Revue bibliographique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 4 (1873), p. 177-196

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1873__4__177_0>

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

FROST (Percival), formerly Fellow of St. John's College, Cambridge, Mathematical Lecturer of King's College. — AN ELEMENTARY TREATISE ON CURVE TRACING. — London, Macmillan & Co., 1872. — In-8°, 208 p., 17 planches. Prix : 16 fr. 25 c.

Cet Ouvrage nous paraît de nature à rendre de réels services aux professeurs de Mathématiques spéciales, et en général à toutes les personnes qui ont à enseigner la Géométrie analytique et les méthodes de construction des courbes. L'auteur donne un exposé élémentaire des différentes règles qu'il faut suivre pour étudier les points singuliers et remarquables, pour déterminer les asymptotes rectilignes et curvilignes, ainsi que la forme générale de la courbe. Chaque Chapitre est accompagné d'assez nombreux exercices, en général très-bien choisis. Voici d'ailleurs un résumé des matières traitées dans les différents Chapitres.

CHAPITRE Ier. — Théorèmes préliminaires, définitions, tracé par points, symétrie. On sait que les définitions relatives aux points singuliers présentent de regrettables incertitudes : par exemple, en nous bornant aux courbes algébriques, un point d'inflexion est celui où la tangente coupe la courbe en trois points consécutifs, et dans ce cas la tangente traverse la courbe, ce qui est bien conforme à la définition générale du point d'inflexion (point où la concavité se change en convexité). Mais comment appeler les points où la tangente a avec la courbe un contact d'ordre impair quelconque, et laisse par conséquent celle-ci d'un même côté? Peut-être conviendrait-il de réserver à ces points la dénomination de points de serpentement, due à Cramer. En tous cas, la question n'est pas réglée. De même pour les points de rebroussement. L'auteur propose d'appeler point d'osculation celui pour lequel les deux branches de la courbe qui viennent se toucher se prolongent toutes les deux, et il réserve le nom de point de rebroussement (*cusp*) aux points où deux branches viennent se terminer en devenant tangentes l'une à l'autre.

CHAPITRE II. — Ordre des quantités infiniment petites, forme des courbes paraboliques dans le voisinage de l'origine. Rebroussement, tangente, courbure.

Chapitre III. — Forme des courbes paraboliques à l'infini; exemples, courbes trigonométriques, règles d'approximation.

Chapitre IV. — Forme des courbes dans le voisinage de l'origine, tangentes simples; direction et valeur de la courbure; points multiples; courbures des branches aux points multiples; points multiples d'ordre supérieur.

Chapitre V. — Forme des branches dont les tangentes à l'origine sont les axes coordonnés.

Chapitre VI. — Asymptotes; points d'intersection à l'infini; asymptotes parallèles aux axes.

Chapitre VII. — Asymptotes non parallèles aux axes; asymptotes des courbes homogènes. L'auteur appelle courbes homogènes celles qu'on obtient en égalant une fonction homogène à une constante.

Chapitre VIII. — Asymptotes curvilignes.

Chapitre IX. — Du triangle analytique et de ses propriétés. C'est dans ce Chapitre que l'auteur expose, sans toutefois lui donner la place et l'importance qu'elle mérite, la célèbre règle connue sous le nom de *parallélogramme de Newton,* et qui forme la base de l'excellent Ouvrage de Cramer : *Introduction à l'Analyse des courbes planes*. Le triangle de De Gua, auquel M. Frost donne la préférence, ne nous paraît pas valoir la peine qu'on le distingue du parallélogramme de Newton.

Chapitre X. — Points singuliers; division en compartiments; courbes spéciales du quatrième degré. Dans ce Chapitre, l'auteur expose une méthode bien connue des professeurs français, et qui peut rendre de grands services pour la construction des courbes, quand les autres sont impuissantes. Supposons, par exemple, que

$$A = B$$

soit l'équation d'une courbe. Il n'y aura des points de ce lieu que dans les régions du plan pour lesquelles A et B seront de même signe. Si donc on peut construire les courbes

$$A = 0, \quad B = 0,$$

et qu'elles découpent le plan en un certain nombre de régions ou compartiments, il y aura un certain nombre de ces régions où A et

B seront de signes contraires, et où, par conséquent, la courbe à construire ne devra pas pénétrer.

L'auteur construit, en particulier, des courbes très-remarquables et réellement compliquées du quatrième ordre.

CHAPITRE XI. — Tracé systématique des courbes; courbes périodiques.

CHAPITRE XII. — Méthode inverse; déterminer l'équation d'une courbe satisfaisant à des conditions données.

Dix-sept planches sont intercalées, comme on le faisait au siècle dernier, dans les différentes parties du Livre. Cela vaut mieux que si on les avait toutes rejetées à la fin, selon l'habitude actuelle. Ajoutons que l'auteur fait usage des méthodes les plus élémentaires et du système de coordonnées cartésiennes, sans se servir en aucune manière du Calcul infinitésimal.

KOPKA (C.), praktischer Ingenieur und Director der technischen Lehr-Anstalt für Bau- und Maschinen-Wesen zu Goslar. — FORMEL-SAMMLUNG AUS DER REINEN MATHEMATIK UND AUS DEN MECHANISCHEN WISSENSCHAFTEN, für praktische Baugewerk- und Maschinen-Meister, sowie für Studirende technischer Lehr-Anstalten. Mit 500 in den Text gedruckten Holzschnitten. — Leipzig, Carl Scholtze, 1873. — In-12, 520 p. Prix : 10 fr. 75 c.

