BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Revue des publications périodiques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 3 (1872), p. 327-348

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1872__3__327_1>

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

MATHEMATISCHE ANNALEN, herausgegeben von A. CLEBSCH und C. NEUMANN ([1]).

ZEUTHEN (H.-G.). — *Recherche des singularités qui ont rapport à une droite multiple d'une surface.* (20 p.; fr.)

ZEUTHEN (H.-G.). — *Études géométriques de quelques-unes des propriétés de deux surfaces dont les points se correspondent un à un.* (20 p.; fr.)

ZEUTHEN (H.-G.). — *Note sur la théorie des surfaces réciproques.* (5 p.; fr.)

Les recherches auxquelles M. Zeuthen s'est livré dans le second de ces Mémoires abordent par le côté *géométrique* la question de la *transformation rationnelle* des surfaces algébriques, traitée dans ces derniers temps par divers géomètres ([2]), de préférence par la voie analytique. Ces recherches conduisent à des résultats intéressants par leur démonstration géométrique, et, de plus, en partie nouveaux et de grande importance pour cette théorie de la transformation.

Pàr les démonstrations géométriques, auxquelles sont aussi consacrés le premier et le troisième des Mémoires indiqués ci-dessus, et qui servent d'introduction au second, les recherches de MM. Salmon ([3]) et Cayley ([4]) sur les *singularités des surfaces* se trouvent poussées plus loin. L'Introduction à la première Note donne une extension des vingt-cinq équations de Salmon et Cayley (analogues aux relations de Plücker pour les courbes), par l'admission de points coniques particuliers et des plans tangents singuliers correspon-

([1]) Voir *Bulletin*, t. I, p. 124.

([2]) *Voir* les articles *Sur la représentation des surfaces* dans les trois premiers volumes du *Bulletin.*

([3]) *Geometry of three dimensions*, 2d édition, p. 450.

([4]) *On Reciprocal Surfaces.* (*Philosoph. Transact.* 1869, p. 159.)

dants. La difficulté de ces considérations consiste en ce que les points ou les plans singuliers d'une surface, définis au point de vue de la Géométrie ponctuelle, présenteront, en général, des propriétés tangentielles particulières, et réciproquement; ou encore en ce que la transformation qui change une surface dans sa réciproque a des propriétés spéciales, qui jusqu'ici n'ont guère pu être prises en considération dans la théorie générale des transformations. Ainsi la théorie actuelle, pour quelques-uns des points singuliers, a dû rester incomplète, et c'est ce que signale particulièrement la troisième Note.

Le premier Mémoire étudie en outre les singularités qui se rapportent à une *droite multiple* (M) d'une surface, en s'aidant d'une courbe qui représente la relation entre les points et les plans tangents de la surface sur M. On obtient ainsi les nombres de Plücker pour la section résidue d'un plan passant par M, et pour le cône circonscrit résidu mené d'un point de M. Enfin l'auteur fait une application aux propriétés des droites d'une surface du 4^e ordre ayant deux droites doubles qui se coupent.

Le deuxième Mémoire, dans son Introduction, qui se rattache en partie à un Mémoire de M. Nöther (1), donne une discussion étendue des relations entre deux surfaces (F_1, F_2) dont les points se correspondent un à un, et des courbes qui sur chacune de ces surfaces correspondent aux points fondamentaux de l'autre. On suppose ici, en particulier, qu'il n'existe pas de directions fondamentales aux points fondamentaux, c'est-à-dire qu'il n'y a pas deux points fondamentaux consécutifs en cet endroit. La partie principale du Mémoire est consacrée à la démonstration de *quatre relations* entre les nombres caractéristiques des deux surfaces et les nombres introduits par la transformation.

