Bulletin des sciences
mathématiques et astronomiques

Revue des publications périodiques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 4 (1873), p. 233-256

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1873__4__233_1>

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK, herausgegeben von C.-W. BORCHARDT.

T. 75, Cahiers 3 et 4; 1872.

FUCHS (L.). — *Sur la représentation des fonctions de variables complexes, en particulier sur celles des intégrales d'équations différentielles linéaires.* (47 p.)

L'auteur a surtout l'intention de perfectionner la théorie des fonctions qui satisfont à des équations différentielles linéaires. Il avait déjà exposé le principe de ses recherches sur cet objet en 1865, dans un Mémoire inséré au tome 66 de ce Journal. Ce principe repose sur certains développements en séries, applicables dans le voisinage de chacun des points singuliers. Alors, si l'on se donne, pour un point A, une intégrale de l'équation différentielle d'ordre m, ainsi que les $m-1$ premières dérivées, la fonction sera complétement déterminée pour tout autre point B du plan de construction, en supposant qu'on ait fixé d'avance le chemin L qui y conduit. Si, pour fixer les idées, le point A se trouve dans le voisinage d'un point singulier a, on pourra effectuer, d'après le Mémoire que nous venons de citer, la représentation de l'intégrale au moyen de séries; mais celles-ci, qui ne sont applicables que dans le voisinage du point a, ne permettront la détermination directe de l'intégrale en B que lorsque B et le chemin entier L appartiendront à ce même voisinage. S'il n'en est pas ainsi, il en résultera un inconvénient auquel M. Fuchs cherche à remédier dans son nouveau Mémoire; celui-ci se divise en deux Parties, dont voici l'analyse.

Soit

$$z = F(w) \tag{1}$$

une fonction algébrique et rationnelle de la variable complexe w, et qui prenne, pour $w = 0$, une valeur infinie du premier ordre; soit, de plus, R le plus petit des modules des racines de l'équation

$$\frac{dF(w)}{dw} = 0. \tag{2}$$

Alors il n'y a pas deux valeurs de w distinctes l'une de l'autre qui correspondent à la même valeur de z en vertu de l'équation (1), et qui soient contenues dans l'intérieur de la circonférence K décrite, avec le rayon R, autour de l'origine des w. Le cercle K est appelé le *cercle-limite* appartenant à la fonction rationnelle (1); la courbe fermée C, qui lui correspond en vertu de l'équation (1), reçoit le nom de *courbe-limite*. D'après cela, on trouve la solution de ce problème : Étant donnés, dans le plan des z, les $m+1$ points de z_1, $z_2, \ldots, z_{m+1}$, déterminer la fonction $F(z)$ de telle sorte que R devienne plus grand que l'unité, et que les points $z_1, z_2, \ldots, z_{m+1}$ du plan des z correspondent, d'après l'équation (1), aux $m+1$ points arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+1}$ de la circonférence E, décrite avec le rayon 1 autour de l'origine des w.

La courbe C_e du plan des z, qui correspond au cercle E du plan des w en vertu de l'équation (1), est une courbe fermée qui ne se coupe elle-même nulle part, et qui passe par les $m+1$ points $z_1, z_2, \ldots, z_{m+1}$; l'aire comprise dans l'intérieur du cercle E est une représentation (*Abbildung*) de l'aire infinie à l'extérieur de la courbe C_e; de même, l'anneau circulaire compris entre les cercles K et E et l'anneau contenu entre les courbes C et C_e sont des représentations l'un de l'autre. La courbe C_e est nommée *courbe isolante* (*Absonderungscurve*).

Dans la seconde Partie, l'auteur fait l'application des résultats de la première à la représentation des variables complexes.

Soient $z_1, z_2, \ldots, z_{m+1}$ les points singuliers de la fonction polydrome (*mehrdeutig*) $f(z)$; la courbe isolante C_e divise le plan des z en deux parties, G_1 et G_2, où G_1 est supposé désigner celle qui s'étend à l'infini. Comme fonction de w, la fonction $f(z) = f[F(w)]$ peut avoir, à l'intérieur du cercle E, tout au plus le point singulier $w = 0$. Donc, quand on a développé les séries qui représentent la fonction pour l'intérieur du cercle E, il en résulte une représentation de $f(z)$ admissible au dedans de G_1, pourvu que l'on suppose que les valeurs de la fonction algébrique w de z soient connues pour l'intérieur de G_1, et qu'on les substitue à la place de w dans la série que nous venons de mentionner. Dans l'intérieur de G_2, la fonction est monogène et monodrome; par conséquent, elle permet l'application de l'intégrale de Cauchy, qu'on peut évaluer en profitant de la substitution (1), et en calculant $f[F(w)]$ le long de la circonférence E. Ces principes se prêtent à une facile application dans le cas des équations différentielles linéaires.

D'abord l'auteur établit, pour l'intérieur de E, puis encore pour celui de G_1, les séries qui représentent les intégrales, et qu'il a développées dans le Mémoire cité, pour le voisinage d'un point singulier. Alors il montre comment les intégrales ainsi déterminées pour l'intérieur de E dépendent de celles qu'on peut représenter semblablement dans le voisinage de chacun des points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$; par là il réussit à exprimer les valeurs des intégrales au bord intérieur du contour limite de G_2 au moyen de leurs valeurs au bord extérieur. Par suite, il est possible de fonder les développements, qu'il faudrait exécuter à l'aide de l'intégrale marginale de Cauchy, sur le calcul des intégrales au bord intérieur de E, moyennant les séries qui sont applicables à l'intérieur de E.

Ainsi l'auteur réussit en même temps à résoudre le problème de déterminer *a priori* la valeur que possède au point B l'intégrale dont on a fixé la valeur en un point A, et qui passe par un chemin déterminé L de A à B, ces points étant situés dans les deux aires différentes G_1 et G_2, problème pour la solution duquel il est encore nécessaire de savoir entre quels points singuliers la courbe L coupe la courbe isolante C_e. Enfin l'exemple d'une équation linéaire du second ordre et douée de quatre points singuliers sert à éclaircir la théorie développée par l'auteur.

Thomae (J.). — *Contribution à la théorie des fonctions abéliennes.* (31 p.)