Cet Ouvrage contient un recueil des propositions et des formules qui peuvent être utiles aux personnes qui ont à appliquer les connaissances mathématiques. La première Partie, consacrée plus particulièrement aux Mathématiques pures, comprend : 1° un recueil des propositions de la Géométrie plane, sans aucune démonstration; 2° le tableau des formules d'Algèbre, et la solution des principaux problèmes d'Arithmétique et d'Algèbre; 3° une Table des logarithmes à 5 décimales des 2200 premiers nombres; 4° l'énoncé de la définition et des principales propriétés des courbes les plus célèbres, telles que la cycloïde, les épicycloïdes, la conchoïde, la ligne logarithmique, etc., ainsi que des formules relatives aux tangentes, aux normales et à la rectification des courbes; 5° un recueil donnant la détermination des aires et des volumes des surfaces et des centres de gravité se rapportant aux figures géométriques les plus usuelles; 6° l'indication des constructions géométriques à effectuer pour résoudre plusieurs problèmes, par exemple, pour mener la tangente à une ellipse, etc.; 7° un recueil des formules de la Trigonométrie et leur application à la résolution des triangles; 8° enfin une Table des lignes trigonométriques et de leurs logarithmes; ces Tables sont aussi à 5 décimales.

La deuxième Partie de l'Ouvrage n'est pas moins étendue que la première. Les Tables qu'elle contient se rapportent à la Mécanique pratique, à l'Hydraulique, aux matériaux employés dans les constructions; enfin elle se termine par un résumé des principales propositions et constructions de la Statique graphique. L'ensemble forme un recueil qui nous paraît de nature à pouvoir rendre de réels services. L'auteur a su réunir sous un petit volume un grand nombre de renseignements, qui pourront éviter de longues et pénibles recherches.

СУВОРОВЪ (Θ.). — *О характеристикахъ системъ трехъ измѣреній.* — Казань, 1871 г. (1).

(Analyse faite par l'Auteur.)

Dans mon Mémoire « Sur les caractéristiques des systèmes de trois dimensions », j'ai admis, à l'exemple de Riemann, que l'élément linéaire d'un système est égal à la racine carrée d'une fonction homogène du second degré des différentielles dX_1, dX_2, dX_3, dans laquelle les coefficients sont des fonctions des variables X_1, X_2, X_3, de sorte que

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} ds^2 = {} & A_{11}dX_1^2 + 2A_{12}dX_1dX_2 + A_{22}dX_2^2 + 2A_{13}dX_1dX_3 \\ & + 2A_{23}dX_2dX_3 + A_{33}dX_3^2. \end{aligned}\right.$$

La forme des fonctions A_{11}, A_{12}, ... dépendra tant du choix des coordonnées que des propriétés du système donné de trois dimensions. En effet, si

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} ds^2 = {} & a_{11}dx_1^2 + 2a_{12}dx_1dx_2 + a_{22}dx_2^2 + 2a_{13}dx_1dx_3 \\ & + 2a_{23}dx_2dx_3 + a_{33}dx_3^2 \end{aligned}\right.$$

est une autre forme de l'élément linéaire, il faut, pour que cette dernière exprime l'élément linéaire du même système, qu'il y ait

---

(1) Souvorof (F.): *Sur les caractéristiques des systèmes de trois dimensions.* — Kazan, 1871. (114 p. gr. in-8°.)

une transformation possible de la première forme dans la seconde; mais, en supposant que x_1, x_2, x_3 soient des fonctions quelconques de X_1, X_2, X_3, on reconnaît la possibilité théorique de ramener trois seulement des coefficients A_{11}, A_{12},... à la forme a_{11}, a_{12},..., les trois autres ne pouvant, en général, prendre les autres formes données. Par conséquent, pour que l'on puisse transformer la forme (1) en (2), les coefficients de cette dernière forme devront nécessairement satisfaire à certaines conditions, au nombre de trois. Pour trouver ces conditions, supposons que x_1, x_2, x_3 soient des fonctions quelconques de X_1, X_2, X_3; substituons dans (2) les valeurs des différentielles dx_1, dx_2, dx_3, et égalons les coefficients des divers produits des différentielles dX dans la forme (2) aux coefficients correspondants de la forme (1). On obtient ainsi six équations de la forme

$$\sum_r \sum_s a_{rs} \frac{\partial x_r}{\partial X_m} \frac{\partial x_s}{\partial X_n} = A_{mn}, \tag{3}$$

les signes de sommation $\sum_r$ et $\sum_s$ s'étendant aux valeurs 1, 2, 3 des indices r et s. Entre ces six équations et leurs dérivées, on peut éliminer les dérivées des x, par rapport aux X, lesquelles seules dépendent des relations arbitraires qui lient entre elles les coordonnées des deux expressions de l'élément différentiel. Le résultat de l'élimination nous fournit les conditions nécessaires pour la transformation de la forme, et de la vérification de ces conditions dépendra la possibilité de transformer l'une des formes dans l'autre. Si ces conditions s'expriment au moyen des valeurs de certaines fonctions invariantes des coefficients A_{11}, A_{12},... et de leurs dérivées, alors ces invariants serviront de caractéristiques relativement au système de trois dimensions.

Le nombre des résultantes de l'élimination se détermine sans difficulté. En s'élevant jusqu'aux secondes dérivées des équations (3), on obtient

$$6(1+3+6) = 60$$

équations, contenant

$$3(3+6+10) = 57$$

quantités à éliminer; par suite, nous aurons trois équations résultantes, contenant les dérivées secondes des coefficients des formes de l'élément linéaire. Outre ces trois conditions nécessaires de la transformation, il existe d'autres conditions renfermant les dérivées du troisième ordre et des ordres supérieurs des coefficients de la forme; mais les trois premières sont les plus simples.