Les deux premières de ces relations (I_a) et (I_b) sont les mêmes que l'on peut déduire par l'étude des courbes d'une surface qui correspondent aux points fondamentaux et aux courbes fondamentales de l'autre surface (2). M. Zeuthen considère deux courbes infiniment voisines sur F_1, qui correspondent à deux sections planes consécutives de F_2, et il détermine directement le nombre des points

(1) *Mathem. Annalen*, t. II, p. 294. (Voir *Bulletin*, t. II, p. 181.)
(2) *Voir* le Mémoire cité. (*Mathem. Ann.*, t. II, p. 312.)

d'intersection apparents de ces courbes; comme on connaît les points d'intersection réels et l'ordre des courbes, on obtient une relation, qui est une des deux ci-dessus.

Pour déduire les deux autres relations (II) et (III), l'auteur prend une voie semblable à celle qu'il a déjà suivie pour les courbes planes (¹). Il construit une surface auxiliaire F_3, lieu des points où les droites qui joignent un point fixe aux points de F_1 rencontrent les plans qui joignent les points correspondants de F_2 à une droite fixe M; et, en outre, une seconde surface auxiliaire F_4, résultant d'une construction semblable où l'on a échangé entre elles F_1 et F_2. Les singularités de la surface F_3 (ou F_4), qui correspondent uniformément à F_1 et à F_2, sont déterminées par celles de F_1 et de F_2. En établissant deux expressions de la classe de F_3, on obtient l'équation (II), qui met en relation les points fondamentaux des deux surfaces données, et qui est *nouvelle* dans la théorie générale des transformations (²). Citons seulement un cas particulier de cette formule.

Supposons que F_1 et F_2 n'aient aucune courbe cuspidale. Soient n_1, n'_1 l'ordre et la classe de F_1; a_1 la classe d'une section plane de F_1; n_2, n'_2, a_2 les nombres analogues pour F_2. La condition pour que les deux surfaces puissent se correspondre uniformément *sans qu'il existe,* et pour qu'elles aient ainsi la même géométrie, c'est-à-dire pour que, suivant une expression de M. Clebsch (³), elles puissent appartenir au *même type,* sera

$$n'_1 - 2a_1 + 3n_1 = n'_2 - 2a_2 + 3n_2.$$

La quatrième relation (III) exprime le théorème de l'égalité du *genre p* des surfaces F_1 et F_2 (⁴). On détermine les nombres C_3 et C_4 des plans tangents stationnaires des cônes résidus, circonscrits aux surfaces F_3 et F_4 d'un point de la droite M comme sommet. Pour deux de ces cônes, on démontre qu'ils ont des nombres caractéris-

(¹) *Mathem. Ann.,* t. III. (Voir *Bulletin,* t. II, p. 357.)

(²) Elle a été donnée pour la première fois par l'auteur dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* t. LXX, p. 745; 1870. (Voir *Bulletin,* t. I, p. 156.)

(³) *Mathem. Ann.,* t. V, p. 18.

(⁴) *Voir* l'analyse du Mémoire déjà cité de M. Nöther. (*Bulletin,* t. II, p. 182.)

tiques égaux, et la relation $C_3 = C_4$ conduit alors directement à celle qui se rapporte à p.

Cette démonstration a sur celle qu'a donnée M. Nöther l'avantage de s'appliquer aussi aux cas où la formule donne pour p une valeur négative, et où l'on avait posé $p = 0$ dans l'exposition de ce dernier auteur, parce que précisément la quantité C_3 y reste elle-même positive. Ainsi la formule pour les surfaces coniques donne le genre d'une section plane, pris négativement ([1]).

M. Zeuthen s'est encore occupé, à la fin de son Mémoire, de trois applications de la théorie :

1° A la représentation d'une surface sur un plan simple ;

2° A la théorie des surfaces réciproques. Dans cette théorie, on obtient, au moyen des relations (II) et (III), une nouvelle équation (différente des vingt-cinq précédentes), l'équation (13) et (14) de la page 46, donnée déjà par M. Cayley dans son *Mémoire sur les surfaces réciproques*. Cette équation a été, en outre, dans la troisième des Notes que nous analysons, déduite du principe de correspondance de M. Chasles (p. 636).