La détermination de $\log\vartheta(0, 0, \ldots, 0)$ en fonction des modules de classe d'un système de fonctions algébriques fait l'objet de ce Mémoire, suite de quelques autres, publiés par M. Thomae dans ce Journal. Dans un premier Mémoire (t. 66), il avait calculé $d\log\vartheta(0, 0, \ldots, 0)$ en fonction linéaire des différentielles de ces modules; les coefficients de cette fonction sont des fonctions algébriques, ainsi que leurs intégrales. L'intégration de l'équation différentielle avait été effectuée dans un autre Mémoire du tome 71, pour le cas des fonctions abéliennes dont les différentielles se ramènent à des racines carrées (¹). Maintenant l'auteur ramène l'intégration générale à la construction d'une fonction algébrique, dont on se donne la ramification, les zéros et les infinis; il réussit ainsi à montrer une voie algébrique par laquelle on peut déterminer l'intégrale, à un facteur près, qui peut être évalué d'après les méthodes du Mémoire du tome 71. Soit, pour fixer les idées, $\vartheta_{h,g}$ une fonction ϑ qui ne s'évanouit pas avec ses variables, et soit $|A|$ le déterminant dont les éléments sont formés par les modules de périodicité; on aura le théorème (XIII) : La fonction $\vartheta_{h,g} : \sqrt{|A|}$ est une fonction algébrique des valeurs de ramification $k_1, k_2, \ldots$

(¹) Voir *Bulletin*, t. III, p. 138.

de la surface T de Riemann, à laquelle la fonction ϑ appartient. Si l'on désigne par $f(A, B)$ le produit des huitièmes puissances de toutes les fonctions $\vartheta_{h,g} : \sqrt{|A|}$, $\vartheta(0, 0, \ldots, 0)$ peut être déduit de cette fonction f par voie algébrique.

Kiepert (L.). — *Division en dix-sept parties égales de la circonférence de la lemniscate par le seul moyen de la règle et du compas.* (9 p.)

Mertens (F.). — *Extrait d'une Lettre au Rédacteur.*

Remarque sur une Note du même auteur concernant les fonctions symétriques.

Thomé (L.-W.). — *Sur la théorie des équations linéaires différentielles.* (27 p.)

Suite du Mémoire, tome 74 du même Journal.

Nous rappellerons (¹) que M. Thomé s'occupe de l'équation différentielle homogène et linéaire

$$(1) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \ldots + p_m y = 0,$$

dont les coefficients sont, dans le voisinage de $x = a$, des fonctions monodromes et, à ce point a près, monogènes de la variable complexe x. Selon M. Fuchs (t. 66), toute intégrale de l'équation peut être mise sous la forme $\varphi(x - a)^r [\log(x - a)]^k$, k étant un nombre entier positif ou nul, φ une fonction monogène et monodrome dans le voisinage de $x = a$, à ce point près; ce qui permet, auprès du point a, une représentation de la forme

$$\sum_0^\infty C_\alpha (x - a)^\alpha + \sum_1^\infty C_{-\alpha} (x - a)^{-\alpha}.$$

Si les fonctions φ ne contiennent qu'un nombre *fini* de puissances à exposants négatifs, M. Thomé appelle ces intégrales *régulières.* Ses recherches s'étendent aux propriétés des équations différentielles qui possèdent des intégrales régulières parmi leurs intégrales. Les équations dont les intégrales sont *toutes* régulières ont été déjà

(¹) Voir *Bulletin*, t. III, p. 367.

traitées par M. Fuchs (t. 68) d'après un autre procédé. Voici l'exposé de la méthode de M. Thomé. Lorsque l'équation différentielle a une intégrale régulière, elle en aura aussi une autre, telle que

$$y_1 = (x-a)^r \sum_0^\infty C_a (x-a)^a.$$

Puis l'auteur emploie la conclusion de $m-1$ à m, en se servant de la réduction $y = y_1 \int z\,dx$, où y_1 possède la forme caractérisée. Les équations différentielles dont les coefficients p prennent pour $x=a$ des valeurs infinies d'ordre *fini* font l'objet principal de ses études. Soit π_a l'ordre infinitésimal de la valeur infinie de P_a pour $x=a$, ($\pi_0 = 0$), et formons la suite des nombres $\pi_0 + m$, $\pi_1 + m - 1$, $\pi_2 + m - 2, \ldots, \pi_m$. Un certain indice de la suite $a = 0, 1, 2, \ldots, m$ sera celui où le plus grand de ces nombres se présente pour la première fois; M. Thomé l'appelle *indice caractéristique*. Alors on a ces théorèmes (n° 1) :

Si les coefficients $p_0 = 1$, p_1, $p_2, \ldots, p_h$ ($h \geqq 0$) ont tous des infinis d'ordre fini pour $x=a$, il faut que les autres coefficients aient aussi des infinis d'ordre fini pour $x=a$ et que l'indice caractéristique soit $\overline{\gtrless} h$, pour que l'équation (1) ait au moins $m^2 - h$ intégrales régulières linéairement indépendantes. De là il s'ensuit que, si tous les coefficients ont pour $x=a$ des infinis d'ordre fini et que l'indice caractéristique soit h, l'équation différentielle a tout au plus $m-h$ intégrales régulières linéairement indépendantes. Si $h=0$, l'équation en a autant, d'après un théorème de M. Fuchs (t. 66); pour $h>0$, il y a des exceptions. Pour approfondir les recherches sur le cas $h>0$, M. Thomé étudie les propriétés du facteur intégrant de l'équation différentielle et celles de l'équation qu'on obtient en l'intégrant une première fois.

