BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

PAINVIN

Sur l'abaissement de la classe d'une courbe produit par la présence d'un point de rebroussement

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 4 (1873), p. 131-142

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1873__4__131_1>

MÉLANGES.

SUR L'ABAISSEMENT DE LA CLASSE D'UNE COURBE PRODUIT PAR LA PRÉSENCE D'UN POINT DE REBROUSSEMENT;

PAR M. PAINVIN.

1. Lorsque deux courbes C et D ont en commun un point O multiple d'ordre p pour la courbe C, d'ordre q pour la courbe D, le nombre des points communs à ces deux courbes et coïncidant avec O est égal à pq, pourvu que les courbes n'aient pas en ce point multiple des tangentes communes. La démonstration de ce théorème n'offre aucune difficulté lorsque la condition restrictive imposée se trouve remplie; il n'en est plus de même lorsque les deux courbes ont en ce point multiple des tangentes communes.

Le nombre des points communs et coïncidant avec O est alors supérieur à pq, mais la détermination exacte de ce nombre est fort délicate.

En définitive, la question peut se ramener à celle-ci :

Deux courbes ont en commun un point simple ou multiple et une tangente commune en ce point; prenons le point pour origine *des coordonnées et la tangente commune pour axe des y, les équations des deux courbes se présenteront sous la forme suivante :*

$$
(\mathrm{I})\left\{\begin{array}{ll}
(\mathrm{C})\left\{\begin{array}{l} x^{i_0}\varphi_{p-i_0}+x^{i_1}\varphi_{p-i_1+1}+x^{i_2}\varphi_{p-i_2+2}+\ldots \\ \qquad +x^{i_h}\varphi_{p-i_h+h}+\varphi_{p+h+1}+\varphi_{p+h+2}+\ldots+\varphi_m=0,\end{array}\right. \\
(\mathrm{D})\left\{\begin{array}{l} x^{j_0}\psi_{q-j_0}+x^{j_1}\psi_{q-j_1+1}+x^{j_2}\psi_{q-j_2+2}+\ldots \\ \qquad +x^{j_k}\psi_{q-j_k+k}+\psi_{q+k+1}+\psi_{q+k+2}+\ldots+\psi_n=0;\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

les lettres φ_i et ψ_i désignent des fonctions homogènes et du degré i en x et y ; le facteur x est mis en évidence dans tous les termes où il se trouve ; ainsi, pour la courbe (C), tous les termes, à partir du premier, renferment le facteur x jusqu'au terme φ_{p+h+1} exclusivement ; le groupe φ_{p+h+1} n'admet pas le facteur x, les suivants peuvent l'admettre ou ne pas l'admettre ; de même, pour la courbe (D), ψ_{q+k+1} est le premier des termes qui n'admet pas le facteur x.

Trouver le nombre des points communs aux deux courbes et coïncidant avec O, *en admettant que* $x=0$ *est la seule tangente commune aux deux courbes en ce point* O.

2. Je ne connais pas de Mémoire où l'on ait abordé directement cette question ; car je ne parlerai pas de la méthode qui consisterait à comparer les dérivées de divers ordres : elle me semble illusoire pour le cas actuel ; les calculs seraient d'abord d'une longueur rebutante, et puis il faudrait séparer ce qui est relatif aux diverses branches de la courbe ; je ne chercherai pas jusqu'à quel point tout cela est praticable et conduit à la solution du problème posé.

Quant à la méthode de Minding (*Voir* t. VI du *Journal de Mathématiques*, 1841), qui permet de déterminer le nombre des solutions infinies communes à deux équations, elle ne nous donnerait que très-péniblement la solution de la question énoncée ; car, en supposant le point O transporté à l'infini (ce qui se ferait en rendant l'équation homogène et en changeant le rôle des variables), le résultat comprendrait les solutions relatives au point O et les solutions relatives aux autres directions asymptotiques, et l'on ne pourrait dégager ces dernières solutions qu'après s'être assuré qu'elles correspondent à des points communs (simples ou multiples) pour lesquels il n'y a pas de tangente commune ; autrement il y aurait pétition de principe.