3° A la représentation d'une surface sur un plan multiple, considéré lui-même comme surface.

Klein (F.) et Lie (S.). — *Sur les courbes planes qui se changent en elles-mêmes par un système fermé de transformations linéaires permutables en nombre simplement infini.* (36 p.)

Ce Mémoire traite un sujet que les auteurs avaient déjà abordé auparavant ([2]), et doit être considéré comme un développement plus étendu des Notes présentées à cette époque. Il ne s'agit ici que de la théorie des *formes géométriques qui, par un nombre infini de transformations linéaires permutables, se succédant d'une manière continue, se changent en elles-mêmes*. Le présent travail ne contient cependant qu'une partie de la théorie entière, celle qui se rapporte aux figures *planes;* les auteurs se réservent de traiter plus tard le cas des figures dans l'espace. L'objet de leur étude est donc essentiellement la considération des courbes qui, comme le titre l'indique, se reproduisent elles-mêmes par une infinité de

---

([1]) Comme M. Cayley l'avait deja observé. (*Mathem. Ann.*, t. III, p. 526.)

([2]) *Comptes rendus*, 6 et 13 juin 1870. (Voir *Bulletin*, t. I, p. 335 et 338.)

transformations permutables (se succédant les unes aux autres d'une manière continue).

Les auteurs commencent par une énumération des courbes appartenant à cette catégorie. Ces courbes peuvent être définies directement comme les intégrales des équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants entre deux variables. Parmi elles se trouvent, par exemple, les *paraboles,* ainsi que la *spirale logarithmique.* Ensuite on établit les propriétés de ces courbes qui s'obtiennent par un mode de déduction particulier et immédiat, qui est systématiquement employé dans tout le cours du Mémoire, et que les auteurs formulent ainsi :

Quand une figure géométrique se reproduit elle-même par certaines transformations, toute figure qui a avec la proposée une relation inaltérable par les transformations, se change par ces différentes transformations en des figures qui ont la même relation avec la figure primitive.

Parmi les propositions que l'on obtient, nous ne remarquerons, par exemple, que la suivante, que nous énoncerons pour la spirale logarithmique : « Si l'on coupe une spirale logarithmique par une droite, et qu'en n des points d'intersection on continue les tangentes, celles-ci rencontrent la courbe en de nouveaux points, qui sont situés n à n en ligne droite. »

Vient ensuite une recherche pour déterminer combien il y a dans le plan de systèmes de transformations linéaires permutables, qui ne soient pas encore contenues dans d'autres plus générales. Il s'en trouve cinq, qui sont toutes doublement infinies; parmi elles se trouve, en particulier, le système de toutes les transformations linéaires qui laissent un triangle invariable. Chacun de ces systèmes détermine, au point de vue des auteurs, une série infinie d'affinités, et, *relativement à ces affinités, les courbes considérées ont la propriété remarquable de se changer en courbes de la même espèce.* Parmi les affinités qui se rattachent aux transformations linéaires d'un triangle en lui-même, se trouve, par exemple, la réciprocité polaire ordinaire par rapport à une conique, ainsi qu'un grand nombre d'autres affinités connues. Citons encore le théorème suivant, qui en est une dépendance : « La spirale logarithmique est sa propre polaire réciproque par rapport à toute hyperbole équilatère qui a son centre au pôle de la spirale et qui lui est tangente. »

Enfin vient une application des mêmes considérations aux équations différentielles, d'abord à celles qui ont lieu entre deux variables. Les équations différentielles qui se reproduisent elles-mêmes par les mêmes transformations continues présentent les mêmes difficultés d'intégration; en particulier, *l'intégration des équations différentielles qui se reproduisent elles-mêmes par des transformations linéaires continues n'exige que des quadratures.* Comme application géométrique de cette proposition, on a, par exemple, le théorème suivant : *Si l'on imprime à une courbe quelconque un mouvement hélicoïdal, elle décrit une surface dont on peut trouver les courbes aux tangentes principales et les lignes de courbure par des quadratures.*

Hoppe (R.). — *Sur la détermination directe des dérivées d'ordre supérieur.* (3 p.)