Si l'on a mis (n° 2) les intégrales d'une équation différentielle linéaire et homogène quelconque sous la forme

$$y_1 = v_1, \quad y_2 = v_1 \int v_2\,dx, \quad \ldots, \quad y_m = v_1 \int dx\, v_2 \ldots \int v_m\,dx,$$

l'équation obtenue par la première intégration de (1) sera celle-ci :

$$\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + l_1 \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \ldots + l_{m-1} y = f(y) = C(v_1 v_2 \ldots v_m),$$

où C est constant, et $f(y) = 0$ contient les intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$; $(\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_m)^{-1}$ est la forme du multiplicateur intégrant M, qui est égal à $e^{\int (p_1 - l_1)\,dx}$, et satisfait à l'équation différentielle homogène et linéaire

$$(2)\quad \frac{d^m \mathrm{M}}{dx^m} - \frac{d^{m-1}(p_1 \mathrm{M})}{dx^{m-1}} + \frac{d^{m-2}(p_2 \mathrm{M})}{dx^{m-2}} - \ldots + (-1)^m p_m \mathrm{M} = 0,$$

équation obtenue d'une autre manière par Lagrange ([1]). L'indice caractéristique de (2) est le même que celui de (1). Si l'équation (2) a une intégrale telle que

$$\mathrm{M} = e^{w}(x-a)^r \sum_0^{\infty} \mathrm{C}_a (x-a)^a, \quad \text{où} \quad w = \sum_1^{n} \mathrm{C}_{-a}(x-a)^a,$$

les intégrales régulières de (1) sont aussi comprises dans l'équation $f(y) = 0$, dont l'indice caractéristique a été abaissé d'une unité (n° 4).

Après cela, M. Thomé étudie (n° 5) les équations différentielles dont l'indice caractéristique est 1. La condition nécessaire et suffisante pour qu'elles aient $m - 1$ intégrales régulières linéairement indépendantes consiste en ce qu'il existe une intégrale de la forme

$$e^{\int p_1 dx}(x-a)^r \sum_0^{\infty} \mathrm{C}_a (x-a)^{-a}, \quad \text{où} \quad r = -\left[\frac{p_2}{p_1}(x-a)\right]_{x=a}, \quad \mathrm{C}_0 \gtrless 0;$$

c'est la convergence de cette série qui est décisive. A l'aide de la forme $(\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_m)^{-1} = \mathrm{M}$ du facteur intégrant, l'auteur forme encore des équations différentielles ayant leur indice caractéristique $h > 0$, et dans lesquelles le nombre des intégrales régulières linéairement indépendantes varie entre h et 0.

Enfin M. Thomé développe encore, par une voie différente de celle qu'a suivie M. Fuchs, la forme générale d'un système d'intégrales.

Schwarz (H.-A.). — *Sur les cas où la série hypergéométrique de Gauss représente une fonction algébrique de son quatrième élément.* (44 p., 2 pl.)

Ce Mémoire s'occupe de la solution du problème suivant : « Trouver tous les cas où l'équation différentielle de la série hyper-

(1) *Miscellanea Taurinensia,* t. III; — *OEuvres de Lagrange,* t. I.

géométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ possède une intégrale algébrique. » L'auteur en a déjà fait une communication à la Section mathématique de la *Société Helvétique des Sciences naturelles* (août 1871), et il a aussi publié un extrait de ces recherches dans les Actes de cette Société.

Les Mémoires de Gauss, de Kummer et de Riemann relatifs à la série hypergéométrique présentent plusieurs cas où elle se réduit à une fonction algébrique de x, et ils signalent même diverses voies qui conduisent à la découverte d'un plus grand nombre de ces cas; cependant la question de trouver la totalité des cas possibles n'a pas été abordée par ces illustres géomètres.

L'auteur a divisé son Mémoire en sept Articles.

Le premier discute tous les cas où l'équation différentielle possède une intégrale algébrique dont la dérivée logarithmique est une fonction rationnelle de x. Dans cette hypothèse, une ou plusieurs des séries qui servent à exprimer des intégrales particulières n'ont qu'un nombre fini de termes.

Dans le deuxième Article, l'auteur commence par démontrer que l'intégrale générale de l'équation différentielle de la série hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ ne saurait être une fonction algébrique de x que lorsque les trois premiers éléments α, β, γ sont des nombres rationnels. De plus, si le quotient de deux intégrales particulières et linéairement indépendantes est une fonction algébrique de x, l'intégrale générale dépend aussi algébriquement de x. Ce quotient satisfait à une équation différentielle du troisième ordre et du second degré, équation très-importante pour le problème proposé, vu que l'auteur réussit à trouver, par voie géométrique, tous les cas où elle possède une intégrale algébrique.

Le troisième Article contient la recherche des propriétés de cette nouvelle équation différentielle. Il s'agit surtout de déterminer les variations que subissent les intégrales en s'approchant d'un point singulier. En classant les valeurs singulières de la variable indépendante d'une équation différentielle, M. Weierstrass les distingue en *valeurs essentiellement singulières,* c'est-à-dire qui sont des points de ramification pour l'intégrale générale, et en *valeurs non essentiellement singulières,* où l'intégrale générale ne présente pas de ramification. Par suite, l'auteur cherche la condition nécessaire et suffisante pour que, dans l'équation différentielle proposée, une valeur singulière de x soit non essentiellement singulière. Il trouve que, quand on considère la représentation conforme qui convient au quotient de deux intégrales particulières et linéairement indépendantes de l'équation différentielle de la série hypergéométrique, chacun des deux demi-plans engendrés par l'axe réel dans le plan des x correspond à un triangle dont les côtés sont des lignes droites ou des arcs de cercle, et dont les angles dépendent, d'une manière simple, des nombres α, β, γ.

La recherche du rapport de situation qu'ont les cercles auxquels appartiennent les côtés de ce triangle d'arcs de cercle et l'établissement de la loi qui gouverne la continuation analytique de la représentation géométrique mentionnée tout à l'heure font l'objet du quatrième Article. Cette loi revient à celle de la symétrie par rapport à une ligne droite, si le côté du triangle au delà duquel la continuation va s'effectuer est rectiligne ; mais, pour le cas général, cette symétrie est remplacée par l'affinité géométrique qui se produit au moyen de la transformation par rayons réciproques, affinité que l'auteur appelle symétrie par rapport à un cercle. Ces considérations ramènent le problème primitif de théorie des fonctions à une question de Géométrie : Trouver tous les triangles d'arcs de cercle qui, étant multipliés selon la loi de symétrie, conduisent à un nombre *fini* de triangles d'arcs de cercle qui diffèrent en forme et situation.

