BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Extrait d'une lettre de M. R. Lipschitz, professeur à l'université de Bonn

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 3 (1872), p. 349-352
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1872__3__349_0>

MÉLANGES.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. R. LIPSCHITZ,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITE DE BONN.

Les *Comptes rendus* du 29 juillet 1872 contiennent une Note de M. Yvon Villarceau intitulée : MÉCANIQUE : *Sur un nouveau théorème de Mécanique générale.* L'auteur indique au début de cette Note que, par suite de la facilité avec laquelle il démontre son théorème, il a présumé que cette proposition devait être connue depuis longtemps, et que M. Bertrand a bien voulu lui indiquer comme pouvant avoir quelque analogie avec son théorème une Note de M. Clausius, qui a été communiquée à l'Académie dans la séance du 20 juin 1870 sous le titre suivant : PHYSIQUE MATHÉMATIQUE : *Sur une quantité analogue au potentiel et sur un théorème y relatif.* Je suis en mesure d'indiquer plusieurs travaux qui sont dans les rapports les plus étroits avec le théorème publié par M. Villarceau. D'abord, dans le Mémoire de Jacobi : *Ueber die Reduction der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen irgend einer Zahl Variabeln auf die Integration eines einzingen Systems gewohnlicher Differentialgleichungen,* du 9 novembre 1836 (*Journal de Crelle*, t. 17, p. 97-162; la fin de l'article 6, p. 118 à 122); en second lieu, les recherches précédentes plus développées dans l'Ouvrage de Jacobi : *Vorlesungen uber Dynamik* (Berlin, 1866, à la fin de la 4e Leçon, p. 21-30); en troisième lieu, un travail que j'ai publié dans le *Journal de Borchardt,* 16 octobre 1866, t. 66, p. 363-374 : *Ueber einen algebraischen Typus der Bedingungen eines bewegten Massensystems,* où sont mentionnés les travaux que je viens de signaler de Jacobi. J'ai indiqué verbalement l'existence de ces trois Mémoires à M. le professeur Clausius, quand ce savant publia une première Note sur les recherches dont il a été question plus haut dans les *Sitzungsberichte der Niederrheinischen Gesellschaft fur Natur-und Heilkunde zu Bonn* (Juin 1870, p. 114).

Pour montrer avec évidence les rapports des Mémoires dont il a été question plus haut avec le théorème de M. Villarceau, j'emploie les notations suivantes. Soient x_α, y_α, z_α les coordonnées rectangulaires d'un point mobile $\mathfrak{M}_\alpha$; a_α, b_α, c_α les coordonnées rectangulaires d'un point fixe $\mathfrak{A}_\alpha$, l'indice α pouvant prendre les valeurs 1, 2, 3,..., n. Soit m_α la masse du point mobile $\mathfrak{M}_\alpha$ et supposons que ce point soit soumis à l'action d'une force motrice ayant pour composantes X_α, Y_α, Z_α. On suppose que le système $\mathfrak{M}_\alpha$ soit soumis à des liaisons qui s'expriment par les équations de condition

$$\Phi_1 = 0,\ \Phi_2 = 0, \ldots,\ \Phi_i = 0,$$

où $\Phi_1, \ldots, \Phi_i$ sont des *fonctions homogènes* des différences

$$x_\alpha - a_\alpha,\ y_\alpha - b_\alpha,\ z_\alpha - c_\alpha.$$

Soit t le temps, et désignons par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i$ des multiplicateurs indéterminés; alors les équations différentielles du mouvement du système des points matériels seront les suivantes :

$$(\mathrm{I}) \qquad \left\{ \begin{aligned} m_\alpha \frac{d^2 x_\alpha}{dt^2} &= X_\alpha + \lambda_1 \frac{d\Phi_1}{dx_\alpha} + \ldots + \lambda_i \frac{d\Phi_i}{dx_\alpha}, \\ m_\alpha \frac{d^2 y_\alpha}{dt^2} &= Y_\alpha + \lambda_1 \frac{d\Phi_1}{dy_\alpha} + \ldots + \lambda_i \frac{d\Phi_i}{dy_\alpha}, \\ m_\alpha \frac{d^2 z_\alpha}{dt^2} &= Z_\alpha + \lambda_1 \frac{d\Phi_1}{dz_\alpha} + \ldots + \lambda_i \frac{d\Phi_i}{dz_\alpha}. \end{aligned} \right.$$

Introduisons maintenant une quantité G définie par l'équation

$$2G = \sum_\alpha m_\alpha [(x_\alpha - a_\alpha)^2 + (y_\alpha - b_\alpha)^2 + (z_\alpha - c_\alpha)^2],$$

et la force vive totale

$$2T = \sum_\alpha m_\alpha \left[\left(\frac{dx_\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_\alpha}{dt}\right)^2 \right];$$

alors il résulte du système d'équations différentielles la relation

$$(\mathrm{II}) \quad \frac{d^2 G}{dt^2} - 2T = \sum_\alpha [(x_\alpha - a_\alpha) X_\alpha + (y_\alpha - b_\alpha) Y_\alpha + (z_\alpha - c_\alpha) Z_\alpha],$$

qui est indépendante des fonctions $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_i$.