En posant

$$A_{hk}^{\alpha} = \frac{\partial A_{hk}}{\partial X_\alpha}, \quad A_{hk}^{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 A_{hk}}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}, \quad \begin{bmatrix} mn \\ i \end{bmatrix} = A_{mi}^{n} - A_{mn}^{i} + A_{ni}^{m},$$

$$\Omega = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}, \quad \Omega_{hk} = \frac{\partial \Omega}{\partial A_{hk}},$$

$$2V_{lm} = (A_{lm}^{nn} - A_{mn}^{ln} + A_{nn}^{lm} - A_{ln}^{mn}) - \sum_\sigma \sum_\rho \frac{\Omega_{\rho\sigma}}{2\Omega} \left\{ \begin{bmatrix} ln \\ \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} mn \\ \rho \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} nn \\ \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ml \\ \rho \end{bmatrix} \right\},$$

$$2V_{ll} = (2A_{mn}^{mn} - A_{mm}^{nn} - A_{nn}^{mm}) - \sum_\sigma \sum_\rho \frac{\Omega_{\rho\sigma}}{2\Omega} \left\{ \begin{bmatrix} mm \\ \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} nn \\ \rho \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} mn \\ \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} mn \\ \rho \end{bmatrix} \right\},$$

l, m, n étant trois des indices 1, 2, 3, différents entre eux, les signes de sommation s'étendant aux valeurs 1, 2, 3 des indices ρ et σ, et en désignant par les lettres minuscules ω et v des expressions semblables, composées avec les coefficients a_{11}, a_{12}, ... de la seconde forme, les trois résultantes de l'élimination en question se présentent ainsi :

$$\text{(I)} \qquad \frac{1}{\Omega} \sum_p \sum_{p'} A_{pp'} V_{pp'} = \frac{1}{\omega} \sum_p \sum_{p'} a_{pp'} v_{pp'},$$

les signes de sommation s'étendant aux valeurs 1, 2, 3 des indices p, p';

$$\text{(II)} \quad \frac{1}{\Omega^2} \sum_p \sum_{p'} \Omega_{pp'} (V_{qq'} V_{rr'} - V_{qr'} V_{rq'}) = \frac{1}{\omega^2} \sum_p \sum_{p'} \omega_{pp'} (v_{qq'} v_{rr'} - v_{qr'} v_{rq'}),$$

q, q', r, r' étant les restes de la division de $p+1$, $p'+1$, $p+2$, $p'+2$ par 3, et les signes de sommation s'étendant aux mêmes valeurs de p, p';

$$\text{(III)} \qquad \frac{1}{\Omega^2}\sum_{pqr} \pm V_{1p}V_{2q}V_{3r} = \frac{1}{\omega^2}\sum_{pqr} \pm v_{1p}v_{2q}v_{3r},$$

le signe $\sum_{pqr} \pm$ désignant le déterminant des éléments sous le signe sommatoire. Ces trois fonctions, que M. Christoffel avait déjà obtenues avant moi sous une forme générale (voir *Journal de Borchardt*, t. 70), ne contiennent pas les dérivées des x par rapport aux X; par suite, elles ne dépendent pas du choix des coordonnées, et en conséquence elles expriment les conditions nécessaires de la transformation. De plus, la forme de ces conditions est remarquable en ce qu'elles s'expriment par l'égalité de fonctions identiquement semblables des coefficients des formes de l'élément linéaire. De là résulte que, pour la transformation d'une forme de l'élément linéaire en une autre, il est nécessaire que les trois fonctions en question conservent leur valeur dans le passage de l'un des systèmes de variables à l'autre; c'est-à-dire qu'il est impossible de transformer la forme donnée en une autre pour laquelle une quelconque de ces trois fonctions aurait une valeur différente de celle qu'elle a pour la première forme.

Ces fonctions, relativement à un système de trois dimensions, à cause de l'indépendance qui existe entre leurs valeurs et le choix des coordonnées, doivent fournir les propriétés qui caractérisent essentiellement le système, c'est-à-dire qui le distinguent des autres systèmes de trois dimensions, pour lesquels ces fonctions ont une autre valeur. Ainsi, par exemple, pour l'espace, dont l'élément linéaire s'exprime par l'équation

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2,$$

chacune des trois fonctions se réduit à zéro; donc l'espace est un système différent de tous les autres systèmes pour lesquels une quelconque de ces fonctions ne s'annule pas, mais est égale à une grandeur constante quelconque, ou à une fonction des coordonnées du point. La forme de l'élément linéaire d'un tel système ne peut, par aucun choix quelconque de coordonnées, se ramener à la somme des carrés des différentielles des coordonnées. Pour les systèmes de deux dimensions, c'est-à-dire, en langage géométrique, pour les surfaces, il n'existe qu'une seule fonction de cette nature [1], ne changeant pas de valeur par la transformation des coordonnées, et représentant, au point de vue géométrique, la courbure de la surface d'après Gauss. Pour ce qui est des trois fonctions trouvées plus haut, la théorie des systèmes de trois dimensions autres que l'espace est encore trop récente pour que je me décide à donner un nom spécial aux propriétés des systèmes exprimées par ces fonctions. Mais, de même que plusieurs géomètres (Riemann, Kronecker, Beltrami) ont appliqué à ces propriétés la terminologie géométrique, et cela de différentes manières, j'ai cherché, dans le Chapitre III de mon Mémoire, à démêler les lois géométriques des expressions analytiques trouvées. A cette fin, pour mieux apercevoir l'analogie des formules (I), (II) et (III) avec les formules de la Géométrie ordinaire — analogies qui se découvrent en considérant un système de trois dimensions comme un lieu dans un système de quatre dimensions — j'ai sacrifié la généralité à l'avantage d'une intuition plus facile, et j'ai pris, au lieu d'un système de quatre dimensions de la forme la plus générale, un système dont l'élément linéaire est exprimé par la somme des carrés des différentielles des quatre coordonnées, savoir :

$$ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2 + dy_4^2. \tag{4}$$

Je désigne par la lettre y les coordonnées d'un système de quatre dimensions, et je réserve la lettre x pour les coordonnées d'un système de trois dimensions. En considérant ce dernier comme un lieu dans le premier, les coordonnées x joueront le rôle des coordonnées curvilignes sur une surface placée dans l'espace; par suite, semblablement aux coordonnées de l'espace, les coordonnées y des points d'un système de trois dimensions seront des fonctions des coordonnées x, et l'élément linéaire d'un système de trois dimensions, en tant que lieu dans un système de quatre dimensions, sera exprimé par la formule (4).