Cinquième Article. — S'il y a une circonférence coupant à angle droit les trois cercles auxquels appartiennent les côtés du triangle, le nombre des répétitions de ce triangle, différentes l'une de l'autre, sera infini ; d'où il résulte que, dans ce cas, le quotient considéré sera toujours une fonction transcendante de x. Si le triangle d'arcs de cercle qui régit la recherche est entièrement renfermé dans le cercle orthogonal, il s'ensuit encore que cette circonférence orthogonale établit une barrière qui ne permet pas de former la continuation analytique de la fonction à l'extérieur. M. Weierstrass a signalé le premier l'existence de la circonstance remarquable que nous venons de décrire, savoir qu'une fonction analytique peut être bornée quelquefois à une aire fixée, d'où elle ne peut sortir ([1]).

([1]) *Monatsberichte der Berl. Akademie,* 1866, p. 617.

Le sixième Article a pour objet la recherche des cas où le triangle d'arcs de cercle peut être transformé en un triangle sphérique par rayons réciproques. Or, pour que la fonction qui préside à la représentation soit algébrique, il est nécessaire et suffisant qu'il existe un nombre *fini* de répétitions symétriques et égales, mais différentes les unes des autres, quand nous formons toutes les répétitions de ce triangle sphérique suivant la loi de symétrie; par conséquent, il faut que les trois plans du triangle sphérique soient les plans de symétrie d'un corps qui ne possède qu'un nombre fini de plans de symétrie. Le problème qui en résulte, et qui a été déjà résolu par Steiner, conduit aux pyramides régulières (doubles) et aux polyèdres réguliers. Ces considérations servent à établir les conditions nécessaires et suffisantes pour que le triangle sphérique forme, avec ses répétitions égales et symétriques, une surface de Riemann, étendue sur la surface de la sphère. Ainsi, quand aucun des angles du triangle d'arcs de cercle n'est un multiple de π, on peut reconnaître, à l'aide d'un petit calcul et d'une table donnée, si dans un cas spécial ces conditions sont remplies ou non. De là dérivent quinze types différents, qui correspondent chacun à un nombre infini de systèmes de valeurs de α, β, γ, de sorte que $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ devient pour ces cas une fonction algébrique de x. A la fin de l'Article on trouve quelques exemples.

Le septième Article est consacré à l'étude des cas où quelques-uns des points singuliers de l'équation différentielle de la série hypergéométrique et de l'autre du troisième ordre sont non essentiellement singuliers.

Meyer (O.-E.). — *Sur le mouvement pendulaire d'une sphère dans l'air.* (12 p.)

Dans les raisonnements de son précédent Mémoire, t. 73, p. 31 (voir *Bulletin*, t. III, p. 239), l'auteur avait supposé que le milieu environnant était incompressible, ce qui fait que les formules obtenues par lui ne s'appliquent qu'au peu d'expériences faites dans l'eau par Bessel. Quoique les mêmes formules ne satisfassent pas moins aux mesures exécutées sur les pendules oscillant dans l'air, leur démonstration est sujette à des objections fondées. C'est pourquoi l'auteur a traité de nouveau la question pour un pendule oscillant dans l'air, et il a trouvé que ses anciennes formules ne se prêtent pas en toute rigueur à cette nouvelle application, mais qu'on peut pourtant s'en servir, parce que les grandeurs qui s'y joignent sont insensibles par leur petitesse. Le calcul, d'ailleurs très-semblable à celui du premier Mémoire, n'admet, comme alors, que des oscillations infiniment petites. Les observations de pendules qui ont été faites dans l'air peuvent donc être soumises au calcul, comme si les oscillations avaient eu lieu dans un milieu incompressible. Cependant l'auteur en avait donné une raison erronée dans son premier Mémoire, en disant alors qu'il n'y aurait pas de condensations et de dilatations sensibles en avant et en arrière du pendule, pourvu que celui-ci allât assez lentement. M. Meyer voit maintenant la cause du phénomène dans une autre circonstance : c'est que chaque condensation et dilatation va se propager dans l'air et s'éloigner du pendule avec la vitesse de propagation du son; partant, elles ne s'y feront plus sentir.

Kiepert (L.). — *Addition au Mémoire sur la division de la lemniscate en dix-sept parties.* (1 p.) *Voir* plus haut, p. 237. M. Kiepert reconnaît la priorité de la solution du problème trouvée par Wichert en 1846, et fait voir en quoi elle diffère de la sienne.

D[r] E. Lampe.

BULLETTINO di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche, pubblicato da B. Boncompagni (1). — In-4°.

T. IV, 1871.

Narducci (E.). — *Sur une traduction italienne, faite au* XIV[e] *siècle, du* Traité d'Optique *d'Alhazen, mathématicien du* XI[e] *siècle, et sur d'autres travaux de ce savant.* (48 p.)

M. Narducci démontre que le célèbre astronome arabe Alhazen, auteur du *Traité d'Optique* traduit par Risner (2), est le même que Alhaçan (ou Mohammed ben Alhaçan ben Alhaïtam), dont les divers travaux mathématiques ont été signalés par Casiri (3) et par

(1) Voir *Bulletin*, t. I, p. 96.
(2) *Opticæ Thesaurus Alhazeni Arabis.* — Basileæ, 1572.
(3) *Bibliotheca Arabico-Hispanica Escurialensis.* — Matriti, 1760.

Woepcke (¹), et le même aussi que Hassan ben Haïthem, auteur d'un « Traité des Connues géométriques », traduit par M. L.-Am. Sédillot (²).

CURTZE (M.). — *Sur l'orthographe du nom et sur la patrie de Witelo* (*Vitellion*). (29 p.; fr.)

D'après l'examen d'un grand nombre de manuscrits de la *Perspectiva Vitellionis,* M. Curtze conclut :

1° Que le vrai nom de l'auteur de cet Ouvrage est *Witelo;*

2° Que ce nom, que l'on rencontrait très-fréquemment en Thuringe au XIIIᵉ siècle, est d'origine allemande;

3° Que Witelo est né probablement dans une ville de Pologne, d'un père thuringien, et que l'opinion qui le ferait descendre de l'ancienne famille polonaise des Ciolek, par la raison que Vitellio serait la traduction latine du mot *ciolek* (veau), n'a aucun fondement sérieux.

BONCOMPAGNI (B.). — *Sur un manuscrit de l'*Optique *de Vitellion cité par Fra Luca Pacioli.* (4 p.)

FRIEDLEIN (G.). — *Des Définitions attribuées à Héron.* (29 p.; lat.)