Indépendamment de cela, l'application de la méthode de Minding, en admettant qu'elle puisse se faire, exigerait préalablement une modification profonde dans la disposition des termes des équations (I) qui se présentent immédiatement sous la forme que nous avons indiquée ; et cette modification ne pourrait d'ailleurs se faire que si l'on connaissait les valeurs numériques des exposants i_0, $i_1, \ldots, j_0, j_1, \ldots$; de plus, les calculs ne peuvent être terminés que si l'on connaît les valeurs numériques de ces mêmes exposants. Enfin la méthode de Minding introduit, pour l'évaluation du nombre cherché qui est essentiellement entier et positif, des nombres fractionnaires positifs et négatifs ; ces nombres, qui ont leur raison d'être dans la détermination de la position relative des branches de la courbe par rapport à leur asymptote commune, ne sont que des intermédiaires inutiles dans la recherche beaucoup plus simple que nous nous proposons, savoir, la recherche du nombre des points communs aux deux courbes et coïncidant avec O.

Je dirai plus, c'est que le problème posé comme je l'ai énoncé plus haut, qui se présente dans un nombre considérable de questions, donnerait immédiatement, s'il était résolu directement, le degré de l'équation finale, c'est-à-dire le nombre des solutions finies d'une manière beaucoup plus précise et plus lucide que ne le fait la méthode de Minding ; cette solution serait le complément indispensable de la méthode indiquée par M. Chasles (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, p. 737, 2e semestre 1872, et p. 126, 1er semestre 1873) ; car elle permettrait de calculer très-exactement la quantité que M. Chasles a désignée par ω ; calcul qui ne peut être fait, sauf pour des cas très-simples, que si l'on sait résoudre la question que j'ai énoncée en commençant.

Il y a une méthode qui, étant données les valeurs numériques des exposants i_0, $i_1, \ldots$, j_0, $j_1, \ldots$, permet de déterminer très-exactement le nombre des points communs aux deux courbes (C) et (D) et coïncidant avec O : c'est celle que j'ai appliquée dans une étude sur la recherche des rayons de courbure en un point multiple d'une courbe plane ou gauche (*Annali di Matematica*, t. III, 1870, et t. IV, 1871). Mais cette méthode, quoique beaucoup plus nette et incomparablement plus courte que celles dont je viens de parler, ne m'a pas encore conduit à une expression générale simple de la solution du problème proposé, c'est-à-dire à une expression qui laisse aux exposants $i_0, i_1, \ldots, j_0, j_1, \ldots$ leurs valeurs quelconques, excepté dans le cas particulier suivant :

Si l'on considère les deux courbes

$$(\text{II}) \quad \begin{cases} (\text{C}) \begin{cases} x^{i_0}\varphi_{p-i_0} + x^{i_1}\varphi_{p-i_1+1} + x^{i_2}\varphi_{p-i_2+2} + \ldots \\ \qquad + x^{i_h}\varphi_{p-i_h+h} + \varphi_{p+h+1} + \ldots + \varphi_m = 0, \end{cases} \\ (\text{D}) \quad x^{j_0}\psi_{q-j_0} + \psi_{q+1} + \ldots + \psi_n = 0, \end{cases}$$

les groupes φ_{p+h+1} *et* ψ_{q+1} *ne renfermant pas le facteur* x, *on peut énoncer la proposition qui suit :*

Le nombre des points communs aux deux courbes (II) *et coïncidant avec* O *est égal à*

$$pq + \text{le plus petit des nombres } (rj_0 + i_r),$$

r *pouvant avoir les valeurs* $0, 1, 2, 3, \ldots, h, h+1$; i_{h+1} *devant être supposé nul.*

La démonstration de cette proposition est très-simple ; j'y reviendrai plus tard.