Mayer (A.). — *Sur l'intégration des équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre d'une même fonction inconnue.* (7 p.)

Brioschi (F.). — *Les tangentes doubles à une courbe du quatrième degré avec un point double.* (4 p.; fr.)

Cremona (L.). — *Observations géométriques à propos de la Note de M. Brioschi.* (4 p.; fr.)

Par une transformation uniforme, toute courbe du 4^e ordre avec un point double peut être changée en une courbe dans laquelle le point double est aussi un centre, de sorte que les rayons partant de ce point rencontrent encore la courbe en deux points équidistants du précédent. Une telle courbe est appelée par M. Cremona *courbe homologique-harmonique.* Son équation est

$$u - bvz^2 = 0,$$

u et v ne dépendant que de x et de y. M. Brioschi fait voir que la théorie de cette courbe est en correspondance exacte avec la théorie des formes binaires simultanées du 2^e et du 4^e degré u, v. D'autre part, la courbe est liée avec les intégrales hyperelliptiques dans lesquelles le produit uv entre sous le radical carré. La bissection des fonctions hyperelliptiques correspondantes, c'est-à-dire, géométriquement, la recherche des tangentes doubles de la courbe, se ramène, à l'aide des formes simultanées u, v, à la résolution des équations

$$u = 0, \quad v = 0,$$

et aux équations quadratiques. M. Cremona rattache à la détermination des tangentes doubles de la courbe, traitée par M. Brioschi, la remarque que ces tangentes peuvent être mises en rapport avec les droites d'une surface du 3e ordre, lorsque cette surface a une certaine singularité; de même que M. Geiser a mis en rapport les tangentes doubles d'une courbe générale du 4e ordre avec les droites d'une surface générale du 3e ordre.

Lommel (E.). — *Sur la théorie des fonctions de Bessel.* (14 p.)

Korndörfer (G.). — *Représentation d'une surface du 4e ordre avec une courbe double du 4e degré, formée de deux droites infiniment voisines qui se coupent.* (18 p.)

Ce Mémoire fait suite à un précédent Mémoire de l'auteur, publié dans les *Mathem. Annalen* (t. I), et embrasse les cas particuliers indiqués dans le titre. Dans un Appendice, M. Korndörfer donne un aperçu de tous les cas traités par lui et de leur représentation.

Du Bois-Reymond (P.). — *Note sur un théorème de Cauchy, concernant la continuité des sommes de séries infinies.* (3 p.)

Cantor (G.). — *Sur les séries trigonométriques.* (5 p.)

Gundelfinger (S.). — *Sur les formes cubiques ternaires.* (20 p.)

La théorie des courbes planes du 3e ordre a donné une impulsion considérable au développement de la nouvelle Algèbre. Ces recherches algébriques remontent aux grands travaux de M. Hesse sur les points d'inflexion des courbes du 3e ordre, travaux dans lesquels un covariant de la forme (la forme hessienne) et un invariant (le déterminant) se présentent déjà. Tandis que Cayley, dans ses *Memoirs upon Quantics,* établissait d'autres formes, en s'appuyant sur la forme conique donnée par Heine, c'est Aronhold qui, le premier (¹), a entrepris de développer, en partant de principes généraux, la théorie des formes cubiques ternaires. Sa méthode de notation symbolique l'a conduit à établir les deux invariants S et T, comme ceux en fonction desquels tous les autres peuvent s'exprimer. Le cycle de formes considéré par lui a été d'abord élargi par Brioschi (²), qui y a ajouté un covariant du 9ᵉ degré; puis par Clebsch et Gordan, dans le t. I des *Mathem. Annalen*. Ce sont les travaux fondamentaux de Gordan sur la non-infinité du système de formes qui se présente dans les formes binaires qui ont permis, pour la première fois, de penser à la possibilité qu'il existe aussi, dans les formes ternaires, un système fini de formes. Cette possibilité a été ensuite démontrée par Gordan dans le même volume des *Mathem. Annalen* (³).

