul des variations, mais à la manière fautive dont on l'applique le plus souvent.

En admettant que la chaînette et le point A soient donnés, il est clair, d'après la règle que nous avons donnée, que la courbe sera

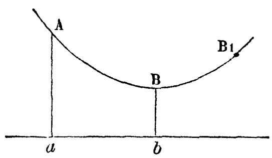
Fig. 1.



celle des deux chaînettes pour laquelle il y a minimum tant que le point B ne sera pas arrivé à la limite pour laquelle la tangente en B vient se rencontrer sur l'axe de révolution avec la tangente en A. On va voir qu'il n'en est pas ainsi, et que, avant même que le point B ne soit arrivé à la limite extrême de sa course en B_1, l'arc de chaînette cessera de jouir de la propriété de minimum absolu, et qu'il y aura une infinité d'autres courbes passant par les deux points considérés, *toutes situées d'un même côté de l'axe des x*, et pour lesquelles la surface engendrée aura une aire plus petite que pour la chaînette fournie par le Calcul des variations. Admettons, en effet, comme cela est démontré dans le Traité de MM. Lindelöf et Moigno, que l'aire engendrée par l'arc AB_1 de chaînette soit égale à l'aire engendrée par la ligne brisée AHB_1. Cette aire sera évidemment plus grande que l'aire engendrée par le contour AMB_1, très-rapprochée de $AabB_1$, qui engendre une aire très-voisine de la somme des aires des cercles de rayons aA, bB_1. Ainsi l'aire engendrée par toute ligne telle que AMB_1 sera plus petite d'une quantité finie que l'aire engendrée par l'arc AB_1, et par conséquent, avant même que le point B ne soit arrivé à la limite B_1, on pourra substituer à l'arc de chaînette une foule de courbes donnant une aire plus faible. Si l'on compare, d'ailleurs, ces courbes entre elles, pour aucune la variation de l'aire n'est nulle quand on passe à la voisine. On pourra passer de l'une d'elles à une autre pour laquelle l'aire sera plus petite, et la limite de toutes sera le contour $\mathrm{A}ab\mathrm{A}_1$; l'aire se réduira alors à la somme de deux cercles de rayon $\mathrm{A}a$, $\mathrm{B}_1 b$.

Ainsi, sur la chaînette, le point B, pour lequel la courbe cessera d'engendrer une aire minimum, sera bien plus rapproché du

Fig. 2.



point A que le point B_1. Ce sera celui pour lequel l'aire engendrée par l'arc AB sera égale à la somme des aires des deux cercles de rayons $\mathrm{A}a$, $\mathrm{B}b$.

M. Todhunter a reconnu très-nettement où se trouvait, dans les méthodes employées, le défaut de la solution, et voici quel est le principe fondamental qui sert de base à ses recherches. Supposons qu'on cherche le minimum d'une certaine intégrale V, et soit

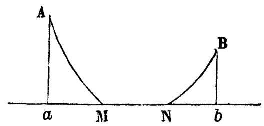
$$\delta \mathrm{V} = \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{P}\,\delta y\, dx.$$

La règle de Lagrange consiste à égaler P à zéro, et certainement il n'y a rien à contester sur ce point; mais si l'on considère un chemin limite pour lequel δy ne peut pas prendre tous les signes, par exemple, la règle n'est plus applicable. Supposons, pour fixer les idées, que, par la nature de la question, δy soit positif de x_0 à x_1; alors il suffira, pour qu'il y ait minimum, que P soit positif ou nul, et, pour le maximum, que P soit négatif ou nul dans les différents points du chemin. Si ces conditions sont remplies, le chemin limite, tenant aux discontinuités, aux limitations de la question, donnera une intégrale plus petite ou plus grande que les chemins infiniment voisins, et par conséquent il devra intervenir quand on comparera les maxima ou les minima relatifs, et qu'on voudra retenir le maximum ou le minimum absolu.

Ces considérations trouvent leur application immédiate dans la question actuelle, où l'on cherche, parmi toutes les courbes situées d'un même côté de l'axe des x, celle pour laquelle l'aire est minimum.

En effet, pour un chemin tel que AMNB, venant coïncider sur une étendue finie avec l'axe des x, il n'y a pas lieu d'appliquer,

Fig. 3.