3. Pour l'instant, je réduirai le problème que je m'étais posé d'abord à la question suivante :

Quelle est l'influence de la présence d'un point multiple sur la classe d'une courbe?

Dans un Mémoire inséré au t. VII du *Quarterly Journal*, 1866, et intitulé : *On the higher singularities of a plane curve*, M. Cayley indique, p. 219, une méthode pour déterminer la classe d'une courbe qui possède un point multiple. Sans entrer dans la discussion de cette méthode, nous ferons seulement observer qu'elle exige, pour les branches partielles qui constituent la singularité, la connaissance de leurs équations distinctes résolues par rapport à l'une des coordonnées. M. de la Gournerie a montré, il est vrai (*Journal de Mathématiques*, t. XIV, 1869, p. 41), comment on pourrait déduire ces équations de l'équation générale de la courbe; mais ces calculs, qui sont fort longs, ne peuvent être faits que si l'on connaît les valeurs numériques des exposants $i_0, i_1, \ldots, j_0, j_1, \ldots$; ils introduisent, en outre, des nombres fractionnaires qui ont leur raison d'être dans la recherche très-importante des ordres de contact des diverses branches de la courbe, mais qui ne sont qu'un intermédiaire pour la question plus simple que nous nous sommes posée.

Il me semble donc que la question énoncée ci-dessus n'est pas encore complétement résolue, si l'on demande une solution directe et d'une application facile.

Je ne m'occuperai aujourd'hui que de la plus simple des questions de ce genre, savoir :

Quelle est l'influence d'un point de rebroussement du deuxième ordre sur la classe d'une courbe ?

Si je ne donne pas une formule générale résolvant la question, j'indique au moins une limite supérieure et possible qui se conclut de l'inspection de l'équation de la courbe ; et, de plus, les formules que j'ai écrites permettent de déterminer dans tous les cas, *à vue et sans aucun calcul,* la diminution *exacte* de la classe, lorsque les valeurs numériques des exposants sont connues.

4. Soit une courbe (C), ayant un point double de rebroussement que nous prendrons pour origine ; l'axe des y sera la tangente de rebroussement ; l'équation de la courbe se présentera sous la forme

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} C = {} & x^2 + x^{i_1}\varphi_{3-i_1} + x^{i_2}\varphi_{4-i_2} + x^{i_3}\varphi_{5-i_3} + \ldots \\ & + x^{i_{h-2}}\varphi_{h-i_{h-2}} + x^{i_{h-1}}\varphi_{h+1-i_{h-1}} + \varphi_{h+2} + \ldots + \varphi_m = 0\,; \end{aligned} \right.$$

les lettres φ_i désignent des fonctions homogènes en x et y et du degré i ; φ_{h+2} ne renferme pas le facteur x, et est précédé de h termes qui renferment x en facteur ; et, en général,

$$(2)\qquad i_k \leqq k + 2\,;$$

nous supposerons les nombres i_1, $i_2, \ldots$, i_{h-1} au moins égaux à l'unité.

La tangente de rebroussement, $x = 0$, rencontre la courbe en $h + 2$ points coïncidant avec O, c'est-à-dire a avec la courbe un *contact effectif* de l'ordre h.

La diminution de la classe, produite par le point de rebroussement O, sera égale au nombre des points coïncidant avec O et communs à la courbe (C) et à la première polaire d'un point quelconque

(x_0, y_0), savoir

$$x_0 \frac{\partial C}{\partial x} + y_0 \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

