Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

Revue des publications périodiques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 3 (1872), p. 70-96

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1872__3__70_0>

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

МАТЕМАТИЧЕСКІЙ СБОРНИКЪ (¹).

T. IV, 1869.

Première Partie.

Stolétof (A.-G.). — *La loi générale de l'électrostatique et sa réduction à un cas plus simple.*

L'auteur traite dans ce Mémoire le problème de l'équilibre de l'électricité sur des conducteurs, sous la forme la plus générale. Il prend un nombre quelconque de conducteurs, assemblés ou non, en présence d'un ensemble quelconque de pôles électriques immobiles.

On peut démontrer que, même sous cette forme générale, le problème de l'équilibre électrique *admet* une solution, et, de plus, qu'il n'en admet *qu'une,* comme cela a lieu dans le cas d'un seul conducteur. Cette généralisation du célèbre théorème de Gauss, sous une forme un peu simplifiée, forme le commencement de ce Mémoire.

L'auteur fait voir ensuite comment, à l'aide de quelques transformations synthétiques, la solution du problème général se ramène à celle d'une suite infinie de problèmes d'un type plus simple. Dans chacun de ces problèmes élémentaires, on n'a affaire qu'à *une seule surface* (*conductrice*), qui, en outre, est à l'état *isolé*.

Une telle solution ne conduit, il est vrai, qu'à des calculs que l'on ne peut effectuer jusqu'au bout. Cependant cette méthode de calcul donne à la solution cherchée un aspect connu; elle peut servir à obtenir des résultats approchés, lorsqu'on ne peut obtenir la solution exacte; et enfin, dans un cas important, celui des conduc-

---

tice sur F. Chiò, due à M. Angelo Genocchi. Signalons encore un travail de F. Chiò, de 1870, intitulé : *Nota sulla formola summatoria* del professore Felice Chiò; Torino, Stamperia Reale, 1870, 12 p. in-8°; et l'Ouvrage suivant : *Discorso per l'inaugurazione del Busto di Giovanni Plana,* pronunziato il giorno 15 novembre 1870, nella regia Università di Torino, da Felice Chiò, professore di Fisica matematica e di Analisi superiore. Torino, Stamperia Reale, 40 p. in-8°.

(¹) Voir *Bulletin*, t. III, p. 11.

teurs sphériques, elle amène réellement à la solution complète du problème.

Cette réduction du problème général de l'électrostatique à une série de problèmes plus simples est fondée sur deux théorèmes dus à Murphy et à W. Thomson.

L'auteur a présenté ces théorèmes avec plus de généralité. Il mentionne un travail de Lipschitz, publié dans le Tome 61 du *Journal de Crelle,* et traitant le même sujet, mais sous une forme plus concise, sans discuter la convergence des séries obtenues par la méthode de Murphy, et en laissant de côté l'application de la méthode au cas important des conducteurs sphériques, que M. Stolétof a traité dans toute son étendue.

Orlof (F.). — *Recherche des solutions singulières des équations différentielles.* (9 p.)

La méthode de l'intégration par le multiplicateur, lors même qu'elle ne fournirait pas de solutions que l'on ne pût trouver par les autres méthodes, a du moins sur celles-ci l'avantage d'un caractère de généralité plus grand, comme servant à relier et à généraliser les résultats obtenus par les autres procédés. L'auteur se propose d'appliquer cette même méthode à la recherche des solutions singulières. Après avoir retrouvé les résultats connus pour le cas d'une équation du 1^{er} ordre, il traite le cas général des solutions singulières d'une équation d'ordre quelconque.

Bougaïef (N.). — *Formes intégrables des équations différentielles du 1er ordre.* (33 p.)

L'objet de ce Mémoire est de rechercher, comme on le fait dans la théorie des quadratures, quelles sont les formes d'équations différentielles du 1er ordre dont l'intégrale peut s'exprimer au moyen d'opérations déterminées, appliquées à des fonctions connues, et quelle est, pour chaque forme, la transformation analytique qui rend l'équation intégrable. L'auteur étudie d'abord les conditions pour qu'une équation différentielle $y' + f(x, y) = 0$ puisse se ramener à l'une des formes

$$\frac{dv}{du} + \psi(u)\chi(v) = 0, \quad \frac{dz}{dx} + \frac{\varphi(x)}{\chi(z)} = 0,$$

où les variables sont séparables. Si l'on désigne généralement par

$$\varphi(x, y, u, v) = 0, \quad \theta(x, y, u, v) = 0$$

les équations qui lient les nouvelles variables u, v aux anciennes, on trouve que la fonction $f(x, y)$ doit satisfaire à la condition

$$(1)\quad f(x,y)=\frac{\psi(u)\chi(v)\left(\frac{d\theta}{dx}\frac{d\varphi}{dv}-\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\theta}{dv}\right)-\left(\frac{d\theta}{dx}\frac{d\varphi}{du}-\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\theta}{du}\right)}{\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\theta}{du}-\frac{d\theta}{dy}\frac{d\varphi}{du}-\psi(u)\chi(v)\left(\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\theta}{dv}-\frac{d\theta}{dy}\frac{d\varphi}{dv}\right)},$$

ψ et χ désignant deux fonctions arbitraires.

Lorsqu'on suppose les équations de liaison des deux systèmes de variables mises sous la forme

$$u=\mu(x,y),\quad v=\nu(x,y),$$

la condition (1) devient

$$(2)\qquad f(x,y)=\frac{\psi(\mu)\frac{d\mu}{dx}+\chi(\nu)\frac{d\nu}{dx}}{\psi(\mu)\frac{d\mu}{dx}+\chi(\nu)\frac{d\nu}{dy}}.$$

M. Bougaïef obtient ainsi pour $f(x, y)$ six formes générales, dont les cas particuliers conduisent à la plupart des équations intégrables connues. Il en tire les conditions d'intégrabilité des équations de la forme

$$\frac{dy}{dx}+Xy^2+X_1y+X_2=0,$$

$$\frac{dy}{dx}+Xy^2+(X+X_2)y+X_2=0.$$

La formule (2) conduit à une intégrale de la forme

$$F_1(\mu)+F_2(\nu)=C.$$

On peut, en généralisant cette formule, chercher les conditions pour que l'intégrale soit de la forme

$$F_1(\mu_1)+F_2(\mu_2)+\ldots+F_n(\mu_n)=C.$$

L'auteur indique encore des substitutions d'un autre genre, dans lesquelles on introduit non-seulement de nouvelles variables, mais encore leurs dérivées, ce qui conduit à de nouveaux cas d'intégrabilité. Par exemple, étant donnée une équation de la forme

$$y+f(x,y')=0,$$

si l'on pose

$$y = \int z\,dx, \quad \text{ou} \quad y = \int \psi(z)\,dz,$$

on peut chercher la condition pour que cette équation, qui devient

$$z' + \frac{z + \dfrac{df}{dx}}{\dfrac{df}{dz}} = 0,$$

prenne la forme

$$z' + \psi_1(x)\,\psi_2(z) = 0.$$

Enfin, l'auteur examine les cas d'intégrabilité qui découlent de certaines hypothèses faites sur la forme du *multiplicateur* de l'équation différentielle.