Ces résultats reviennent à ceux que j'ai donnés dans le Mémoire cité, si l'on suppose que les composantes X_α, Y_α, Z_α des forces motrices soient les dérivées partielles d'une même fonction des forces

U par rapport aux coordonnées correspondantes x_α, y_α, z_α, et l'équation (II) précédente se transforme alors en l'équation (6) de ce Mémoire, p. 366. Cette équation (6), dont l'analogie avec *l'intégrale des forces vives* a été signalée dans l'introduction du Mémoire cité, forme la base des recherches qui y sont exposées, *sur les conditions de stabilité dans certains problèmes de mouvements.*

D'ailleurs, si l'on suppose qu'il n'y ait pas d'équations de condition $\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_i = 0$, et que tous les points $\mathfrak{M}_\alpha$ viennent se réunir à l'origine, et par suite que l'on ait $a_\alpha = b_\alpha = c_\alpha = 0$, l'équation (II) devient identique avec l'équation (6) de M. Villarceau.

On doit faire les mêmes suppositions et les combiner avec celle de l'existence d'une fonction des forces, pour obtenir le résultat de Jacobi. Cette fonction des forces U doit être supposée une fonction homogène d'ordre k des coordonnées x_α, y_α, z_α, en sorte qu'elle satisfasse à l'équation

$$\sum_\alpha X_\alpha \frac{dU}{dx_\alpha} + Y_\alpha \frac{dU}{dy_\alpha} + Z_\alpha \frac{dU}{dz_\alpha} - k\,U,$$

et qu'on puisse appliquer l'intégrale des forces vives

$$T = U + h.$$

Alors de l'équation (II) on déduit la formule (2) de la page 22 des *Vorlesungen uber Dynamik* de Jacobi. Cet auteur nomme plus tard la masse totale du système M, les coordonnées du centre de gravité A, B, C, la distance de deux points du système $\mathfrak{M}_\alpha$, $\mathfrak{M}_{\alpha'}$, $r_{\alpha\alpha'}$, et il forme l'équation

$$\text{(III)} \qquad M\sum_\alpha m_\alpha r_\alpha^2 - M^2(A^2 + B^2 + C^2) = \sum_{\alpha\,\alpha} m_\alpha m_{\alpha'} r_{\alpha,\alpha'}^2.$$

En supposant que les forces motrices du système soient telles que le centre de gravité de l'ensemble se déplace avec une vitesse uniforme sur une droite, Jacobi combine l'équation précédente avec les suivantes :

$$\text{(IV)} \qquad A = \alpha + \alpha' t, \quad B = \beta + \beta' t, \quad C = \gamma + \gamma' t,$$

qui sont la traduction analytique de la supposition relative au centre de gravité du système, et où α, β, γ, α', β', γ' sont des constantes, et il obtient, par la substitution dans son équation (2), un nouveau résultat exprimé dans son équation (3) de la page 23. Il rappelle ensuite que, si l'on désigne par ρ_α la distance du point B_α au centre de gravité du système, on a

$$\text{(V)}\qquad M\sum_\alpha m_\alpha \rho_\alpha^2 = \sum_{\alpha,\alpha'} m_\alpha m_{\alpha'} r_{\alpha,\alpha'}.$$

Si *l'on ne tient pas compte* de la supposition exprimée par les équations (IV), et qu'on applique seulement les équations (III) et (V) à la transformation de l'équation (6) de M. Villarceau, on obtient le résultat donné par ce géomètre à la page 236.

L'équation (II), multipliée par l'élément dt et intégrée entre les limites σ et τ, nous fournit la relation

$$\text{(VI)}\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{dg}{dt}\right)_\sigma^\tau - 2\int_\sigma^\tau T\,dt \\ &= \int_\sigma^\tau \sum_\alpha [(x_\alpha - a_\alpha)X_\alpha + (y_\alpha - b_\alpha)Y_\alpha + (z_\alpha - c_\alpha)Z_\alpha]\,dt. \end{aligned}\right.$$

Dans le cas où, comme précédemment, on a

$$X_\alpha = \frac{dU}{dx_\alpha},\quad Y_\alpha = \frac{dU}{dy_\alpha},\quad Z_\alpha = \frac{dU}{dz_\alpha},$$

et où l'on a par conséquent l'intégrale des forces vives

$$T = U + h = U + T(0) - U(0),$$

et où, en outre, U est une fonction homogène des différences $x_\alpha - a_\alpha$, $y_\alpha - b_\alpha$, $z_\alpha - c_\alpha$, en sorte que l'on ait

$$\sum_\alpha \left[(x_\alpha - a_\alpha)\frac{dU}{dx_\alpha} + (y_\alpha - b_\alpha)\frac{dU}{dy_\alpha} + (z_\alpha - c_\alpha)\frac{dU}{dz_\alpha}\right] = kU,$$

alors on déduit de (VI) la formule (10), page 368 de mon Mémoire déjà cité. Si l'on ne suppose, au contraire, aucune équation de condition et tous les points $\mathcal{A}_\alpha$ réunis à l'origine des coordonnées, alors l'équation (VI) divisée par $\tau - \sigma$, en supposant *le système doué d'un mouvement stable*, donne, en faisant croître $\tau - \sigma$ au delà de toute limite, le théorème mentionné de M. le professeur Clausius. Enfin, si l'on ajoute à ces conditions la suivante : qu'il existe une fonction des forces qui soit une fonction homogène du degré $k = -1$ des coordonnées $x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha$, alors l'équation (VI) coïncide avec celle que Jacobi a donnée à la page 28 des *Vorlesungen über Dynamik*.