L'Ouvrage qui nous est parvenu sous le nom du célèbre géomètre et mécanicien d'Alexandrie semble être, d'après M. Friedlein, une composition trop médiocre pour appartenir à cet auteur. M. Friedlein donne une nouvelle édition corrigée du texte grec, en l'accompagnant d'une traduction latine.

BONCOMPAGNI (B.). — *Sur les Définitions de Héron d'Alexandrie.* (5 p.)

CATALAN (E.). — *Sur un article du* Journal des Savants. (8 p.; fr.)

L'article auquel répond M. Catalan est un compte rendu du *Bullettino di Bibliografia,* etc., publié par M. Bertrand dans le *Journal des Savants,* octobre 1870.

NARDUCCI (E.). — *Additions à l'article intitulé : « Sur une tra-*

(¹) *L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmî.* — Paris, 1851.

(²) *Nouveau Journal Asiatique,* mai, 1834.

duction italienne, faite au XIV[e] *siècle, de l'*Optique *d'Alhazen, etc.*» (3 p.)

CURTZE (M.). — *Sur quelques écrits imprimés, inconnus jusqu'à présent, de* DOMENICO MARIA NOVARA *de Ferrare. Notices communiquées, sur la demande de M. le prince Boncompagni, à la Société Copernicienne des Sciences et des Arts de Thorn, le 27 juin et le 15 août* 1870. (10 p.)

L'original allemand de cet article a paru dans le Recueil intitulé : *Altpreussische Monatschrift,* publié à Königsberg. Les écrits de Novara qui y sont signalés sont des almanachs (*Prognostica*) pour les années de 1500 à 1504.

MARTIN (Th.-H.). — *Sur des instruments d'Optique faussement attribués aux anciens par quelques savants modernes.* (74 p.; fr.)

L'auteur de cet intéressant travail résout négativement les questions suivantes :

1° Les anciens ont-ils eu des lunettes d'approche, des lunettes astronomiques ou des télescopes à miroir?

2° Ont-ils eu des microscopes, des loupes, et des lunettes pour les myopes ou pour les presbytes?

Il conclut, en outre, que les télescopes n'ont pas été connus avant le commencement du XVII[e] siècle; que l'invention du microscope n'est pas antérieure aux dernières années du XVI[e] siècle; que l'invention des lunettes de presbyte ou de myope date du XIII[e] siècle (vers 1285).

STEINSCHNEIDER (M.). — *Sur quelques passages d'écrits du moyen âge, relatifs à l'aimant.* (46 p.)

Ce Mémoire contient les résultats des recherches de l'auteur sur divers Ouvrages, la plupart hébreux ou arabes, relatifs à l'aimant.

BERTELLI (le P.). — *Sur deux manuscrits du Vatican de l'*Epistola de Magnete *de Pierre Peregrinus de Maricourt, et sur les premières observations de la déclinaison magnétique.* (29 p.)

BONCOMPAGNI (B.). — *Sur les éditions de l'*Epistola de Magnete *de P. Peregrinus de Maricourt.* (8 p.)

BONCOMPAGNI (B.). — *Sur un opuscule de Domenico Maria Novara.* (2 p.)

Genocchi (A.). — *Notice sur la vie et les écrits de Félix Chiò.* (18 p.)

Voir *Bulletin,* t. III, p. 69. Cette Notice est suivie d'un Catalogue des travaux de Félix Chiò, rédigé par M. le prince Boncompagni (20 p.).

Sédillot (L.-Am.). — *Des savants arabes et des savants d'aujourd'hui, à propos de quelques rectifications. Lettre à M. le prince Boncompagni.* (18 p.; fr.)

Réponse à des articles de MM. Bertrand et Th.-H. Martin, publiés dans le *Journal des Savants* et dans le *Bullettino.*

Friedlein (G.).— *Victorii Calculus, ex codice Vaticano editus.* (21 p.)

Texte latin de cet opuscule, précédé d'une Préface de l'éditeur.

Martin (Th.-H.) — *Quelques mots de réponse à M. Sédillot.* (2 p.; fr.)

Martin (Th.-H.). — *Ptolémée, auteur de l'*Optique *traduite au latin par* Ammiratus Eugenius Siculus *sur une traduction arabe incomplète, est-il le même que Claude Ptolémée, auteur de l'*Almageste? (4 p.; fr.)

M. Martin se prononce pour l'affirmative.

Boncompagni (B.). — *Sur une traduction latine de l'*Optique *de Ptolémée.* (22 p.).

Jacoli (F.). — *Sur un Commentaire de Benedetto Vittori, médecin de Faenza, au* Tractatus proportionum *d'Albert de Saxe.* (5 p.)

Boncompagni (B.). — *Sur le* Tractatus proportionum *d'Albert de Saxe.* (14 p.)

Boncompagni (B.). — *Additions et corrections à l'article intitulé : « Sur les définitions de Héron d'Alexandrie ».* (1 p.)

A. P.

MEMORIE DELL' ACCADEMIA DELLE SCIENZE DELL' ISTITUTO DI BOLOGNA (¹).

2e Série, t. IX; 1869.

BELTRAMI (E.). — *Recherches sur la Géométrie des formes binaires cubiques.* (51 p.)

Utilisant le mode de représentation géométrique des quantités complexes découvert par Argand et vulgarisé par les travaux de Gauss et de Cauchy, l'auteur en a fait l'application systématique à la théorie des formes binaires, tant en vue d'éclaircir cette théorie par l'évidence qu'y apportent les constructions géométriques convenablement choisies, que pour faire participer la Géométrie elle-même aux avantages qui peuvent résulter d'une telle application. Après avoir rappelé sommairement les propositions les plus essentielles de la théorie analogue relativement aux formes quadratiques, et les travaux de Möbius et de M. Bellavitis sur ce sujet, M. Beltrami expose les résultats de ses propres recherches sur les formes binaires cubiques. Les propriétés développées, étant relatives à des figures situées dans un plan, se présentent sous une forme qui surpasse beaucoup en clarté et en évidence le mode d'exposition de l'ancienne théorie, où l'on s'est borné jusqu'ici à considérer des points placés en ligne droite. On peut voir par cet exemple combien l'introduction des variables complexes apporterait de facilité dans la théorie générale des formes binaires.