Sabinine (E.-F.). — *Sur deux questions relatives au Calcul des variations.* (11 p.)

I. La recherche du maximum ou du minimum de l'intégrale double

$$W = \int_{x'}^{x''} dx \int_{y'}^{y''} dy\, V\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right)$$

conduit, comme on sait, à une équation aux dérivées partielles du 2e ordre, et l'on ne possède pas de méthode générale pour intégrer cette classe d'équations. Mais on peut arriver, dans un grand nombre de cas, à la solution du problème, en s'appuyant sur les propriétés géométriques de la surface dont l'ordonnée représente la fonction cherchée z, et joignant à l'équation aux dérivées partielles les équations qui expriment ces propriétés dans chaque cas particulier.

Cette méthode est presque toujours applicable, comme on le voit en traitant le problème suivant :

Parmi toutes les surfaces réglées à plan directeur, trouver celle dont l'aire comprise entre deux droites génératrices est minimum.

On a ici

$$V = \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

et, pour trouver z, on est conduit à l'équation

$$\frac{dp}{dx}(1+q^2) - 2pq\frac{dq}{dx} + \frac{dq}{dy}(1+p^2) = 0.$$

Au lieu de chercher à l'intégrer, on remarquera que cette équation exprime que la somme des courbures des sections principales en un point quelconque de la surface est nulle. Or cette somme est égale à la somme des courbures de deux sections normales quelconques rectangulaires entre elles. En outre, la courbure d'une section normale menée suivant la génératrice est nulle; donc la courbure de la section normale perpendiculaire à la génératrice est aussi nulle. En exprimant cette propriété, on parvient à l'équation de la surface

$$z = \mathrm{C} \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}.$$

II. L'auteur expose avec le développement nécessaire la démonstration, d'après la méthode d'Euler, du théorème fondamental du calcul des variations, exprimé par l'égalité

$$d\,\delta y = \delta\, dy.$$

Andréiefsky (M.-A.). — *Sur l'intégration des expressions différentielles homogènes d'ordre supérieur contenant plusieurs variables indépendantes.* (34 p.)

Étant donnée une expression

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} d^m u = \mathrm{X}_1\, dx_1^m &+ \mu_{12}\mathrm{X}_{12}\, dx_1^{m-1}\, dx_2 + \ldots \\ &+ \mu_{123}\mathrm{X}_{123}\, dx_1^{m-2}\, dx_2\, dx_3 + \ldots + \mathrm{X}_n\, dx_n^m, \end{aligned}\right.$$

où $\mu_{12}, \ldots, \mu_{123}, \ldots$ sont les coefficients du développement de $(dx_1 + dx_2 + \ldots + dx_n)^m$, et X_1, $\mathrm{X}_{12}, \ldots$ des fonctions données de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, il faut d'abord, pour que ces dernières fonctions puissent être les dérivées partielles d'une même fonction u de x_1, $x_2, \ldots, x_n$, qu'elles remplissent, comme on sait, un certain nombre de conditions. A l'aide de l'analyse combinatoire, l'auteur est parvenu à exprimer par une formule générale le nombre de ces conditions nécessaires pour l'intégrabilité de l'expression différentielle donnée.

La démonstration de cette formule est fondée sur une méthode d'intégration des expressions du 2e ordre, communiquée à l'auteur par M. Minding. En désignant par $C_{m+1}^{(n+m-1)}$ le nombre des combinaisons de $n+m-1$ éléments pris $m+1$ à $m+1$, le nombre des conditions a pour expression

$$N = m\,C_{m+1}^{(n+m-1)}.$$

En intégrant successivement les expressions du 2e et du 3e ordre à 2 et 3 variables,

$$A\,dx^2 + 2B\,dx\,dy + C\,dy^2,$$
$$A\,dx^2 + 2B\,dx\,dy + C\,dy^2 + 2D\,dx\,dz + E\,dz^2 + 2F\,dy\,dz,$$
$$A\,dx^3 + 3B\,dx^2\,dy + 3C\,dx\,dy^2 + D\,dy^3,$$
$$A\,dx^3 + \ldots + 3E\,dx^2\,dz + 3F\,dx\,dz^2 + G\,dz^3 + 3H\,dy^2\,dz + \ldots,$$

l'auteur trouve des formules générales présentant de grandes analogies entre elles et avec la formule connue

$$\int (P\,dx + Q\,dy) = \int_{x_0}^{x} P\,dx + \int_{y_0}^{y} Q_{x_0}\,dy + C.$$

En admettant que cette analogie subsiste, quels que soient l'ordre différentiel et le nombre des variables, on a, pour trouver l'intégrale de l'expression (1), satisfaisant aux conditions que l'on obtient en égalant identiquement les diverses expressions

$$\frac{dX_{j_1 j_2 \ldots j_p}}{dx_{j_1}}$$

de la dérivée partielle

$$\frac{d^{m+1} u}{dx_{j_1}^{i_1}\,dx_{j_2}^{i_2}\ldots dx_{j_p}^{i_p}},$$

la règle suivante :

1° Ordonner l'expression suivant les exposants et les indices des différentielles, de sorte que le premier terme soit $X_1\,dx_1^m$, après lequel on placera les termes en dx_1 et dx_2, puis le terme $X_2\,dx_2^m$, ensuite les combinaisons de dx_1, dx_2, dx_3 et le terme $X_3\,dx_3^m$, etc. En un mot, les termes renfermant dx_i doivent être précédés par tous ceux qui contiennent $dx_1, dx_2, \ldots, dx_{i-1}$.

2° L'expression étant ainsi ordonnée, diviser ses coefficients par les coefficients correspondants $1, \mu_{12}, \ldots, \mu_2, \ldots$ du développement de $(dx_1 + dx_2 + \ldots + dx_n)^m$, ordonné de la même manière que l'expression proposée.

3° Après avoir choisi les limites inférieures d'intégration pour chacune des variables, remplacer dans chaque coefficient X_ι toutes les variables $x_1, x_2, \ldots, x_{\iota-1}$ par leurs limites inférieures.

4° Cela fait, intégrer chaque terme séparément par rapport à toutes les variables, et un nombre de fois par rapport à chacune d'elles marqué par l'exposant de la différentielle de cette variable, en prenant pour limites supérieures les variables elles-mêmes.