Or on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial x} &= 2x + \left(x^{i_1}\frac{\partial \varphi_{3-i_1}}{\partial x} + i_1 x^{i_1-1}\varphi_{3-i_1}\right) + \left(x^{i_2}\frac{\partial \varphi_{4-i_2}}{\partial x} + i_2 x^{i_2-1}\varphi_{4-i_2}\right) + \ldots \\
&\quad + \left(x^{i_{h-1}}\frac{\partial \varphi_{h+1-i_{h-1}}}{\partial x} + i_{h-1} x^{i_{h-1}}\varphi_{h+1-i_{h-1}}\right) + \frac{\partial \varphi_{h+2}}{\partial x} + \ldots, \\
\frac{\partial C}{\partial y} &= + \left(x^{i_1}\frac{\partial \varphi_{3-i_1}}{\partial y}\right) + \left(x^{i_2}\frac{\partial \varphi_{4-i_2}}{\partial y}\right) + \ldots + \left(x^{i_{h-1}}\frac{\partial \varphi_{h+1-i_{h-1}}}{\partial y}\right) + \frac{\partial \varphi_{h+2}}{\partial y} + \ldots, \\
\frac{\partial C}{\partial z} &= + (m-2)x^2 + (m-3)x^{i_1}\varphi_{3-i_1} + \ldots \\
&\quad + (m-h)x^{i_{h-2}}\varphi_{h-i_{h-2}} + (m-h-1)x^{i_{h-1}}\varphi_{h+1-i_{h-1}} + \ldots;
\end{aligned}$$

en remplaçant ces dérivées par leurs valeurs, dans l'équation qui précède, et en divisant par $2x_0$, l'équation de la première polaire (P), du point (x_0, y_0), s'écrira

$$(2)\quad \begin{cases}
P = x + (\theta_0 x^2 + x^{i_1-1}\psi_{3-i_1}) + (x^{i_1}\theta_{3-i_1} + x^{i_2-1}\psi_{4-i_2}) \\
\qquad + (x^{i_2}\theta_{4-i_2} + x^{i_3-1}\psi_{5-i_3}) + \ldots + (x^{i_{h-3}}\theta_{h-1-i_{h-3}} + x^{i_{h-2}-1}\psi_{h-i_{h-2}}) \\
\qquad + (x^{i_{h-2}}\theta_{h-i_{h-2}} + x^{i_{h-1}-1}\psi_{h+1-i_{h-1}}) + \psi_{h+1} + \ldots = 0;
\end{cases}$$

la fonction ψ_{h+1} ne renferme pas le facteur x; les fonctions θ_i et ψ_i ne peuvent pas se réduire avec les fonctions φ_i de (C), à cause de la présence des arbitraires x_0 et y_0.

5. La diminution de la classe est égale au nombre des points coïncidant avec O et communs aux deux courbes (C) et (P).

Si l'on pose $y = tx$, les premiers membres des équations (1) et (2) s'écriront

$$(3)\quad \begin{cases}
C_1 = x^2 + x^3\varphi_{3-i_1} + x^4\varphi_{4-i_2} + x^5\varphi_{5-i_3} + \ldots \\
\qquad + x^h\varphi_{h-i_{h-2}} + x^{h+1}\varphi_{h+1-i_{h-1}} + x^{h+2}\varphi_{h+2} + \ldots + x^m\varphi_m, \\
P_1 = x + x^2(\theta_0 + \psi_{3-i_1}) + x^3(\theta_{3-i_1} + \psi_{4-i_2}) \\
\qquad + x^4(\theta_{4-i_2} + \psi_{5-i_3}) + \ldots + x^{h-1}(\theta_{h-1-i_{h-3}} + \psi_{h-i_{h-2}}) \\
\qquad + x^h(\theta_{h-i_{h-2}} + \psi_{h+1-i_{h-1}}) + x^{h+1}\psi_{h+1} + \ldots + x^{m-1}\psi_{m-1}.
\end{cases}$$

Dans les fonctions C_1 et P_1, les indices des lettres φ, ψ et θ indiquent *exactement et sans réduction* les degrés respectifs de ces fonctions par rapport à la nouvelle variable t.