En substituant, dans (4), aux différentielles dy leurs valeurs en fonction des différentielles dx, et égalant ensuite les coefficients des mêmes différentielles dx dans les formes (1) et (4), on obtiendra les

(1) Casorati : *Ricerca fondamentale per lo studio di una certa classe di proprietà delle superficie curve* (*Annali di Matematica*, t. III, 1860).

coefficients A, et par suite aussi les fonctions V et Ω, exprimées au moyen des dérivées des y par rapport aux x. Puisqu'un système de trois dimensions, considéré comme un lieu dans l'espace de quatre dimensions, peut être représenté par une équation quelconque entre les coordonnées y_1, y_2, y_3, y_4,

$$W = F(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0,$$

nous pourrons regarder une des coordonnées, y_4 par exemple, comme une fonction des trois autres. Alors, en exprimant A, V et Ω au moyen des dérivées de y_4 par rapport à y_1, y_2, y_3, faisant, pour abréger,

$$Q = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y_4}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_4}{\partial y_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_4}{\partial y_3}\right)^2},$$

$$Y = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 y_4}{\partial y_1^2} & \dfrac{\partial^2 y_4}{\partial y_1 \partial y_2} & \dfrac{\partial^2 y_4}{\partial y_1 \partial y_3} \\ \dfrac{\partial^2 y_4}{\partial y_2 \partial y_1} & \dfrac{\partial^2 y_4}{\partial y_2^2} & \dfrac{\partial^2 y_4}{\partial y_2 \partial y_3} \\ \dfrac{\partial^2 y_4}{\partial y_3 \partial y_1} & \dfrac{\partial^2 y_4}{\partial y_3 \partial y_2} & \dfrac{\partial^2 y_4}{\partial y_3^2} \end{vmatrix},$$

et appelant Y_{pq} le déterminant du second ordre, obtenu en supprimant dans Y la $p^{\text{ième}}$ ligne horizontale et la $q^{\text{ième}}$ ligne verticale, on trouve, pour les expressions des fonctions (I), (II), (III) au moyen des dérivées de y_4,

$$(\mathrm{I}_a)\quad \frac{1}{\Omega}\sum_p \sum_{p'} A_{pp'} V_{pp'} = \frac{1}{Q^4}\left(Y_{11} + Y_{22} + Y_{33} + \sum_p \sum_{p'} \frac{\partial y_4}{\partial y_p} \cdot \frac{\partial y_4}{\partial y_{p'}} Y_{pp'}\right),$$

$$(\mathrm{II}_a)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\Omega^2}\sum_p \sum_{p'} \Omega_{pp'}(V_{qq'}V_{rr'} - V_{qr'}V_{rq'}) \\ &= \frac{Y}{Q^8}\left\{\frac{\partial^2 y_4}{\partial y_1^2}\left[1 + \left(\frac{\partial y_4}{\partial y_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_4}{\partial y_3}\right)^2\right] + \frac{\partial^2 y_4}{\partial y_2^2}\left[1 + \left(\frac{\partial y_4}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_4}{\partial y_3}\right)^2\right]\right. \\ &\qquad + \frac{\partial^2 y_4}{\partial y_3^2}\left[1 + \left(\frac{\partial y_4}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_4}{\partial y_2}\right)^2\right] - 2\frac{\partial^2 y_4}{\partial y_1 \partial y_2}\frac{\partial y_4}{\partial y_1}\frac{\partial y_4}{\partial y_2} \\ &\qquad \left. - 2\frac{\partial^2 y_4}{\partial y_1 \partial y_3}\frac{\partial y_4}{\partial y_1}\frac{\partial y_4}{\partial y_3} - 2\frac{\partial^2 y_4}{\partial y_2 \partial y_3}\frac{\partial y_4}{\partial y_2}\frac{\partial y_4}{\partial y_3}\right\}, \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{III}_a)\qquad \frac{1}{\Omega^2}\sum_{pqr} \pm V_{1p}V_{2q}V_{3r} = \frac{Y^2}{Q^{10}}.$$

En extrayant la racine carrée de la dernière expression, d'où

$$(\mathrm{III}_b) \qquad \frac{1}{\Omega}\sqrt{\sum_{pqr} \pm V_{1p}V_{2q}V_{3r}} = \frac{Y}{Q^5},$$

on voit aisément que le second membre a quelque analogie avec la formule de Gauss pour la courbure des surfaces, et qu'il coïnciderait avec cette formule, si nous étendions celle-ci aux trois dimensions, de même qu'elle coïncide avec la formule que Kronecker ([1]) appelle la *courbure* d'un système d'un nombre quelconque de dimensions. En effet, si l'on exprime les dérivées de y_4 au moyen des dérivées partielles de W par rapport aux coordonnées y_1, y_2, y_3, y_4, il vient, en substituant ces valeurs dans la formule (III_b),

$$\frac{1}{(W_1^2 + W_2^2 + W_3^2 + W_4^2)^{\frac{5}{2}}} \begin{vmatrix} 0 & W_1 & W_2 & W_3 & W_4 \\ W_1 & W_{11} & W_{12} & W_{13} & W_{14} \\ W_2 & W_{21} & W_{22} & W_{23} & W_{24} \\ W_3 & W_{31} & W_{32} & W_{33} & W_{34} \\ W_4 & W_{41} & W_{42} & W_{43} & W_{44} \end{vmatrix},$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$W_p = \frac{\partial W}{\partial y_p}, \quad W_{rs} = \frac{\partial^2 W}{\partial y_r \partial y_s}.$$