5° Enfin, ajouter à la somme de toutes les intégrales ainsi trouvées une fonction arbitraire des n variables, entière, rationnelle et de degré $m - 1$ par rapport à ces variables.

L'intégration d'une équation aux dérivées partielles d'ordre m à deux variables indépendantes x et y, de la forme

$$f\left(x, y, \frac{d^m u}{dx^m}, \frac{d^m u}{dx^{m-1}\,dy}, \ldots, \frac{d^m u}{dy^m}\right) = 0,$$

peut se ramener à l'intégration d'un système de m équations linéaires aux dérivées partielles du 1er ordre à m variables indépendantes. Quoique cette réduction ne facilite nullement la résolution du problème, elle montre la liaison qui existe entre ces deux questions.

Hertz (K.). — *Quelques mots sur la transformation des fonctions elliptiques.* (4 p.)

$y = \operatorname{sn}\left(\frac{z}{M}, k_1\right)$ étant l'intégrale de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{M\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k_1^2y^2)}} = dz,$$

si cette équation s'intègre algébriquement, c'est-à-dire s'il existe entre $\operatorname{sn}\left(\frac{z}{M}, k_1\right)$ et $\operatorname{sn}(z, k)$ une équation algébrique, on pourra toujours trouver un nombre entier ν, tel que $\operatorname{sn}\left(\frac{z_1}{M_1}, k_1\right)$ soit une fonction rationnelle de $\operatorname{sn}(z, k)$, M_1 étant égal à $\frac{M}{\nu}$.

Andréiefsky (M.-A.). — *Sur le facteur d'intégration des équa-*

tions différentielles du 2^e ordre de la forme

$$A + By' + Cy'^m + Dy'^{m+1} + Ey'^{m-1}y'' = 0.$$

(82 p.)

Les coefficients de cette équation étant des fonctions de x, y, y', et m étant un nombre quelconque, positif ou négatif, entier ou fractionnaire, mais différent de zéro, l'auteur examine surtout le cas où le premier membre de l'équation devient intégrable par l'introduction d'un multiplicateur M, fonction de x et de y seulement. Il établit d'abord ce théorème :

Si les coefficients de l'équation satisfont identiquement aux conditions

$$\frac{\partial \frac{A}{E}}{\partial y} - \frac{\partial \frac{B}{E}}{\partial x} + m\frac{AD - BC}{E^2} = 0, \quad \frac{\partial \frac{C}{E}}{\partial y} - \frac{\partial \frac{D}{E}}{\partial x} = 0,$$

en prenant

$$M = \frac{1}{E}e^{mP}, \quad \text{où} \quad P = \int\left(\frac{C}{E}dx + \frac{D}{E}dy\right),$$

on obtiendra par des quadratures une intégrale première de l'équation proposée, savoir

$$\int M(A\,dx + B\,dy) + \frac{ME}{m}y'^m = \text{const.}$$

Il applique ensuite à un grand nombre d'exemples la méthode fondée sur ce théorème. Le Mémoire se termine par la démonstration de quelques propositions générales concernant les multiplicateurs d'une équation différentielle d'ordre quelconque n. A l'aide de ces propositions, on parvient à la solution des questions suivantes :

1° Étant données deux intégrales premières d'une équation différentielle du $n^{\text{ième}}$ ordre, reconnaître si ces deux intégrales sont distinctes l'une de l'autre.

2° Étant donnés deux multiplicateurs d'une équation différentielle du $n^{\text{ième}}$ ordre, reconnaître *a priori* si les intégrales premières correspondantes à ces multiplicateurs sont distinctes entre elles.

Sloudsky (F.-A.). — *Remarque sur le principe de la moindre action.* (5 p.)

Dans cette Note, l'auteur développe sur un exemple simple, celui du mouvement d'un point libre, la différence qui existe entre les deux expressions du principe de la moindre action, données par Lagrange et par Ostrogradsky. (*Voir* le Tome II de ce Recueil.)

Tchebychef (P.-L.). — *Sur la détermination des fonctions d'après les valeurs qu'elles prennent pour certaines valeurs de la variable.* (14 p.)

Soit proposé d'exprimer une fonction u au moyen des valeurs qu'elle prend pour n valeurs données de la variable. La formule de Lagrange donne l'expression cherchée sous la forme d'un polynôme dont le degré ne surpasse pas n. Cauchy a établi une autre formule, dans laquelle la fonction se présente sous la forme d'une fraction $\frac{N}{D}$ dont le dénominateur est un polynôme d'un degré ne dépassant pas une limite donnée λ, tandis que le numérateur est un polynôme d'un degré au plus égal à $n-\lambda-1$. Après la relation $Du - N = 0$, à laquelle satisfont les polynômes D et N, la plus simple que l'on puisse trouver est une relation du second degré, de la forme

$$u^2 + Lu - M = 0,$$

où L et M désignent des polynômes d'un degré aussi bas que possible. L'auteur se sert, pour déterminer ces polynômes, du développement en fraction continue, dont il avait déjà indiqué l'usage dans le Tome Ier de ce Recueil.

Iourief (S.-A.). — *Sur les conditions d'intégrabilité par quadratures d'une équation différentielle du 2e ordre.* (42 p.)

L'auteur recherche les conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficients R_1, R_2 de l'équation linéaire

$$y'' + R_1 y' + R_2 y = 0,$$

pour que l'intégrale de l'équation puisse s'obtenir au moyen de quadratures. Il part de la supposition que l'intégrale générale doive être de la forme

$$y = ce^{\int \omega dx} + c_1 e^{\int \omega_1 dx},$$

c et c_1 étant des constantes arbitraires, ce qui lui donne des expressions générales des coefficients

$$R_1 = - D_x \log(\omega_1 - \omega) - \omega_1 - \omega,$$
$$R_2 = - D_x \omega + \omega[D_x \log(\omega_1 - \omega) + \omega_1].$$

En établissant diverses relations entre les fonctions ω, ω_1, il parvient à construire des équations différentielles ayant des intégrales de la forme indiquée, et dont l'intégration se ramène, par suite, à de simples quadratures.

DAVIDOF (A.-I.). — *Remarque sur les fonctions abéliennes.* (10 p.)

Démonstration de ce théorème : Si l'on pose

$$\varphi(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n),$$

on a

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} = \frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{\infty} \log\left(1 - \frac{x}{u}\right)\frac{du}{\sqrt{\varphi(u)}} \\ + \frac{1}{\pi}\int_{a_2}^{\infty} \log\left(1 - \frac{x}{u}\right)\frac{du}{\sqrt{\varphi(u)}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \frac{1}{\pi}\int_{a_n}^{\infty} \log\left(1 - \frac{x}{u}\right)\frac{du}{\sqrt{\varphi(u)}},\end{aligned}$$

pour des contours d'intégration quelconques.