T. X; 1870.

CREMONA (L.).— *Sur les intégrales à différentielle algébrique.* (33 p.)

Ce Mémoire est divisé en trois Parties. Dans le premier Chapitre, intitulé : « Réduction des intégrales abéliennes aux trois espèces », et dans le troisième, intitulé : « Théorème d'Abel », l'auteur a eu pour objet les matières traitées dans les premiers paragraphes du Livre de MM. Clebsch et Gordan (²), et il les expose sous une forme beaucoup plus voisine de l'intuition géométrique, ce qui lui permet d'obtenir sur quelques points de notables simplifications. Le second Chapitre : « Formation des intégrales de 3e et de 2e es-

(¹) Voir *Bulletin*, t. I, p. 219.
(²) *Theorie der Abel'schen Functionen.*

pèce », est nouveau pour le fond; l'auteur y forme les intégrales normales de 3^e espèce d'une manière toute différente de celle qu'ont employée MM. Clebsch et Gordan, et en tire, comme cas particulier, les intégrales de 2^e espèce, sans rencontrer la difficulté algébrique à laquelle il est fait allusion dans la page 28 de l'Ouvrage cité.

MICHEZ (J.). — *Sur la détermination des erreurs de position des fils du micromètre à rayons.* (18 p., 1 pl.)

Cet instrument, connu sous le nom de *réticule de Bradley,* se compose, comme on sait, de quatre lamelles métalliques formant entre elles des angles de 45 degrés. Bien que présentant quelques inconvénients, il n'en est pas moins un des appareils les plus commodes et les plus simples que l'on puisse adapter au foyer d'une lunette parallactique pour mesurer la distance des astres en ascension droite et en déclinaison. Les formules données par Lalande et par Delambre pour l'usage de cet instrument supposent, pour simplifier, que les écarts des fils sont exactement de 45 degrés, ce qui ne saurait être généralement admis. L'auteur détermine, dans son travail, la grandeur des erreurs de position des fils, et l'influence de ces erreurs sur le temps du passage d'un astre derrière ces fils.

CHELINI (D.). — *Sur la composition géométrique des systèmes de droites, d'aires et de points.* (48 p.)

« Exposer les lois géométriques qui président à la composition et à la transformation des systèmes soit de droites, soit d'aires, soit de points affectés de coefficients, abstraction faite de toute idée de force et de vitesse, tel est l'objet du présent écrit. Dans d'autres Mémoires, l'auteur a souvent touché ce sujet, mais toujours partiellement; ici, il se propose avant tout de mettre en relief le principe d'unité qui en pénètre et en anime, pour ainsi dire, toutes les parties, en les rattachant à une théorie simple et élémentaire, propre à faciliter aux commençants l'accès de la Géométrie analytique et synthétique, et aussi de la Mécanique. L'auteur s'est étudié à exposer d'une manière purement géométrique les grandes conceptions de Poinsot et de Chasles sur la composition et la réduction des forces et des rotations simultanées, conceptions qui pourraient peut-être servir de base à une nouvelle exposition des théories récentes de Plücker, en ce qui regarde du moins les progrès de la Mécanique. »

Piani (D.). — *Sur le centre de gravité; considérations historiques et critiques.* (42 p., 1 pl.)

Ce travail est divisé en trois Articles. Dans le premier, l'auteur s'occupe de la *règle centrobarique,* connue sous le nom de théorème de Guldin, et dont on rencontre déjà l'énoncé dans ce qui nous est parvenu des Ouvrages de Pappus. Il fait voir que Guldin aurait pu démontrer sa règle d'un trait de plume, en employant les infiniment petits de Kepler et de Grégoire de Saint-Vincent. Le second Article est relatif aux distances du centre de gravité à tous les points d'un système. L'auteur revendique la priorité de la découverte du théorème de minimum de la somme des carrés de ces distances ([1]), en faveur de l'astronome Petronio Matteucci, qui a publié en 1757, dans les Mémoires de l'Académie de Bologne, un travail intitulé : *Animadversiones quædam pro minimo, quod in æquilibrio virium invenitur, juxta distantiarum fonctionem quamlibet attrahentium.* Le troisième Article est relatif aux applications à l'Optique, et en particulier à la règle de Newton pour le mélange des couleurs.

3e Série, t. I; 1871.

Santagata (D.). — *Sur la vie et les Ouvrages de Domenico Piani.* (45 p.)

Cremona (L.). — *Sur les lignes de courbure des surfaces du second ordre.* (19 p.)

« Ce travail se compose de deux Parties, l'une concernant la théorie des lignes de courbure des surfaces en général, l'autre contenant l'application de cette théorie aux surfaces du second ordre.

» Dans pla remière Partie, l'auteur met en évidence l'existence, dans toute surface, de deux lignes de courbure, c'est-à-dire de la section à l'infini et de la courbe de contact avec la développable circonscrite en même temps à la surface et au cercle imaginaire à l'infini. Ces lignes sont algébriques, dès que la surface est algébrique.

([1]) Attribué généralement à Carnot et à Lhuilier.

» Le procédé ordinaire, qui consiste à considérer les lignes de courbure comme celles qui, en un point quelconque de la surface, sont orthogonales et ont leurs tangentes conjuguées entre elles, établit un lien intime entre l'équation différentielle de ces lignes et deux autres équations différentielles, relatives l'une aux lignes (cycliques) dont les tangentes rencontrent le cercle imaginaire à l'infini, l'autre aux courbes asymptotiques. L'auteur introduit une autre équation différentielle, que l'on peut substituer à celle des lignes cycliques, savoir : l'équation différentielle des courbes de contact de la surface donnée avec les cônes circonscrits, dont les sommets sont à l'infini sur le cercle imaginaire. Cette nouvelle équation s'intègre immédiatement, et l'intégrale est algébrique toutes les fois que la surface donnée est elle-même algébrique. L'intégrale complète de cette équation donne précisément la seconde des lignes de courbure mentionnées ci-dessus.

» L'auteur trouve, sous forme homogène et symétrique (tant par rapport aux variables qu'aux différentielles), l'équation différentielle des lignes de courbure, et les autres équations différentielles dont on vient de parler, en supposant toutefois que la surface soit algébrique et représentable point par point sur un plan.