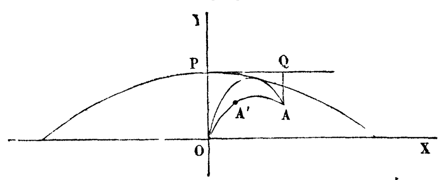


comme on le fait ordinairement, les règles du Calcul des variations. Pour la portion MN, on doit nécessairement donner à δy, quand on cherche la variation, une valeur positive, et l'on reconnaîtra facilement que celui de ces chemins qui donne la plus petite aire est AaBb. Donc, quand on aura fixé les deux points A et B, il y aura trois chemins à comparer : 1° les deux chaînettes, s'il y en a deux, passant par les points A et B; 2° le chemin AabB, qui sera même l'unique solution de la question, dans le cas où les chaînettes seront imaginaires.

Un autre exemple, plus instructif peut-être, et pour lequel nous nous aiderons des considérations lumineuses développées par M. Bertrand, dans son Cours de Mécanique analytique au Collége de France, se rapporte au principe de la moindre action, que M. Todhunter étudie d'une manière détaillée dans ses applications au mouvement des projectiles, et aussi à celui d'une planète.

Imaginons un projectile soumis aux lois de la gravité, et partant de l'origine. En chaque point du plan défini par les coordonnées x,

Fig. 4.



y, la vitesse v sera définie par la formule $v^2 = 2g(a - y)$, et il est clair que la trajectoire parabolique sera donnée en appliquant le principe de la moindre action, c'est-à-dire en écrivant que l'intégrale

$$\int mv.ds = \int \sqrt{a-y}.dx.\sqrt{1+y'^2}$$

a sa variation nulle. On sait qu'il y a deux paraboles passant par l'origine et par un point A, et l'intégrale qui représente l'*action* est plus petite pour celle des deux paraboles qui est au-dessous de l'autre; mais on se tromperait si l'on croyait que c'est la courbe OA qui fournit toujours la plus petite intégrale possible. Il y a encore à introduire le chemin OPQA, qui comprend une portion PQ de la tangente au sommet de la parabole de sûreté, et qui est un chemin limité pour lequel on ne pourrait prendre, le long de PQ, dy positif, puisque, au-dessus de PQ, la vitesse v deviendrait imaginaire. M. Todhunter donne même sur chaque parabole le point pour lequel l'intégrale de l'action cesse d'être la plus petite de toutes. Soit A′ ce point; alors, du point O au point A′, l'intégrale sera non-seulement plus petite que celles qui se rapportent aux chemins infiniment voisins, mais encore que celles qui se rapportent à des chemins quelconques aboutissant aux mêmes extrémités. Entre le point A′ et le point A, l'intégrale sera plus petite seulement que les intégrales se rapportant aux chemins infiniment voisins; enfin, pour le point A′ et au delà, il n'y aura ni maximum ni minimum, même en comparant aux chemins infiniment voisins.

L'auteur examine aussi, quoique très-rapidement, le cas du mouvement elliptique, sur lequel M. Bertrand a présenté des développements qui conservent de l'intérêt, même après la publication du livre de M. Todhunter; mais nous nous contenterons d'avoir indiqué par quelques exemples la nature des questions traitées par M. Todhunter dans son bel Ouvrage, et l'influence qu'elles doivent nécessairement avoir sur les progrès du Calcul des variations. L'auteur a su signaler la véritable origine des difficultés qui avaient embarrassé plusieurs géomètres, et il a choisi plusieurs exemples remarquables qui donnent un véritable intérêt à son Ouvrage, et montrent la portée et la valeur de ses explications théoriques.

G. D.

THOMSON (sir William) und TAIT (P.-G.). — HANDBUCH DER THEORETISCHEN PHYSIK. Autorisirte deutsche Uebersetzung von Dr H. HELMHOLTZ und G. WERTHEIM. Erster Band. Erster Theil. — Braunschweig, Vieweg und Sohn, 1871. — In-8°, 376 p. Prix : 9 fr. 50.

L'Ouvrage que nous avons à annoncer aujourd'hui est la traduction de l'excellent *Traité de Philosophie naturelle* de MM. Thomson et Tait. On sait que le premier Volume seul de ce Livre considérable a paru en 1866. Les traducteurs allemands ne nous donnent même que la première Partie du premier Volume; mais elle forme un tout complet, divisé en deux Chapitres : la Cinématique d'une part, les lois et les principes de la Dynamique de l'autre. Il serait à désirer que cet Ouvrage, qui contient, sous une forme trop concise peut-être, une foule de résultats et d'idées du plus haut intérêt, fût traduit en français. S'il n'est pas de nature à être mis entre les mains des débutants, il peut rendre de grands services aux professeurs et à toutes les personnes qui désirent prendre une connaissance approfondie des méthodes de la Physique moderne et de la marche de la Science dans ces derniers temps. G. D.