VON BEYER (E.-I.). — *Sur l'intégration aux différences finies des fractions rationnelles au moyen des fonctions algébriques, quand elle est possible.* (1re Partie; 64 p.)

L'auteur commence par analyser un important travail de M. Bouniakofsky, publié en 1835 dans les *Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg,* et ayant pour but d'établir, dans l'application du calcul inverse des différences finies aux fractions rationnelles, des caractères d'intégrabilité par les fonctions algébriques, analogues à ceux qui ont été obtenus par MM. Liouville et Ostrogradsky pour les intégrales ordinaires de ces mêmes fractions. En désignant par $\frac{N}{M}$ une fraction donnée, M. Bouniakofsky a fait voir que, si l'intégrale $S\frac{N}{M}$ peut s'établir algébriquement, elle ne peut être que de la forme $\frac{X}{Y} + C$, $\frac{X}{Y}$ étant une autre fraction rationnelle. En supposant que le numérateur de la fraction irréductible $\frac{N}{M}$ soit de degré moindre que son dénominateur, on démontre que le degré du numérateur de l'autre fraction irréductible $\frac{X}{Y}$ doit être inférieur au moins d'une unité au degré de son dénominateur. On en conclut facilement : 1° que l'intégrale ne peut être algébrique, lorsque le degré du numérateur de la fraction à intégrer n'est inférieur que d'une unité seulement au degré du dénominateur; 2° que, dès que le dénominateur Y est connu, on n'a qu'à prendre pour X une fonction entière de degré moindre que Y, et dont on cherchera ensuite à déterminer les coefficients.

Pour la détermination des fonctions X et Y, M. Bouniakofsky a employé deux méthodes, l'une particulière, l'autre générale. Dans la méthode particulière, applicable seulement au cas où M est de degré pair, on prend pour Y une fonction entière de degré deux fois moindre, et l'on pose l'égalité $M = YY'$, Y' étant ce que devient Y, lorsqu'on y remplace x par $x+1$, si l'on prend pour unité la différence constante de la variable indépendante. On obtient ainsi Y par la méthode des coefficients indéterminés, en résolvant un système d'équations algébriques du second degré.

La seconde méthode est fondée principalement sur la recherche de tous les diviseurs possibles du carré du dénominateur M, qui sont du même degré que ce dénominateur lui-même, et dont les coefficients dépendent rationnellement de ceux du carré. On porte successivement tous ces diviseurs à la place de R dans l'égalité

$$\frac{Y}{Y'} = \frac{R}{M},$$

et l'on conserve seulement ceux qui correspondent à une détermination possible de Y. Si l'on trouve ainsi plusieurs valeurs pour Y, on les substitue tour à tour dans l'équation qui sert à trouver X, et l'on retient finalement celle d'entre elles qui peut servir au calcul de X.

Le remarquable travail de M. Bouniakofsky, écrit en langue russe, est resté inconnu à tous les auteurs qui ont écrit depuis sur le calcul des différences finies, et qui se sont tous bornés à considérer le cas où le dénominateur M est le produit de facteurs formant une progression arithmétique. Mais ce travail présentant quelques difficultés aux commençants, à cause de l'usage que l'auteur y fait des parties élevées de l'Algèbre, et étant d'ailleurs susceptible de diverses simplifications, M. von Beyer a repris ces recherches par une voie plus élémentaire. Il a résolu le problème de l'intégration d'une fraction rationnelle sous forme algébrique, lorsqu'il est possible, par deux méthodes différentes, dont la première consiste dans la détermination immédiate du dénominateur et du numérateur de l'intégrale; la seconde, dans la recherche de deux fonctions, l'une divisible par X, l'autre par Y, et dont le rapport fait connaître la fraction $\frac{X}{Y}$. C'est cette seconde méthode qui fait l'objet du présent écrit, l'auteur réservant l'exposition de la première pour un autre Mémoire.

Seconde Partie.

WEINBERG (J.-I.). — *Remarques sur la disposition et la forme des continents et des îles*. (14 p.)

LIOUBIMOF (N.-A.). — *Les illusions d'optique*. (8 p.)

ZINGER (V.-I.). — *Sur un théorème fondamental de Géométrie supérieure*. (14 p.)

Il s'agit du théorème sur le rapport anharmonique d'un faisceau de quatre droites.

LEBEDEF (D.-N.). — *Leçon d'introduction du cours de Mécanique à l'Université de Moscou*. (14 p.)

LAPCHINE (V.). — *Profondeur des eaux de la mer Noire, et remarques sur la disposition du bathomètre*. (17 p., 2 pl.)

DELARUE (D.). — *Quelques mots sur le système d'exposition des Mathématiques pures*. (13 p.)

HERTZ (K.). — *Sur les formules fondamentales de la Trigonométrie sphérique*. (2 p.)

DAVIDOF (A.-I.). — *L'unification des mesures et des poids*. (14 p.)

SLOUDSKY (F.-A.). — *Théorie des poids et de la pesée*. (13 p.)

SCHIAPARELLI. — *Lettre au P. Secchi sur le mouvement et l'origine probable des étoiles météoriques*. (2 articles; 61 p.) (Traduction d'un article du *Bullettino meteorologico dell' Osservatorio del Collegio Romano*, t. V.)

SOLUTION *de problèmes posés dans le Tome précédent du Journal*. (8 p.)

1. Démontrer que, pour $x > 1$,

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2+1} + \frac{4}{x^4+1} + \cdots.$$

2. Trouver la valeur de $\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n)} - x$ pour $x = \infty$.

3. Inscrire dans un triangle donné trois cercles dont chacun touche les deux autres et deux des côtés du triangle.

Sloudsky (F.-A.). — *Sur les propriétés des puissances de 2 et de 3.* (4 p.)

Sur la somme *des angles d'un triangle.*

Problèmes *à résoudre.*

1. Trouver deux nombres n et p $(n < p)$ tels, que

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = (n+1) + (n+2) + \ldots + p.$$

2. Démontrer que

$$\frac{\sin x}{x} = \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cos\frac{x}{2^3}\cdots$$

A. P.

ARCHIV der Mathematik und Physik. Herausgegeben von J.-A. Grunert. Greifswald [1].

T. LI, 1869 (*suite*).

Dostor (G.). — *Relations nouvelles entre les tangentes normales, sous-tangentes et sous-normales des courbes en général, avec application aux lignes du second degré.* (62 p.; fr.)

Au lieu de considérer uniquement les longueurs de ces lignes terminées à l'axe des x, l'auteur considère en même temps les lignes analogues terminées à l'axe des y. Il montre qu'il existe entre ces deux systèmes de lignes des relations remarquables, qui conduisent à de nouvelles propriétés des courbes en général, et en particulier des courbes du second degré.