Mais je ne pense pas que la dénomination de *courbure du système* puisse être légitimement appliquée à cette fonction. En effet, nous sommes habitués à désigner sous le nom de *courbure d'un système,* d'après Gauss, le rapport de l'aire d'un triangle infiniment petit du système donné à l'aire correspondante d'un système à courbure constante positive (système sphérique). C'est ainsi, du moins, que Riemann et Beltrami entendent la courbure des systèmes, et c'est seulement dans ce sens que les systèmes non-euclidiens ou pseudosphériques de ce dernier géomètre auront une courbure constante négative, et les systèmes sphériques une courbure positive. Effectivement, l'élément linéaire d'un système sphérique peut se mettre sous la forme

$$(p) \qquad ds^2 = R^2\left(\frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx^2}{x^2}\right),$$

([1]) *Monatsbericht d. Konigl. Akad. zu Berlin*, August 1869.

où $x^2 = a^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, x_1, x_2, x_3 étant les coordonnées de ce système, R et a des paramètres. La valeur de la fonction (III_b), pour cette forme de l'élément linéaire, devient $\pm \frac{1}{R^3}$, et non $+ \frac{1}{R^2}$, valeur qui, d'après Riemann, devrait être celle de la courbure de ce système Pour les systèmes à courbure constante négative, la fonction (III_b) donne une valeur imaginaire $\sqrt{-\frac{1}{R^6}}$. Il me semble que la seconde dénomination de *condensation du système*, que Kronecker donne à cette fonction à la fin du Mémoire cité, en la comparant aux fonctions de Kummer qui représentent la condensation des rayons lumineux, a une raison géométrique plus simple. En effet, comparons deux systèmes de trois dimensions : le système donné

$$W = F(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0,$$

et un système sphérique, c'est-à-dire à courbure constante positive. Nous trouverons l'équation de ce dernier système, connaissant l'expression (p) de son élément linéaire. Posons, en n'attribuant d'abord à y_1, y_2, y_3, y_4 aucune valeur,

$$R\frac{a}{x} = y_4, \quad R\frac{x_1}{x} = y_1, \quad R\frac{x_2}{x} = y_2, \quad R\frac{x_3}{x} = y_3;$$

en substituant ces valeurs dans (p), il viendra

$$ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2 + dy_4^2,$$
$$R^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2,$$

c'est-à-dire que l'élément linéaire d'un système de trois dimensions à courbure constante positive est l'élement linéaire du lieu géométrique, dans un système à quatre dimensions, représenté par l'équation

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = R^2.$$

Par suite, l'équation de ce lieu sera celle d'un système sphérique de trois dimensions. Je désignerai par les lettres y'_1, y'_2, y'_3, y'_4, pour les distinguer des coordonnées des points du système $W = 0$, les coordonnées du système

$$V = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 - 1 = 0,$$

où j'ai fait, pour plus de simplicité, $R = 1$. Pour chaque point (y_1, y_2, y_3, y_4) du système $W = 0$, on peut trouver un point (y'_1, y'_2, y'_3, y'_4) du système $V = 0$, pour lequel on aura

$$\frac{\partial y'_4}{\partial y'_1} = \frac{\partial y_4}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial y'_4}{\partial y'_2} = \frac{\partial y_4}{\partial y_2}, \quad \frac{\partial y'_4}{\partial y'_3} = \frac{\partial y_4}{\partial y_3}.$$

Il suffit pour cela de supposer les coordonnées y'_1, y'_2, y'_3, y'_4 égales respectivement aux dérivées

$$\frac{\partial W}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial W}{\partial y_2}, \quad \frac{\partial W}{\partial y_3}, \quad \frac{\partial W}{\partial y_4},$$

divisées par

$$\sqrt{\left(\frac{\partial W}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y_4}\right)^2}.$$

J'appellerai de tels points des *points correspondants*. Prenons, dans le système $W = 0$, quatre points déterminés par les coordonnées

$$\begin{array}{llllll} y_1, & y_2, & y_3; & y_1 + dy_1, & y_2 + dy_2, & y_3 + dy_3; \\ y_1 + \partial y_1, & y_2 + \partial y_2, & y_3 + \partial y_3; & y_1 + \delta y_1, & y_2 + \delta y_2, & y_3 + \delta y_3, \end{array}$$

la quatrième coordonnée étant déterminée en fonction des trois premières. On déterminera les coordonnées des quatre points correspondants, dans le système $V = 0$, d'après la règle convenue, et elles seront des fonctions des coordonnées des points du système $W = 0$. Désignons-les par

$$\begin{array}{llllll} y'_1, & y'_2, & y'_3; & y'_1 + dy'_1, & y'_2 + dy'_2, & y'_3 + dy'_3; \\ y'_1 + \partial y'_1, & y'_2 + \partial y'_2, & y'_3 + \partial y'_3; & y'_1 + \delta y'_1, & y'_2 + \delta y'_2, & y'_3 + \delta y'_3. \end{array}$$

En considérant d, ∂, δ comme des signes d'accroissements infiniment petits, et bornant l'approximation aux termes du premier ordre, le rapport

$$\begin{vmatrix} dy_1 & dy_2 & dy_3 \\ \partial y_1 & \partial y_2 & \partial y_3 \\ \delta y_1 & \delta y_2 & \delta y_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} dy'_1 & dy'_2 & dy'_3 \\ \partial y'_1 & \partial y'_2 & \partial y'_3 \\ \delta y'_1 & \delta y'_2 & \delta y'_3 \end{vmatrix} = c$$

représente le rapport des volumes des lieux, pris dans les systèmes $W = 0$, $V = 0$, et correspondants aux tétraèdres dans l'espace. Mais, comme à chaque point du premier système correspond un point déterminé du second, à chaque volume du premier système correspondra un volume du second système, et ce dernier volume sera comme une transformation du premier, puisqu'à chaque point déterminé à l'intérieur du volume du premier système correspond un point déterminé à l'intérieur du volume du second système. Le rapport c trouvé ci-dessus est le rapport de deux de ces volumes correspondants infiniment petits. La valeur de ce rapport donne la mesure de l'écart, au point de vue d'une propriété déterminée (la courbure, suivant Kronecker), du volume du premier système relativement au volume du second système, ou, les volumes étant infiniment petits, la mesure de l'écart, au point de vue de cette propriété, de chaque point du premier système relativement au point correspondant du second système. La fonction c, étant une fonction des dérivées de $W = 0$, sera différente pour des systèmes différents, et, par suite, pourra servir de caractéristique pour un système; mais, en exprimant les différentielles des coordonnées y' en fonction des différentielles des coordonnées y, et substituant leurs valeurs dans la fonction c, on trouve, après réduction, l'expression de ce rapport en fonction des dérivées secondes de y_4, savoir,