» Les formules établies dans ce Mémoire le sont en vue d'applications que l'auteur réserve pour une autre occasion. Pour le moment, il se borne, dans la seconde Partie, à considérer l'exemple d'une surface à centre du second ordre. La méthode par laquelle il détermine l'équation finie des lignes de courbure consiste en ce que, la surface étant représentée sur un plan, et les lignes de courbure supposées algébriques, quand on connaît les images de cinq d'entre elles (lesquelles doivent être des courbes d'un même réseau), on trouve l'intégrale complète précisément comme s'il s'agissait de construire par tangentes une conique dont cinq tangentes sont données. Il est évident que ce procédé pourra servir à la recherche des lignes de courbure, des lignes asymptotiques, et en général des lignes formant une série telle qu'il n'en passe pas deux par un même point de la surface, dans le cas, bien entendu, où la surface est algébrique et représentable sur un plan, et où, de plus, les courbes cherchées sont algébriques. »

CHELINI (D.). — *Sur la nouvelle Géométrie des complexes*. (29 p.)

« Les lois qui président à la composition des systèmes de droites, d'aires et de points, bien qu'elles se changent en lois mécaniques, ou que les droites soient supposées représenter des forces et des mouvements, n'en sont pas moins purement géométriques et d'une évidence presque intuitive, lorsqu'on les établit de la manière indiquée par l'auteur dans son précédent Mémoire (*voir* p. 248). Ces lois, outre l'avantage de porter un nouveau jour sur les rapports intimes des diverses espèces de coordonnées, ont encore celui de comprendre et d'éclaircir à fond les principes essentiels de la Géométrie des complexes, dernière œuvre, en partie posthume, de l'illustre Plücker. Dans le présent Mémoire, l'auteur se propose d'établir ces principes sur leurs vraies bases, en commençant par la théorie de la connexion projective des figures, dans l'exposition de laquelle, comme dans tous ses développements successifs, il cherche avant tout à atteindre l'unité de plan, l'ordre et la clarté. »

Michez (J.). — *Sur la mesure indirecte des distances.* (28 p., 1 pl.)

L'auteur expose le théorème analytique des instruments inventés et construits par M. I. Porro pour la mesure des distances.

Cremona (L.). — *Sur la transformation rationnelle du 2^e^ degré dans l'espace, dont l'inverse est du 4^e^ degré.* (22 p.)

L'objet de ce Mémoire est la représentation plane d'une certaine surface du 4^e^ ordre, à quatre points doubles. « La surface considérée par l'auteur est, parmi celles du 4^e^ ordre, la première qui ait pu être représentée sur un plan, sans être douée ni d'une ligne multiple, ni d'un point triple. Elle n'a que quatre points doubles, dont trois sont coniques, tandis que le quatrième est uniplanaire, et le plan tangent correspondant coupe la surface suivant quatre droites concourantes en ce même point. La surface ne possède pas d'autres droites, et elle renferme un nombre limité de coniques. L'auteur a obtenu cette surface, qui n'a pas encore été étudiée par les géomètres, en appliquant à une surface du second degré une certaine transformation rationnelle du second degré, dont l'inverse est du 4^e^ degré. Dans la représentation plane d'ordre minimum, les images des sections planes de la surface en question sont des courbes du 6^e^ ordre. »

Beltrami (E.). — *Sur les principes fondamentaux de l'Hydrodynamique rationnelle.* (Articles I et II; ensemble 104 p.)

Nous réunirons ici les analyses de ces deux Articles, bien que le second fasse partie du tome II des *Memorie*, actuellement en cours de publication. « L'intérêt et le grand nombre des résultats acquis pendant les vingt dernières années dans cette branche si importante de la Mécanique analytique qui constitue l'Hydrodynamique ont engagé l'auteur à en essayer la coordination systématique, en prenant pour base les équations générales, données par d'Alembert, par Euler et par Lagrange, et y rattachant les découvertes plus récentes. Parmi celles-ci, après les beaux travaux analytiques de Cauchy, le premier rang appartient aux Ouvrages de Helmholtz, non-seulement à cause de leur portée spécialement hydrodynamique, mais encore à cause de leur liaison avec les lois de l'électromagnétisme, liaison dans laquelle il est permis d'entrevoir pour l'avenir un champimmense de recherches physico-mathématiques.

» Le premier article ne comprend que la partie, pour ainsi dire, générale du travail projeté par l'auteur, et il est consacré surtont à l'étude du mouvement infinitésimal des fluides, étude dans laquelle il a paru nécessaire de procéder avec beaucoup d'ordre et de rigueur, et avec des développements suffisants, afin d'enlever tout prétexte aux équivoques qui ont donné lieu naguère à une longue polémique entre deux illustres champions de la Science. L'auteur traite d'abord ce sujet sous le rapport cinématique, puis sous le rapport dynamique; il démontre, en particulier, qu'il existe, en chaque point d'un fluide en mouvement, trois directions orthogonales (variant généralement avec le temps), possédant des propriétés analogues à celles des axes principaux d'inertie dans les solides. Ces propriétés apparaissent plus évidentes et plus dignes d'attention, quand on compare le mouvement réel d'une molécule fluide avec le mouvement idéal de la même molécule, supposée instantanément solidifiée. Ces préliminaires établis, l'auteur passe à la démonstration des nouveaux théorèmes hydrodynamiques de Helmholtz et de W. Thomson, en excluant toute hypothèse superflue sur la nature des fluides, et admettant seulement l'existence d'un potentiel des forces extérieures, comme l'ont fait tous les géomètres.

» Dans le second Article, M. Beltrami, poussant plus loin l'analyse, aborde la considération du mouvement géométrique d'une portion de la masse fluide. Pour cela, il a suivi une méthode nouvelle, fondée principalement sur le théorème de Green, en obtenant directement et avec facilité non-seulement les théorèmes connus de Helmholtz et de Thomson, mais encore d'autres qui n'ont pas été remarqués jusqu'ici. Parmi les résultats les plus saillants auxquels M. Beltrami est parvenu dans cette seconde partie de son travail, on peut citer celui qui est relatif à l'action à distance accompagnant la dilatation ou la condensation cubique de chaque particule fluide, action qui suit la loi newtonienne de la répulsion ou de l'attraction respectivement. D'autres résultats intéressants découlent d'une discussion rigoureuse de la forme que prennent, pour les fluides, les trois principes généraux connus : des forces vives, du mouvement du centre de gravité, et des aires. »

T. II; 1872 (1er fascicule).

Cremona (L.). — *Représentation plane de quelques surfaces algébriques à courbes cuspidales.* (11 p.)