Dostor (G.). — *Calcul des rayons des deux cercles qui touchent trois cercles tangents deux à deux.* (3 p.; fr.)

---

[1] Voir *Bulletin*, t. I, p. 100.

Lindman (C.-F.). — *Démonstration synthétique d'un théorème énoncé dans l'édition des* Éléments d'Euclide *de MM. Betti et Brioschi.* (2 p.; lat.)

Un cercle étant circonscrit à un triangle équilatéral ABC, et P étant un point quelconque d'un cercle concentrique au premier, la somme $PA^2 + PB^2 + PC^2$ est constante.

Šimerka (W.). — *Les triangles rationnels.* (45 p.; all.)

Recherche, par des procédés élémentaires, des triangles dont les côtés, la surface, les tangentes des angles, etc., sont exprimés par des nombres rationnels. Le Mémoire est terminé par une Table de tous les triangles rationnels dont les côtés ne surpassent pas 100.

Emsmann (H.). — *Coordonnées du centre de gravité d'un quadrilatère quelconque, et constructions qui s'en déduisent pour ce point, comparées à celle du centre de gravité du trapèze.* (6 p.; all.)

Lindman (C.-F.). — *Problème de Géométrie.* (6 p.; lat.)

Mener par un point donné une droite qui partage un triangle donné en deux parties équivalentes.

Hochheim (Ad.). — *Sur une courbe de réfraction.* (4 p.; all.)

Lieu des intersections, après la réfraction, de deux rayons partis d'un même point, lorsque l'indice de réfraction varie d'une manière continue.

Grunert (J.-A.). — *Théorie du planimètre polaire, développée d'une manière élémentaire et rigoureuse.* (36 p.; all.)

L'auteur s'occupe dans ce travail de l'ingénieux et utile instrument inventé par J. Amsler, pour déterminer mécaniquement les aires, les moments statiques et les moments d'inertie des figures planes (1).

Grunert (J.-A.). — *Théorie analytique générale de la fonction* Π (x); *triangles et quadrilatères idéaux.* (76 p.; all.)

Dans une surface de courbure constante négative, si l'on considère une ligne géodésique L et un point P de la surface, situé à une

(1) *Ueber die mechanische Bestimmung des Flächeninhalts, der statischen Momente und der Trägheitsmomente ebener Figuren, insbesondere über einen neuen Planimeter,* von Jacob Amsler, Professor am Gymnasium in Schaffhausen. Schaffhausen, 1856.

distance géodésique p de cette ligne, la ligne géodésique menée par P et rencontrant L à l'infini fera avec la direction de p un angle, qui est une fonction du rapport $\frac{p}{k}$, k étant une constante dépendant de la courbure de la surface. Lobatchefsky, en traitant le plan comme cas particulier des surfaces à courbure constante non positive, et en le considérant, par suite, indépendamment de l'axiome XI d'Euclide, a désigné cet *angle de parallélisme* par la notation $\Pi\left(\frac{p}{k}\right)$ (¹), et, par des considérations purement géométriques, il a trouvé que la fonction $\Pi(x)$ est déterminée par une quelconque des relations

$$\sin \Pi(x) = \frac{1}{\cosh x}, \quad \operatorname{tang} \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{-x}, \text{ etc.}$$

M. Grunert développe, en faisant usage de la notation de Lobatchefsky, la Trigonométrie des surfaces à courbure constante négative, ou *surfaces pseudosphériques*, d'après la dénomination introduite par M. Beltrami.

Spitzer (S.). — *Intégration de l'équation aux différentielles partielles*

$$\frac{d^n z}{dx^n} = x^m \frac{d^{m+n} z}{dy^{m+n}} + F_1(y) + x F_2(y) + \ldots + x^{n-1} F_n(y),$$

m et n étant des entiers positifs, et $F_1(y)$, $F_2(y), \ldots, F_n(y)$ *des fonctions quelconques de* y. (7 p.; all.)

T. LII, 1871.

Spitzer (S.). — *Note sur l'intégration des équations différentielles.* (15 p.; all.)

Intégration de l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = x^2 y,$$

et d'autres équations qui s'en déduisent par différentiation. L'inté-

---

(¹) *Новыя начала Геометріи*, 1836. — *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallelinien*, 1840. (Voir *Bulletin*, t. I, p. 327.)

grale de cette équation pouvant s'exprimer soit à l'aide d'une intégrale définie double, soit à l'aide de deux intégrales définies simples, on en déduit pour les intégrales des équations dérivées deux séries d'expressions correspondantes.

Spitzer (S.). — *Intégration des équations différentielles.* (8 p.; all.)

En partant de l'intégrale particulière $y = e^{mx^2}$, on en déduit une suite d'équations différentielles linéaires, dont l'auteur exprime les intégrales générales au moyen d'intégrales définies doubles.

Bretschneider (C.-A.). — *Sur le calcul du trapèze au moyen de ses côtés.* (1 p.; all.)

Hochheim (Ad.). — *Sur le cinquième point remarquable.* (14 p.; all.)

C'est le point de rencontre des droites qui joignent chaque sommet d'un triangle au point de contact du côté opposé avec le cercle exinscrit correspondant. Étude des propriétés de ce point et des lieux géométriques auxquels il donne naissance.

Seeling (P.).— *Sur la résolution de l'équation* $x^2 - Ay^2 = \pm 1$ *en nombres entiers, A devant être positif et non carré.* (10 p.; all.)

Cette Note est suivie d'une Table de tous les nombres A jusqu'à 7000 dont les racines carrées, développées en fractions continues, donnent des périodes d'un nombre impair de termes, et qui, par suite, rendent résoluble l'équation $x^2 - Ay^2 = -1$.

Nippert (P.). — *Théorème de Géométrie.* (6 p.; all.)

La somme des carrés des droites qui joignent tous les sommets d'un polygone régulier à un point quelconque d'une circonférence concentrique à ce polygone est constante.

Albrich (C.). — *Sur les podaires.* (6 p.; all.)

Fasbender. — *Les angles que les lignes de gravité du triangle forment entre elles.* (2 p.; fr.)

Gherardi (S.) (trad. par Max. Curtze.). — *Contributions à l'histoire de la Faculté mathématique de l'ancienne Université de Bologne.* (140 p.; all.)

L'extrême rareté des exemplaires de l'original italien de ce Mémoire, publié à Bologne en 1846, est cause que les géomètres français et allemands, qui se sont occupés dans ces derniers temps de l'histoire des Mathématiques, n'ont pu profiter des importantes rectifications qu'il apporte sur certains points, encore mal connus, tels que l'histoire de la découverte de la résolution du troisième degré, celle des rapports de Copernic avec son maître, Domenico Maria Novara da Ferrara, etc.