$$c = \frac{Y}{Q^5},$$

c'est-à-dire que ce rapport est exprimée par la valeur de la fonction (III_b). Il s'ensuit de là que la fonction (III_b) représente, non le rapport des aires de triangles infiniment petits, que nous appelons, d'accord avec Gauss et Riemann, la *courbure* du système, mais le rapport des volumes de tétraèdres infiniment petits. Pour cette raison, je crois que la seconde dénomination donnée par Kronecker à la propriété exprimée par cette fonction, la dénomination de mesure de la *condensation* du système, est la plus convenable.

Pour ce qui concerne l'interprétation des formules (I) et (II), en remplaçant la fonction (II_a) par la fonction

$$(\mathrm{II}_b) \qquad \frac{\sum_p \sum_{p'} \Omega_{pp'}(V_{qq'}V_{rr'} - V_{qr'}V_{rq'})}{\Omega\sqrt{\sum_{pqr} \pm V_{1p}V_{2q}V_{3r}}},$$

il est aisé de voir que les expressions, au moyen des dérivées de y_4, des fonctions (I_a), (II_b) et (III_b) représentent les coefficients de l'équation cubique en $\frac{1}{R}$, obtenue en éliminant $y_1-y'_1$, $y_2-y'_2$, $y_3-y'_3$, dy_1, dy_2, dy_3 entre l'équation

$$(q)\qquad (y_1-y'_1)^2+(y_2-y'_2)^2+(y_3-y'_3)^2+(y_4-y'_4)^2=R^2,$$

ses trois dérivées partielles par rapport à y_1, y_2, y_3 (en considérant y_4 comme fonction des autres coordonnées), et les trois différentielles totales de ces dérivées partielles. Par conséquent, en désignant par $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$, $\frac{1}{R_3}$ les racines de cette équation, nous aurons

$$(\mathrm{III}_c)\qquad \frac{1}{\Omega}\sqrt{\sum_{pqr}\pm V_{1p}V_{2q}V_{3r}}=-\frac{1}{R_1R_2R_3},$$

$$(\mathrm{I}_c)\qquad \frac{1}{\Omega}\sum_p\sum_{p'}A_{pp'}V_{pp'}=\frac{1}{R_2R_3}+\frac{1}{R_3R_1}+\frac{1}{R_1R_2},$$

$$(\mathrm{II}_c)\qquad \frac{\sum_p\sum_{p'}\Omega_{pp'}(V_{qq'}V_{rr'}-V_{qr'}V_{rq'})}{\Omega\sqrt{\sum_{pqr}\pm V_{1p}V_{2q}V_{3r}}}=-\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right).$$

L'équation (q) représentant un système de courbure constante positive, les trois racines $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$, $\frac{1}{R_3}$ seront inversement proportionnelles aux rayons de courbure des trois directions déterminées par les deux équations entre les différentielles dy_1, dy_2, dy_3, que l'on peut obtenir en éliminant la différence $y_4-y'_4$ entre les différentielles des dérivées partielles de l'équation (p). Comme la racine carrée de la fonction (III) peut avoir une valeur imaginaire, ce qui a lieu pour un système de courbure constante négative, pour éviter cet inconvénient, je multiplie les fonctions (II_c) et (III_c) par (III_c); en posant alors

$$\alpha=\frac{1}{R_2R_3},\quad \beta=\frac{1}{R_3R_1},\quad \gamma=\frac{1}{R_1R_2},$$

on peut écrire

$$\frac{1}{\Omega}\sum_p\sum_{p'} A_{pp'}V_{pp'} = \alpha+\beta+\gamma,$$

$$\frac{1}{\Omega^2}\sum_p\sum_{p'} \Omega_{pp'}(V_{qq'}V_{rr'} - V_{qr'}V_{rq'}) = \beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta,$$

$$\frac{1}{\Omega^2}\sum_{pqr} \pm V_{1p}V_{2q}V_{3r} = \alpha\beta\gamma.$$

Les paramètres α, β, γ représentent les courbures superficielles (de Gauss) suivant les trois sections principales du système de trois dimensions, suivant lesquelles la courbure présente la propriété du maximum ou du minimum.

En effet, Lipschitz a démontré [1] que la forme générale de l'élément linéaire d'un système de trois dimensions peut être ramenée à la forme donnée par Riemann pour un système de courbure constante, lorsque la condition, nécessaire et suffisante,

$$(r)\quad \frac{\sum_p\sum_{p'} V_{pp'}(\delta^1 x_q d^1 x_r - \delta^1 x_r d^1 x_q)(\delta x_{q'} dx_{r'} - \delta x_{r'} dx_{q'})}{\sum_p\sum_{p'} \Omega_{pp'}(\delta^1 x_q d^1 x_r - \delta^1 x_r d^1 x_q)(\delta x_{q'} dx_{r'} - \delta x_{r'} dx_{q'})} = \alpha$$

est satisfaite, α étant la mesure de la courbure constante.

Si l'on suppose α variable, la formule (r) donnera l'expression de la courbure variable en fonction des différentielles des directions superficielles. L'équation cubique en α, fournie par le discriminant de l'équation (r), a pour racines les trois valeurs α, en fonction des coefficients de la forme de l'élément linéaire, qui représentent les grandeurs maxima et minima de α.

Il s'ensuit de là que, pour l'individualisation d'un système de trois dimensions, il faut nécessairement connaître les trois racines de l'équation en α, ou les trois coefficients de cette équation, et aucun de ces coefficients ne peut rester arbitraire. Cela fait voir que, parmi les systèmes de trois dimensions, il ne peut en exister deux qui soient applicables l'un sur l'autre.