Maintenant posons

$$F_1 = x + x^2\varpi_2 + x^3\varpi_3 + x^4\varpi_4 + \ldots + x^g\varpi_g, \tag{4}$$

ϖ_i désignant une fonction entière de t et du degré i par rapport à t; formons ensuite la combinaison

$$P_1 F_1 - C_1;$$

on aura

$$\left\{\begin{aligned} P_1 F_1 - C_1 = {} & T_3 x^3 + T_4 x^4 + T_5 x^5 + \ldots \\ & + T_h x^h + T_{h+1} x^{h+1} + \ldots + T_{m+g-1} x^{m+g-1}, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

après avoir posé

$$\left\{\begin{aligned}
T_3 &= \varpi_2 + (\theta_0 + \psi_{3-i_1} - \varphi_{3-i_1}),\\
T_4 &= \varpi_3 + \varpi_2(\theta_0 + \psi_{3-i_1}) + (\theta_{3-i_1} + \psi_{4-i_2} - \varphi_{4-i_2}),\\
T_5 &= \varpi_4 + \varpi_3(\theta_0 + \psi_{3-i_1}) + \varpi_2(\theta_{3-i_1} + \psi_{4-i_2})\\
&\quad + (\theta_{4-i_2} + \psi_{5-i_3} + \varphi_{5-i_3}),\\
T_6 &= \varpi_5 + \varpi_4(\theta_0 + \psi_{3-i_1}) + \varpi_3(\theta_{3-i_1} + \psi_{4-i_2})\\
&\quad + \varpi_2(\theta_{4-i_2} + \psi_{5-i_3}) + (\theta_{5-i_3} + \psi_{6-i_4} - \varphi_{6-i_4}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
T_h &= \varpi_{h-1} + \varpi_{h-2}(\theta_0 + \psi_{3-i_1}) + \varpi_{h-3}(\theta_{3-i_1} + \psi_{4-i_2}) + \ldots\\
&\quad + \varpi_2(\theta_{h-2-i_{h-4}} + \psi_{h-1-i_{h-3}}) + (\theta_{h-1-i_{h-3}} + \psi_{h-i_{h-2}} - \varphi_{h-i_{h-2}}),\\
T_{h+1} &= \varpi_h + \varpi_{h-1}(\theta_0 + \psi_{3-i_1}) + \varpi_{h-2}(\theta_{3-i_1} + \psi_{4-i_2}) + \ldots\\
&\quad + \varpi_2(\theta_{h-1-i_{h-3}} + \psi_{h-i_{h-2}}) + (\theta_{h-i_{h-2}} + \psi_{h+1-i_{h-1}} - \varphi_{h+1-i_{h-1}}),\\
T_{h+2} &= \varpi_{h+1} + \varpi_h(\theta_0 + \psi_{3-i_1}) + \varpi_{h-1}(\theta_{3-i_1} + \psi_{4-i_2}) + \ldots\\
&\quad + \varpi_2(\theta_{h-i_{h-2}} + \psi_{h+1-i_{h-1}}) + (\psi_{h-1} - \varphi_{h+2}),\\
T_{h+3} &= \varpi_{h+2} + \varpi_{h+1}(\theta_0 + \varpi_{3-i_1}) + \psi_h(\theta_{3-i_1} + \psi_{4-i_2}) + \ldots\\
&\quad + \varpi_2\psi_{h+1} + (\psi_{h+2} - \varphi_{h+3}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
T_{g+1} &= \varpi_g + \varpi_{g-1}(\theta_0 + \psi_{3-i_1}) + \varpi_{g-2}(\theta_{3-i_1} + \psi_{4-i_2}) + \ldots\\
&\quad + \varpi_3\psi_{g-2} + \varpi_2\psi_{g-1} + (\psi_g - \varphi_{g+1}),\\
T_{g+2} &= \varpi_g(\theta_0 + \psi_{3-i_1}) + \varpi_{g-1}(\theta_{3-i_1} + \psi_{4-i_2}) + \ldots\\
&\quad + \varpi_3\psi_{g-1} + \varpi_2\psi_g + (\psi_{g+1} - \varphi_{g+2}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
T_{m+g-1} &= \varpi_g\psi_{m-1}.
\end{aligned}\right. \tag{6}$$