Mittelacher (C.). — *Théorie du quadrilatère elliptique complet, et ses applications.* (34 p.; all.)

L'auteur entend par là un système de lignes déterminé par deux directions arbitraires et par leurs conjuguées relativement à une ellipse donnée.

Fuortes (T.). — *Démonstration du théorème de Géométrie connu sous le nom de théorème de Fermat.* (3 p.; all.).

Extrait du *Giornale di Matematiche,* t. VII.

Collins (M.). — *Démonstration de ce théorème, que les milieux des trois diagonales d'un quadrilatère complet sont en ligne droite.* (4 p.; all.)

Extrait des *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux,* t. VI.

Grunert (J.-A.). — *Distance du centre de gravité d'un triangle au centre du cercle inscrit.* (3 p.; all.)

Fasbender. — *Le lieu du centre du cercle inscrit à un quadrilatère circonscriptible donné.* (2 p.; fr.)

Unferdinger (Fr.). — *Remarques sur quelques passages du* Compendium der höheren Analysis *de M. Schlomilch.* (4 p.; all.)

Versluys (J.). — *Discussion complète d'un système d'équations linéaires.* (21 p.; fr.).

L'auteur discute, au moyen des déterminants, les divers cas d'incompatibilité et d'indétermination d'un système de n équations à n inconnues.

Versluys (J.). — *Discussion de l'équation du second degré en coordonnées planaires.* (16 p.; fr.)

Étant donnée une équation homogène du second degré entre quatre variables, considérées comme des coordonnées planaires, déterminer l'espèce de la surface représentée par cette équation.

Steinhauser (A.). — *Sur la détermination de la somme des angles des polygones plans.* (16 p.; all.)

Il s'agit ici des polygones pris dans le sens le plus général, et présentant des points de croisement ou des points doubles.

Delabar. — *Construction des axes d'une ellipse quelconque, dont on donne deux diamètres conjugués.* (3 p.; all.)

Pelz (C.). — *La projection centrale et la projection parallèle des surfaces du second degré sur le plan d'une section circulaire.* (18 p.; all.).

On sait que les foyers d'une section plane d'un cône droit sont déterminés par les points de contact des deux sphères tangentes au cône et au plan de la section. Ce théorème conduit à une construction directe des foyers du contour d'une surface du second degré, projetée centralement ou parallèlement sur le plan d'une de ses sections circulaires.

Grunert (J.-A.). — *Sur l'équation du cercle circonscrit à un triangle et sur les équations des quatre cercles tangents au triangle, en coordonnées trilinéaires.* (28 p.; all.)

Rump (F.-H.). — *Sur deux théorèmes de Trigonométrie.* (2 p.; all.)

Unferdinger (Fr.). — *Sur la détermination d'une courbe au moyen d'une propriété de sa tangente.* (3 p.; all.)

Spitzer (S.). — *Représentation de la fonction $y = x^n e^{\lambda x^2}$, où λ désigne une constante différente de zéro, et n un entier nul ou positif, sous la forme $y = \mathrm{S}[\mathrm{A}_m e^{mx}]$.* (3 p.; all.)

Cette transformation se tire de l'égalité

$$e^{\lambda x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2} + ux\sqrt{2\lambda}}\, du.$$

Spitzer (S.) — *Représentation de la fonction $y = x^n e^{ax^2}$, où a désigne une constante différente de zéro, et n un entier nul ou positif, sous la forme $y = \mathrm{S}[\mathrm{A}_m e^{mx}]$.* (2 p.; all.)

Autre manière d'obtenir la transformation précédente.

Bretschneider (C.-A.). — *Moyen simple de calculer les angles d'un triangle plan ou sphérique au moyen de ses côtés.*

En calculant, comme auxiliaire, le rayon du cercle inscrit.

Versluys (J.). — *Discussion de quelques théorèmes et problèmes de Géométrie analytique.* (48 p.; fr.)

1° Condition qui exprime qu'une droite passe par le pôle d'une autre droite par rapport à une conique dont l'équation est donnée en coordonnées trilinéaires; problèmes analogues pour d'autres systèmes de coordonnées, et applications de ces problèmes. Tous les résultats sont donnés sous la forme de déterminants, et la plupart sont obtenus à l'aide des propriétés des déterminants.

2° Discussion des paires de droites qui passent par les points d'intersection d'une conique et d'une paire de droites, avec les problèmes analogues dans d'autres systèmes de coordonnées.

3° Application de ce qui précède à la discussion des quatre points d'intersection et des tangentes communes de deux coniques.

4° Application d'une notation de Salmon aux coordonnées tangentielles et aux coordonnées quadriplanaires.

Pfeil (L. von). — *Réfraction de la lumière dans l'atmosphère des planètes.* (23 p.; all.)

L'auteur applique ses considérations aux passages de Vénus.

Kulp. — *Recherches expérimentales sur le magnétisme.* (1re Partie.) (10 p.; all.)

Hochheim (Ad.). — *Problème d'optique.* (36 p.; all.)

Étant donnés deux milieux transparents, avec le rapport de leurs indices de réfraction, on prend dans chaque milieu un point, et l'on suppose que l'un de ces points émette des rayons lumineux. On demande de déterminer en quel endroit un de ces rayons doit rencontrer la surface de séparation des deux milieux pour que, après s'être réfracté, il aille passer par l'autre point donné.

Grunert (J.-A.). — *Sur une méthode graphique pour déterminer le centre de gravité d'un quadrilatère quelconque.* (3 p.; all.)

JOURNAL de Mathématiques pures et appliquées, publié par J. Liouville. (2e série, t. XVI, 1871) [1].

Jordan (C.). — *Mémoire sur la résolution des équations algébriques les unes par les autres.* (20 p.)

---

[1] Voir *Bulletin*, t. I, p. 91, et t. II, p. 33.

Voici les principaux résultats des recherches exposées dans le Mémoire de M. Jordan :

Théorème I. — *La recherche des groupes résolubles les plus généraux se ramène immédiatement à celle des groupes résolubles primitifs et indécomposables les plus généraux.*

Théorème II. — *Ces derniers groupes ont pour degré μ^m, m étant entier, et μ un diviseur de l'un des facteurs de composition q de l'une des équations auxiliaires dont les conditions du problème font dépendre les équations cherchées.*

Saint-Venant (de). — *Rapport fait à l'Académie des Sciences sur un Mémoire de* M. Boussinesq, *présenté le* 19 *avril* 1869, *avec additions du* 29 *novembre, et relatif à la théorie des ondes liquides périodiques.* (10 p.)