Pour un système à courbure constante, les racines de l'équation

(1) *Journal de Borchardt*, t. 72, p. 52.

en α doivent être toutes les trois constantes et égales. Cette condition est remplie, lorsqu'on suppose les fonctions V_{lm} proportionnelles aux Ω_{lm}, et α est le facteur de proportionnalité, qui est en même temps la mesure de la courbure du système. On obtient ainsi six conditions pour la détermination des coefficients de la forme de l'élément linéaire. Ces conditions prennent une forme très-simple, lorsque l'on choisit pour x_1, x_2, x_3 des coordonnées orthogonales. L'élément linéaire d'un système de trois dimensions, dans le cas des axes coordonnés rectangulaires, se présente sous la forme

$$ds^2 = B_1^2\,dx_1^2 + B_2^2\,dx_2^2 + B_3^2\,dx_3^2,$$

et les conditions pour que le système ait une courbure constante deviennent

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{1}{B_3}\cdot\frac{\partial B_2}{\partial x_3}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{B_2}\cdot\frac{\partial B_3}{\partial x_2}\right) + \frac{1}{B_1^2}\cdot\frac{\partial B_2}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial B_3}{\partial x_1} = -\alpha B_2 B_3,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{B_1}\cdot\frac{\partial B_3}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{1}{B_3}\cdot\frac{\partial B_1}{\partial x_3}\right) + \frac{1}{B_2^2}\cdot\frac{\partial B_3}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial B_1}{\partial x_2} = -\alpha B_3 B_1,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{B_2}\cdot\frac{\partial B_1}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{B_1}\cdot\frac{\partial B_2}{\partial x_1}\right) + \frac{1}{B_3^2}\cdot\frac{\partial B_1}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial B_2}{\partial x_3} = -\alpha B_1 B_2,$$

$$\frac{\partial^2 B_1}{\partial x_2\,\partial x_3} - \frac{1}{B_2}\cdot\frac{\partial B_2}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial B_1}{\partial x_2} - \frac{1}{B_3}\cdot\frac{\partial B_3}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial B_1}{\partial x_3} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 B_2}{\partial x_3\,\partial x_1} - \frac{1}{B_3}\cdot\frac{\partial B_3}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial B_2}{\partial x_3} - \frac{1}{B_1}\cdot\frac{\partial B_1}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial B_2}{\partial x_1} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 B_3}{\partial x_1\,\partial x_2} - \frac{1}{B_1}\cdot\frac{\partial B_1}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial B_3}{\partial x_1} - \frac{1}{B_2}\cdot\frac{\partial B_2}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial B_3}{\partial x_2} = 0.$$

Si l'on prend $\alpha = 0$, c'est-à-dire si l'on suppose la courbure nulle, on obtient les conditions pour qu'une forme donnée de l'élément linéaire représente l'élément linéaire de l'espace ordinaire. Ces dernières conditions, dans le cas de $\alpha = 0$, ont été données déjà par Lamé ([1]), comme les conditions de la transformation d'une forme donnée de l'élément linéaire dans la somme des carrés de trois différentielles. F. Souvorof.

([1]) *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, p. 76.

HIRN (G.-A.). — MÉMOIRE SUR LES CONDITIONS D'ÉQUILIBRE ET SUR LA NATURE PROBABLE DES ANNEAUX DE SATURNE. — Paris, Gauthier-Villars, 1872. In-4°. Prix : 4 fr.

Les problèmes relatifs à la nature et aux conditions d'équilibre des anneaux de Saturne constituent un des points les plus importants et les plus difficiles de la Mécanique céleste. Laplace, après avoir déterminé une des formes d'équilibre que ces anneaux, supposés originairement fluides, ont pu prendre sous l'action attractive de leur propre masse, combinée avec celle de la planète, admet qu'ils se sont solidifiés sous cette forme, et il cherche, dans cette hypothèse, les conditions de stabilité de leur équilibre. Il démontre facilement qu'un anneau homogène concentrique à Saturne ne pourrait avoir qu'un équilibre instable, et tomberait sur la planète dès que les deux centres se seraient séparés; il en conclut que les anneaux sont des solides irréguliers, d'une largeur inégale sur les divers points de leur circonférence, et que chacun d'eux tourne autour de son centre de gravité, dans le même temps que celui-ci tourne autour du centre de la planète; mais il ne donne sur ce point si essentiel de sa théorie aucun développement analytique.

La question a été plusieurs fois reprise, depuis le commencement du siècle. Sans parler de quelques remarques que Plana et d'autres géomètres ont ajoutées à la théorie de Laplace, nous citerons les travaux de Bond et de Peirce. Le premier cherche les limites de grandeur et de densité, nécessaires pour l'équilibre de chaque anneau; il conclut que cet équilibre peut être stable avec des anneaux fluides. Le second croit que le système ne peut se maintenir que grâce à l'action des satellites; mais il ne traite pas le problème avec une rigueur mathématique suffisante.

En 1859, M. Clerk Maxwell a publié un travail beaucoup plus important et plus complet que tous les précédents. Il commence par appliquer une très-savante analyse à l'étude du mouvement d'un solide de forme quelconque, autour d'une sphère. Il considère ensuite le cas où ce solide est un anneau, et il établit les conditions nécessaires à la stabilité; ces conditions ne paraissent pas compatibles avec les apparences que présente le système saturnien. M. Clerk Maxwell examine ensuite l'hypothèse où chaque anneau serait formé par une série de satellites, et il étudie les ondes de condensation et de dilatation qui se propageraient dans un tel système, par l'effet des attractions mutuelles. Il passe de là à des anneaux fluides, et montre qu'ils doivent finir par se rompre et se transformer en une série de satellites. La conclusion de son Mémoire est, enfin, que les anneaux sont formés d'un grand nombre de particules solides, tournant autour de la planète avec des vitesses différentes, suivant leurs distances. Ces particules peuvent tendre à se disposer en anneaux voisins les uns des autres; mais, bien que cet arrangement constitue la disposition la plus favorable à la longue durée du système, elle ne peut, suivant l'auteur, que retarder sa destruction inévitable.