J'ai écrit avec détails les valeurs des fonctions T_3, $T_4, \ldots$, afin qu'on en voie bien la loi de formation, et surtout parce que c'est à l'inspection du tableau ((6)) qu'on pourra déterminer *à vue et sans calcul* la diminution de la classe; le nombre g est entier et arbitraire; nous n'avons pas à nous préoccuper de sa valeur, nous devons seulement le supposer assez grand pour qu'on puisse annuler le plus de fonctions T possible à l'aide des fonctions arbitraires $\varpi_2, \varpi_3, \ldots, \varpi_g$.

6. Nous montrerons tout à l'heure qu'on pourra disposer des fonctions arbitraires $\varpi_2, \varpi_3, \ldots$, de manière à *annuler* (c'est-à-dire rendre identiquement nulles, quel que soit t) plusieurs des fonctions successives $T_3, T_4, T_5, \ldots$, à partir de T_3, et qu'il y en aura toujours une qu'on ne pourra plus *annuler*. Supposons que T_k soit la première des fonctions T_i qui ne puisse plus s'annuler; on aura alors identiquement

$$(7) \qquad P_1 F_1 - C_1 = T_k x^k + T_{k+1} x^{k+1} + \ldots + T_{m+g-1} x^{m+g-1}.$$

La première des fonctions T_k renfermera nécessairement t^k, car cette fonction renferme le polynôme arbitraire ϖ_{k-1} de degré $k-1$ en t; et si elle ne peut pas s'annuler, c'est que ses autres termes fournissent un terme non nul où t entre à la puissance k; autrement la fonction arbitraire ϖ_{k-1}, dont *tous* les coefficients restent indéterminés, permettrait d'annuler T_k, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Si maintenant nous introduisons x dans les fonctions φ_i, ϖ_i qu'il multiplie, et qu'on mette y à la place de tx, la fonction P_1 redevient identiquement P, la fonction C_1 devient C, et F_1 devient une fonction de x et y, $F(x,y)$; et si l'on pose

$$(8) \qquad \Sigma = T_k(x,y) + T_{k+1}(x,y) + \ldots + T_{m+g-1}(x,y),$$

on a identiquement

$$(9) \qquad PF - C = \Sigma;$$

T_i désigne, dans la valeur de Σ, une fonction homogène en x et y et du degré i; c'est ce que devient $x^i T_i$ lorsqu'on remplace t par $\frac{y}{x}$.

La courbe $\Sigma = 0$ passe par l'origine O, y possède un point multiple d'ordre k, et aucune des tangentes ne coïncide avec Oy, puisque T_k renferme nécessairement t^k, et que, par suite, $T_k(x, y)$ renferme un terme en y^k.

Nous allons démontrer maintenant que le nombre des points coïncidant avec O et communs aux courbes (C) et (P) est exactement égal au nombre des points coïncidant avec O et communs aux courbes (Σ) et (P); ce que nous écrirons ainsi :

$$N((C, P)) = N((\Sigma, P)).$$

Il résulte de l'identité (9) que tous les points d'intersection des courbes (C) et (P) sont sur la courbe Σ, et que tous les points d'intersection à distance finie de (P) et (Σ) sont sur la courbe C; de sorte que tous les points communs aux courbes (C) et (P) sont exactement les mêmes que les points communs aux courbes (Σ) et (P) et à *distance finie*.

J'ai dit à *distance finie;* car, si l'on rend l'identité (1) homogène, ce qui donne

$$PF - Cz^{g-1} = \Sigma,$$

on voit que les intersections de (Σ) et (P) se composent d'abord de tous les points communs aux courbes (C) et (P), et ensuite d'un certain nombre de points à l'infini, définis par les deux équations

$$z^{g-1} = 0, \quad \Sigma = 0,$$

points qui n'appartiennent pas aux courbes (C) et (P), car ils correspondent aux directions asymptotiques $\varpi_g \psi_{m-1} = 0$; or ϖ_g est arbitraire, et les directions asymptotiques $\psi_{m-1} = 0$ n'appartiennent pas à la courbe (C); nous pouvons donc faire abstraction de ces points, et la proposition énoncée est démontrée.