La formation et la propagation des ondes à la surface des eaux, ainsi que dans l'intérieur de leurs masses, ont occupé de tous temps les physiciens et les géomètres. L'auteur du Mémoire s'est proposé d'étudier un phénomène qui, malgré quelques analogies, est essentiellement différent, et dont les lois sont plus simples. Il considère une masse finie, où il suppose qu'un ébranlement périodique est produit dans un espace limité, soit en tous sens, soit dans un ou deux sens; et il détermine les mouvements, nécessairement de même période, qui en résultent dans tout le reste de la masse, spécialement aux points situés au delà d'une certaine distance de ceux où l'ébranlement a été provoqué. M. de Saint-Venant termine en ces termes son rapport :

« Vos commissaires pensent, en résumé, que M. Boussinesq a traité à un nouveau point de vue, et d'une manière aussi exacte que féconde, le problème intéressant des ondes liquides; qu'il a montré, dans son Mémoire, un remarquable esprit d'invention secondé constamment par l'habileté analytique, et ils vous proposent d'ordonner l'impression de ce travail dans le *Recueil des Savants étrangers.* »

Bourget (J.). — *Théorie mathématique des machines à air chaud.* (94 p.)

M. Bourget s'est proposé de traiter la partie théorique des machines à gaz chauffés; le travail actuel ne fait que résumer les idées que M. Bourget avait déjà développées, en 1857, dans divers Mémoires présentés à l'Académie des Sciences. (*Comptes rendus*, t. XLV, p. 742 et 1069; année 1857.)

Dans la PREMIÈRE PARTIE, comprenant *les notions préliminaires et les lois sur les gaz permanents*, l'auteur montre que la loi de transformation entre le travail et le calorique est implicitement contenue dans celles de Mariotte, de Gay-Lussac et de Dulong. Sa démonstration, très-simple et très-élémentaire, aurait sa place toute naturelle dans l'enseignement secondaire et préparerait parfaitement les esprits des élèves aux raisonnements et aux conceptions de la Thermodynamique.

La SECONDE PARTIE du Mémoire est consacrée à la *théorie des machines atmosphériques;* la TROISIÈME, à celle *des machines à air comprimé;* la QUATRIÈME PARTIE renferme des *applications numériques.*

Les conclusions de ce travail, fort importantes au point de vue de la pratique, sont bien mises en relief par la traduction en nombres des formules générales. Les calculs, d'ailleurs fort simples, sont disposés avec le plus grand soin et rendent très-facile la lecture de ce Mémoire, qui peut être une excellente préparation à l'étude des méthodes plus générales, mais beaucoup plus délicates, à l'aide desquelles on aborde la théorie des machines thermiques.

Une *Note additionnelle* renferme les deux théorèmes suivants :

Théorème I. — *Toutes les machines parfaites, ayant pour cycle un quadrilatère curviligne formé de deux courbes isothermiques et de deux ordonnées quelconques, ont même rendement.*

Théorème II. — *Une machine correspondante à un cycle fermé quelconque a un rendement inférieur à celui d'une machine parfaite fonctionnant entre les mêmes températures.*

BOUSSINESQ (J.). — *Etude nouvelle sur l'équilibre et le mouvement des corps solides élastiques dont certaines dimensions sont très-petites par rapport à d'autres.* (150 p.)

M. Boussinesq s'est proposé d'établir rigoureusement, en parlant des formules de la théorie de l'élasticité, les équations générales de l'équilibre et du mouvement des tiges et des plaques très-minces. Passant en revue les travaux de Poisson, Cauchy, Kirchhoff, Gerhind, etc., il montre que certaines hypothèses relatives, soit aux contours, soit à l'action des fibres les unes sur les autres, sont ou fausses ou incomplétement établies; et, à des méthodes qui laissaient subsister le doute ou l'incertitude, il substitue une analyse générale, directe et rigoureuse, qui a l'avantage de bien préciser ces questions délicates.

Il serait impossible d'analyser sérieusement en quelques lignes ce Mémoire très-considérable; nous devrons nous contenter de donner l'indication des questions qui y sont abordées.

Premier Mémoire. — *Des tiges.*

Historique de la question.

§ I. Rappel des équations générales de l'élasticité.

§ II. Formules des forces élastiques pour diverses espèces de milieux.

§ III. Étude d'une tige de très-petite section. Considérations préliminaires.

§ IV. Détermination de N_2, N_3, T_1.

§ V. Détermination de N_1, T_3, T_2.

§ VI. Forme de la tige après les déplacements.

§ VII. Théorie de Kirchhoff.

§ VIII. Décomposition de l'action totale exercée sur un tronçon de la tige en six actions élémentaires, qui produisent respectivement une extension ou une contraction, deux flexions égales, deux flexions inégales et une torsion.

§ IX. Lois générales de la torsion. Rapports du problème de la torsion avec celui de l'écoulement régulier d'un liquide dans un tube rectiligne et de section constante, mouillé par ce liquide.

§ X. Sections planes pour lesquelles les intégrations relatives à la torsion et à la flexion inégale ont pu être effectuées.

§ XI. Exemples divers d'équilibre et de mouvement d'une tige rectiligne dont les déformations totales sont très-petites.

Second Mémoire. — *Des plaques planes.*

Historique de la question.

§ I. Préliminaires.

§ II. Équations indéfinies.

§ III. Conditions spéciales aux contours des plaques.

§ IV. Unité de la solution du problème de l'équilibre.

§ V. Équations générales des petits mouvements.

§ VI. Cas où la plaque est soumise à des tractions considérables, antérieures aux déplacements. Vibrations des membranes en tenant compte de la rigidité.

SAINT-VENANT (DE). — *Formules des augmentations que de petites déformations d'un solide apportent aux pressions ou forces élastiques, supposées considérables, qui déjà étaient en jeu dans son intérieur. Complément et modification du préambule du Mémoire :* DISTRIBUTION DES ÉLASTICITÉS AUTOUR DE CHAQUE POINT, *etc., qui a été inséré en* 1863 *au* JOURNAL DE MATHÉMATIQUES (2e Série, t. VIII, p. 26 à 282). (33 p.)

Ce Mémoire, destiné à compléter ce qui regarde les formules fondamentales de la théorie de l'élasticité des corps solides, comprend deux Parties.

Dans la première Partie, M. de Saint-Venant s'occupe des formules complètes des forces élastiques s'exerçant à la suite de petites déformations subies, lorsqu'il y avait en jeu, à l'intérieur du corps, des forces considérables du même genre avant ces déformations; il montre que ces formules peuvent se déduire du potentiel intérieur de l'élasticité du corps, mais que, pour obtenir la valeur complète de ce potentiel, il faut renoncer à le calculer en partant du fait généralement admis de la forme linéaire des six composantes des pressions.