M. Hirn a entrepris son travail sans avoir eu connaissance de celui de M. Clerk Maxwell. Les conclusions des deux géomètres se rapprochent néanmoins beaucoup, avec cette différence que, pour M. Hirn, les parties qui constituent les anneaux sont *très-petites et séparées par des intervalles relativement très-grands,* de sorte que chacune d'elles se meut comme un satellite isolé, et qu'il est permis de négliger leurs attractions mutuelles. La conservation indéfinie du système des anneaux serait la conséquence d'un tel état de choses, tandis que les ondulations et les frottements qui peuvent se produire dans les anneaux de M. Clerk Maxwell seraient une cause infaillible de destruction plus ou moins éloignée.

C'est en éliminant successivement toutes les autres hypothèses possibles que M. Hirn cherche à établir la réalité de sa conception. Considérant d'abord des anneaux solides, il construit directement, pour chaque cas particulier, les équations convenables, afin que le lecteur puisse toujours suivre de l'œil les phénomènes, à travers l'enchaînement des symboles algébriques. Il raisonne d'ailleurs, non sur des corps idéaux, d'une résistance indéfinie, mais sur des solides réels, en tenant compte de leur élasticité et des limites de leur force de cohésion. Il essaye de prouver que les solides les plus cohérents ne pourraient résister aux pressions ou aux tractions énormes qu'ont à supporter les anneaux, par suite de la rapidité de leur mouvement rotatoire.

Supposons, en effet, un anneau très-large et très-mince, doué d'une vitesse angulaire telle que, pour sa distance moyenne au centre de la planète, la force centrifuge fasse exactement équilibre à l'attraction centrale. Il est clair que la couronne intérieure tendra à se rapprocher de la planète, et la couronne extérieure à s'en éloigner. En admettant qu'à densité égale la matière des anneaux ait la même cohésion que les corps solides connus les plus résistants, M. Hirn calcule que la largeur de chaque anneau ne pourrait dépasser 1200 lieues, sans qu'il y eût une rupture.

Les anneaux peuvent-ils être liquides ou gazeux? L'auteur du Mémoire répond négativement à cette question, et il s'appuie pour cela sur des considérations de Thermodynamique qu'on ne peut plus en effet laisser de côté, dans les recherches relatives à la Physique céleste. D'abord, quelle que soit la largeur de l'anneau, les frottements entre les molécules les amèneront bientôt toutes à la même vitesse angulaire. Si une perturbation intervient alors, elle ne déplacera pas l'anneau tout d'une pièce : les vitesses des molécules changeront d'une manière différente suivant leurs distances à la planète, et l'anneau de circulaire deviendra elliptique. De là des condensations et dilatations successives aux apsides si l'anneau est gazeux, et, s'il est liquide, des variations d'épaisseur; dans les deux cas, échauffements et refroidissements successifs, et comme d'ailleurs, par suite des échanges de température, par suite des chocs et des frottements de tout genre qu'éprouvent les molécules pendant leur révolution, il se dépense continuellement, sous l'attraction de la planète, plus de travail qu'il ne s'en produit, la température de l'anneau tendra à s'élever, et la force vive transformée en chaleur se perdra graduellement dans l'espace.

C'est ainsi que M. Hirn arrive par exclusion à considérer les anneaux comme formés de particules solides extrêmement espacées; il consacre la fin de son Mémoire à faire voir comment ces corps singuliers ont pu se former, dans le système cosmogonique de Laplace. Si l'on suppose un anneau formé d'un gaz permanent en grand excès, et d'une vapeur susceptible de se condenser, cette vapeur a dû former çà et là des gouttes, d'abord liquides, puis solides, qui ont continué à se mouvoir dans l'intérieur de l'anneau gazeux. Peu à peu le gaz s'est contracté vers la planète, abandonnant les particules isolées qui ont continué à se mouvoir comme des satellites libres.

Il nous reste à signaler, en terminant, un point de cet important Mémoire qui nous paraît prêter à la critique. Lorsque l'auteur (page 11 et suivantes) considère le mouvement d'un anneau solide, non homogène, autour de son centre de gravité, pendant que ce dernier point tourne autour de la planète, il substitue à ce corps, pour simplifier les intégrations, un système formé de deux points matériels seulement, placés aux extrémités de la ligne d'excentricité, et reliés entre eux par un arc inflexible et sans poids. Or il n'est pas clair que les résultats numériques relatifs à un tel système puissent s'appliquer, même de très-loin, à un anneau continu où les pressions se répartissent dans toute la masse. En outre, l'auteur ne s'occupe nullement des conditions de stabilité du système. C'est là cependant un des points les plus importants de la théorie. Nous avons déjà dit que Laplace ne l'avait pas traité, laissant ainsi une lacune dont sont frappés, dit M. Airy, tous ceux qui lisent la *Mécanique céleste*, en connaissance de cause. M. Clerk Maxwell est le seul géomètre qui ait abordé le problème dans toute sa difficulté. Il trouve qu'un anneau *lesté* en un de ses points ne peut être stable que dans des conditions très-particulières, dont la principale est que le poids du lest constitue les 0,82 du poids total. C'est là évidemment un des meilleurs arguments contre la solidité des anneaux; il s'ajoute à ceux que nous venons de signaler d'après M. Hirn, et il faut reconnaître que l'analogie des résultats auxquels sont parvenus ces deux géomètres donne une grande probabilité à leur hypothèse. Cette hypothèse s'accorde du reste sur bien des points avec les observations, particulièrement en ce qui concerne l'anneau obscur situé entre les autres anneaux et la planète.

G. Lespiault.