Il est d'ailleurs visible par l'identité (9) que, si (P) et (C) ont i points communs infiniment voisins, ces i points seront aussi communs aux courbes (Σ) et (P).

Ceci établi, nous voyons que la courbe (Σ) possède k branches passant par le point O; la courbe (P) n'a qu'une seule branche passant par O, et la tangente en O à la courbe (P) ne coïncide avec aucune des tangentes en O à la courbe Σ; donc le nombre des points communs à (P) et à (Σ) et coïncidant avec O est exactement égal à k.

Nous concluons de là les propositions suivantes :

Théorème I. — *Si la fonction* T_k *est la première des fonctions* T *qui, à partir de* T_3, *ne peut pas être rendue identiquement nulle, les courbes* (C) *et* (P) *auront k points communs et coïncidant avec* O; *par conséquent, la classe de la courbe* (C) *sera diminuée de k unités.*

Théorème II. — *Lorsque les deux courbes* (C) *et* (P) *ont k points communs et coïncidant avec* O, *on peut faire passer par les points communs aux deux courbes* (C) *et* (P) *une troisième courbe* (Σ) *ayant le point* O *pour point multiple d'ordre k.*

7. Nous allons maintenant examiner comment et dans quel cas on peut annuler identiquement les fonctions T_3, T_4, T_5,..., et nous montrerons par là que, étant données l'équation de la courbe (C) et les valeurs numériques des exposants i_0, i_1, i_2,..., i_{k-1}, on pourra déterminer, *à vue et sans calcul,* la diminution exacte de la classe de la courbe (C), et cela par la simple inspection des valeurs des T_3, T_4,..., écrites dans le tableau ((6)).

1° Soit $i_1 = 0$:

La fonction T_3 ne peut pas être annulée, puisqu'il y a des termes en t^3 provenant des fonctions φ_3 et ψ_3 irréductibles entre elles à cause des arbitraires x_0 et y_0, et que la fonction ϖ_2 n'est que du second degré en t. La diminution de la classe est donc de *trois unités* seulement;

2° Soit $i_1 > 0$:

La fonction T_3 pourra être annulée; la fonction ϖ_2 sera alors complétement déterminée, et sera du deuxième, premier, ou zéro degré en t, suivant que i_1 sera égal à 1, 2 ou 3;

Si $i_1 = 1$:

La fonction T_4 ne pourra pas être annulée, puisque le terme $\varpi_2 \psi_{3-i_1}$ est du quatrième degré en t, que les termes en t^4 ne peuvent pas se détruire, et que ϖ_3 est du troisième degré seulement; la diminution de la classe sera donc égale à *quatre unités;*

Si $i_1 > 1$ et que $i_2 = 0$:

La fonction T_4 ne pourra pas être annulée, et la diminution de la classe sera toujours de *quatre unités;*

3° Soit $i_1 > 1$ et $i_2 > 0$:

La fonction T_4 pourra toujours être annulée, et la fonction ϖ_3

sera alors complétement déterminée; cette fonction sera, par rapport à t,

du 3e degré, si $i_2 = 1$;

du 2e degré, si $i_1 = 2$ et $i_2 = 2, 3$ ou 4; ou si $i_1 = 3$ et $i_2 = 2$;

du 1er degré, si $i_1 = 3$ et $i_2 = 3$;

du 0 degré, si $i_1 = 3$ et $i_2 = 4$.