Dans la seconde Partie, il est démontré qu'on peut établir des formules générales donnant les valeurs des coefficients d'élasticité en fonction des coefficients constants, mesurés d'avance pour un état déterminé du corps, tel que son état le plus habituel, et des pressions antérieures relatives à cet état.

SAINT-VENANT (DE). — *Mémoire sur l'établissement des équations différentielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état.* (9 p.)

Ce Mémoire devant avoir une continuation, il en sera parlé plus loin.

MANNHEIM (A.). — *Démonstration géométrique d'une propriété de la transformation par rayons vecteurs réciproques.* (4 p.)

M. Mannheim donne une démonstration géométrique de cette importante propriété, que, par une transformation directe d'une figure, on peut obtenir le résultat de transformations successives; cette proposition a été énoncée, pour la première fois, par M. Liouville, qui en donna une démonstration analytique.

Newcomb (S.). — *Théorie des perturbations de la Lune qui sont dues à l'action des planètes.* (48 p.)

Levy (M.). — *Extrait du Mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état;* présenté à l'Académie le 20 juin 1870. (4 p.)

Saint-Venant (de). — *Complément aux Mémoires du 7 mars* 1870 *de M. de Saint-Venant, et du* 19 *juin* 1870 *de M. Levy, sur les équations différentielles* INDÉFINIES *du mouvement intérieur des solides ductiles, etc..... Équations* DÉFINIES *ou relatives aux limites de ces corps; applications.* (10 p.)

Comme le titre l'indique, ces deux Mémoires font suite au Mémoire précédent de M. de Saint-Venant. Dans le premier Article, M. de Saint-Venant avait donné les équations des mouvements de déformation des masses ductiles pour le seul cas de mouvements dans des plans parallèles. M. Levy établit les équations générales pour des mouvements quelconques dans l'espace, et en conclut les équations pour le cas important où tout est symétrique autour d'un axe; c'est le cas des expériences de M. Tresca, tant d'*écoulement* que de poinçonnage. Dans le cas général, il y a neuf équations *indéfinies*, ou applicables à tous les points de la masse, servant à déterminer les tensions N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z et les composantes u, v, w de la vitesse d'un point quelconque de la masse ductile. Dans le cas de la symétrie autour d'un axe, les équations indéfinies se réduisent à six.

M. de Saint-Venant, dans ce dernier Mémoire, complète le précédent en établissant les équations *définies*, ou conditions-limites relatives aux points de certaines surfaces, que les expressions des inconnues, satisfaisant aux équations définies, sont astreintes à vérifier. Il y a, en général, trois groupes distincts d'équations définies.

JORDAN (C.). — *Théorèmes sur les groupes primitifs.* (26 p.)

On ne connaît encore qu'un petit nombre des propriétés générales des groupes primitifs; et, comme c'est dans la recherche de ces groupes que se concentrent les principales difficultés de la théorie des substitutions, les généralisations que M. Jordan fait connaître dans ce Mémoire ont donc un véritable intérêt. Voici les énoncés des théorèmes qu'il démontre :

Théorème I. — *Si un groupe* G, *primitif et de degré* n, *contient un groupe* Γ *dont les substitutions ne déplacent que* p *lettres et les permutent transitivement* (p *étant un entier quelconque*), *il sera au moins* $(n-p-2q+3)$ *fois primitif,* q *étant le plus grand diviseur de* p *tel, que l'on puisse répartir les lettres de* Γ *de deux manières différentes en systèmes de* q *lettres jouissant de la propriété que chaque substitution de* Γ *remplace les lettres de chaque système par celles d'un même système.*

Si aucun des diviseurs de p *ne jouit de cette propriété* (*ce qui arrivera notamment si* Γ *est primitif, ou formé des puissances d'une seule substitution circulaire*), G *sera* $(n-p+1)$ *fois transitif.*

Théorème II. — *Soit* A *une substitution quelconque, déplaçant* N *lettres. Un groupe primitif* G, *contenant la substitution* A, *sera nécessairement symétrique ou alterné, dès que son degré atteindra une certaine limite* A.

Théorème III. — *Soit* A *une substitution d'ordre premier* p *et contenant deux cycles. Tout groupe primitif* G, *contenant la substitution* A, *sera symétrique ou alterné dès que son degré dépassera* $\frac{9p}{2}-1$.

L. P.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, publiés par MM. les Secrétaires perpétuels [1].

T. LXXIII.

N° 23. Séance du 4 décembre 1871.

CHASLES. — *Théorèmes relatifs aux axes harmoniques des courbes géométriques.*

---

[1] Voir *Bulletin*, t. I, p. 29.

SECCHI (Le P.). — *Sur un nouveau moyen de mesurer les hauteurs des protubérances solaires.*

SECCHI (Le P.). — *Sur la température solaire.*

LE VERRIER. — *Sur l'apparition d'étoiles filantes du mois de novembre.*

TRESCA. — *Sur le rabotage des métaux.*

RESAL (H.). — *Recherches sur le calcul des volants des machines à détente et à condensation.*

SCHMIDT (J.). — *Étoiles filantes de novembre, observées à Athènes.*

JORDAN (C.). — *Sur les sommes de Gauss à plusieurs variables.*

Un géomètre allemand, M. Weber, a consacré, dans le *Journal de Borchardt*, t. LXXIV, 1871, p. 14, un Mémoire au calcul de l'expression

$$\Phi = \sum_{s_1, \ldots, s_p}{}_0^{n-1} e^{\frac{2\pi i}{n} f(s_1, s_2, \ldots, s_p)},$$

où f est une fonction homogène du second degré en $s_1, s_2, \ldots, s_p$. M. Jordan traite cette même question plus simplement, et, dans sa Note, qui comprend trois pages, ramène, comme M. Weber, le calcul de cette expression à celui d'une expression analogue, dans laquelle la fonction f ne renferme plus que $(p-1)$ variables.

MAGNAC (DE). — *Sur la détermination, au moyen des chronomètres, des différences de longitude de points éloignés.*

N° 24. Séance du 11 décembre 1871.

BOUSSINESQ (J.). — *Sur une propriété remarquable des points où les lignes de plus grande pente d'une surface ont leurs plans osculateurs verticaux, et sur la différence qui existe généralement, à la surface de la terre, entre les lignes de faîte ou de thalweg et celles le long desquelles la pente du sol est un minimum.*

Les points en question jouissent de la propriété d'être, sur chaque ligne de niveau, ceux où la pente de la surface, généralement variable le long d'une telle ligne, devient maximum ou minimum.

TASTES (DE). — *Note sur un propulseur.*

BARTHÉLEMY. — *Étude des vibrations communiquées au mercure et aux liquides en général.*