« Les divers géomètres, qui se sont occupés jusqu'ici de la représentation des surfaces algébriques sur un plan, ont déjà traité un grand nombre d'exemples dans lesquels la surface proposée est douée d'une courbe double ou nodale.

» Quant aux surfaces possédant une courbe à rebroussement ou cuspidale, on a bien indiqué la voie [1] par laquelle on pourrait les déduire de la théorie des transformations rationnelles de l'espace à trois dimensions; mais en réalité aucune de ces surfaces n'a encore été, à la connaissance de l'auteur, étudiée de manière à en fournir la représentation effective. C'est pour cette raison qu'il exécute une telle étude sur deux cas, qui, à cause de leur simplicité, donnent des résultats très-instructifs. Le procédé et les calculs employés par l'auteur pour obtenir la démonstration proposée ne sont pas susceptibles d'une analyse abrégée. »

---

[1] *Nachrichten v. d. K. Gesellschaft d. Wiss. zu Göttingen,* 1871, n° 3.

GIORNALE DI MATEMATICHE, pubblicato da G. BATTAGLINI e F. FERGOLA (¹).

T. X, 1872 (suite et fin).

JANNI (G.). — *Exposition de la théorie des substitutions.* (2ᵉ Article). (14 p.)

Dans cette seconde partie de son Mémoire, l'auteur expose les propriétés des congruences relatives aux substitutions linéaires. L'Article se divise dans les Chapitres suivants : 1. Théorie de Galois. — 2. Résidus quadratiques. — 3. Congruences du second degré à plusieurs inconnues.

BATTAGLINI (G.). — *Sur le mouvement géométrique infinitésimal d'un système rigide.* (10 p.)

Pour faire suite aux Notes relatives à la *Statique* des systèmes de forme invariable, traitée suivant les conceptions géométriques et mécaniques de Plücker, l'auteur entreprend de traiter par la même méthode la *Cinématique* de ces mêmes systèmes. Dans la présente Note, rapportant le système à un tétraèdre fondamental, il démontre les propriétés, dues à M. Chasles, concernant le mouvement infinitésimal d'un système rigide.

HESSE (O.), traduit par VALERIANI (V.). — *Exposition élémentaire de la théorie des déterminants* (²). (31 p.)

CASSANI (P.). — *Études sur les formes binaires.* (5 p.)

Cette Note contient l'interprétation géométrique du jacobien et du hessien de la forme syzygétique qui représente une involution d'ordre n.

FRATTINI (G.). — *Énoncés touchant les coordonnées curvilignes.* (1 p.)

ISÈ (E.), CROCCHI (L.), CASSANI (P.). — *Solutions de questions proposées dans ce Journal.*

TRUDI (N.). — *Sur les équations binômes.* (38 p.)

L'auteur se propose, dans ce Mémoire, de mettre en relief certaines propriétés intéressantes des équations binômes, propriétés

---

(¹) Voir *Bulletin*, t. I, p. 135, et t. IV, p. 196.

(²) Voir *Bulletin*, t. I, p. 303.

en partie nouvelles, en partie connues, mais laissées de côté, même dans les Traités étendus d'Algèbre. Le Mémoire se divise en deux Sections, dont la première est consacrée à l'exposition de quelques notions relatives à la théorie des nombres, et se compose des Articles suivants : 1. Quelques propriétés des nombres. — 2. Sur les résidus quadratiques, et sur le symbole de Legendre, généralisé par Jacobi. La seconde Section, qui traite spécialement des équations binômes, contient les Articles dont voici les titres : 1. Quelques propriétés des racines primitives. — 2. Facteurs irréductibles. — 3. Sommes des puissances semblables des racines primitives. — 4. Transformations des fonctions entières ou fractionnaires des racines primitives.

Albeggiani (M.). — *Développement d'un déterminant à éléments binômes, et application à quelques questions proposées dans ce Journal.* (15 p.)

Cassani (P.). — *Démonstration d'un énoncé proposé dans ce Journal.* (1 p.)

Battaglini (G.). — *Sur le mouvement géométrique fini d'un système rigide.* (7 p.)

En rapportant le système à un tétraèdre fondamental, l'auteur démontre les propriétés dues à M. Chasles, et relatives au mouvement fini d'un système rigide.

Crocchi (L.). — *Théorème de Géométrie. Observations et questions.* (5 p.)

Ovidio (E. d'). — *Sur les lignes et les surfaces du second ordre, par rapport auxquelles deux lignes ou deux surfaces données du second ordre sont polaires réciproques.* (7 p.)

L'objet principal de cet Article est la solution, purement géométrique, du problème de la détermination d'une surface du second ordre, par rapport à laquelle deux surfaces données du second ordre sont polaires réciproques.

Paulis (R. de). — *Solutions de quelques questions proposées dans les* Nouvelles Annales. (5 p.)

Aschieri (F.). — *Sur les systèmes de droites.* (4 p.)

Dans cette Note (qui sera continuée dans un fascicule suivant du

Giornale), l'auteur expose certaines propriétés des complexes du premier degré, lesquelles conduisent à un principe de dualité, et à un système de coordonnées tangentielles dans l'espace à quatre dimensions.

Beltrami (E.). — *Annonce de la mort d'Alfred Clebsch.* (2 p.)

Siacci (F.). — *Sur une série, et sur une fonction des coefficients binomiaux.* (11 p.)

La série qui forme l'objet principal de cette Note est celle qui, ordonnée suivant les puissances de x, a pour somme $f\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$. La fonction des coefficients binomiaux, que l'on considère ensuite, est celle qui représente la somme des produits n à n, avec répétitions, des nombres 1, 2,..., r. L'auteur montre la liaison qui existe entre ces recherches et les expressions des nombres de Bernoulli.

Table générale des dix premiers volumes de Giornale *par ordre alphabétique des noms d'auteurs.* (16 p.)

G. B.