La fonction T_5 ne pourra pas s'annuler si $i_3 = 0$, et la classe sera diminuée de *cinq unités;*

Si $i_3 > 0$ et $i_1 > 1$:

La fonction T_5 pourra toujours s'annuler, et la fonction ϖ_4 sera complétement déterminée;

Et ainsi de suite.

8. Indiquons en terminant quelques remarques générales.

Remarque I. — Lorsque aucun des nombres $i_0, i_1, \ldots, i_{h-1}$ n'est nul, il est d'abord certain que la fonction T_{h+2} ne pourra jamais être annulée, car la fonction φ_{h+2} est du degré $h + 2$ en t, et les termes du plus haut degré en t ne pourront pas être détruits par les termes du même degré qui peuvent précéder, puisque les coefficients de ces derniers renferment les arbitraires x_0 et y_0, tandis que φ_{h+2} en est absolument indépendant. De plus, les fonctions $\varpi_{h-1}, \varpi_{h-2}, \ldots, \varpi_2$ sont complétement déterminées, si les fonctions $T_3, T_4, \ldots, T_{h+1}$ ont pu être annulées; il ne reste donc d'arbitraire que la fonction ϖ_{h+1} qui est du degré $h + 1$ seulement par rapport à t; par conséquent la fonction T_{h+2} ne pourra pas être annulée et renfermera nécessairement t à la puissance $h + 2$.

Donc *la diminution de la classe sera au plus égale à* $2 + h$; il est d'ailleurs facile de montrer que cette diminution peut être atteinte pour des valeurs convenables des exposants $i_0, i_1, \ldots, i_{h-1}$.

Ajoutons que la diminution de la classe pourra être inférieure à $2 + h$, même dans le cas où aucun des nombres $i_0, i_1, \ldots, i_{h-1}$ ne serait nul; c'est ce que confirme la remarque suivante.

Remarque II. — Supposons l'exposant $i_k = 1$, les autres exposants $i_0, i_1, \ldots, i_{h-1}$ n'étant pas nuls, on peut affirmer que, dans ce cas, la fonction T_{2k+2} ne pourra pas s'annuler.

On a, en effet,

$$
(1^\circ)\quad \left\{\begin{aligned} T_{k+2} = {} & \varpi_{k+1} + \varpi_k(\theta_0 + \psi_{3-i_1}) + \varpi_{k-1}(\theta_{3-i_1} + \psi_{4-i_2}) + \ldots \\ & + \varpi_2(\theta_{k-i_{k-2}} + \psi_{k+1-i_{k-1}}) + (\theta_{k+1-i_{k-1}} + \psi_{k+2-i_k} - \varphi_{k+2-i_k}), \end{aligned}\right.
$$

$$
(2^\circ)\quad T_{2k+2} = \varpi_{2k+1} + \varpi_{2k}(\theta_0 + \psi_{3-i_1}) + \ldots + \varpi_{k+1}(\theta_{k+1-i_{k-1}} + \psi_{k+2-i_k}) + \ldots.
$$

Or l'égalité (1°) nous montre que ϖ_{k+1} est du degré $k+1$ en t, puisque, d'après l'hypothèse $i_k = 1$, la fonction φ_{k+2-i_k} est du degré $k+1$; mais alors, dans l'expression (2°) de T_{2k+2}, le terme $\varpi_{k+1}\psi_{k+2-i_k}$ est du degré $2k+2$ en t, et ne pourra pas être détruit par la fonction arbitraire ϖ_{2k+1}, qui n'est que du degré $2k+1$ par rapport à t.

Ainsi, lorsqu'on suppose $i_k = 1$, il pourra arriver que, parmi les fonctions T qui précèdent T_{2k+2}, quelques-unes ne puissent pas s'annuler; mais, si toutes les fonctions qui précèdent T_{2k+2} peuvent être annulées, on peut affirmer que la fonction T_{2k+2} ne pourra pas être annulée. La démonstration complète de cette proposition exigerait bien encore quelques explications, mais les détails déjà donnés permettront facilement d'y suppléer.