Dans le présent travail, M. Gundelfinger a pour objet de grouper d'une manière claire le système des formes nécessaires; puis il perfectionne les anciennes méthodes de manière à rendre possible la représentation de toutes les formes de ce système pour le faisceau de courbes avec les points d'inflexion communs, comme pour le faisceau correspondant avec des tangentes de rebroussement communes.

Gundelfinger (S.). — *Sur quelques théorèmes généraux de la nouvelle Algèbre*. (5 p.)

Pour les formes binaires biquadratiques et les formes ternaires cubiques, on a, comme Heine l'a montré le premier, la loi suivante : « La forme hessienne de toute combinaison linéaire de la forme primitive et de sa forme hessienne est encore une combinaison linéaire. » Ce théorème a été le point de départ des nouveaux travaux sur les formes de Cayley et d'Aronhold. M. Gundelfinger fait remarquer que l'on peut tirer généralement les mêmes conséquences toutes les fois que l'on possède un covariant qui se comporte vis-à-vis de sa forme primitive comme le fait, dans les cas indiqués, la forme hessienne vis-à-vis de sa forme primitive.

Gordan (P.). — *Résultantes de covariants*. (3 p.)

L'auteur détermine les résultantes d'une forme binaire donnée,

---

(¹) *Journal de Crelle*, t. 39 et 55.

(²) *Comptes rendus*, 1863. (*Journal de Crelle*, t. 63.)

(³) Voir *Bulletin*, t. I, p. 129.

de son déterminant fonctionnel avec une seconde, ainsi que de son déterminant hessien.

HIERHOLZER (C.). — *Sur une surface du 4^e^ ordre.* (9 p.)

Étude développée de la surface du 4ᵉ ordre qui, d'après un précédent travail de l'auteur (1), est engendrée par le sommet d'un cône passant par six points de l'espace.

LÜROTH (J.). — *Note sur les points de ramification et sur les sections transverses d'une surface de Riemann.* (4 p.)

Ce petit travail donne la solution d'un problème d'une importance fondamentale pour la théorie des fonctions abéliennes, et conduit surtout à des conceptions précises sur la nature des surfaces à plusieurs feuillets ou nappes, à l'aide desquelles Riemann nous a appris à interpréter la marche d'une fonction algébrique d'une seule variable. L'auteur fait voir que la connexion des nappes peut toujours être ordonnée d'une manière déterminée, et qu'en même temps les points de ramification qui les unissent peuvent être ordonnés d'une façon entièrement déterminée. Les points de ramification se partagent alors en groupes, dont chacun en contient un nombre pair. Les points du premier groupe unissent tous la première nappe avec la seconde; ceux du second groupe la seconde nappe avec la troisième, et ainsi de suite; enfin les points du dernier groupe unissent l'avant-dernière nappe avec la dernière. En se servant de cette disposition, on peut tracer dans les surfaces à n nappes les sections transverses et les sections de passage avec autant de simplicité et de clarté que Riemann l'a fait pour les surfaces à deux nappes dans le cas des fonctions hyperelliptiques.

AFFOLTER (Fr.-G.). — *Théorèmes et problèmes sur la sphère.* (10 p.)

Solution, par la voie des constructions géométriques, du problème de construire une sphère qui coupe cinq sphères données sous des angles égaux.

HOSSENFELDER (E.). — *Sur l'intégration d'une équation différentielle du $n^{ième}$ ordre.* (18 p.)

---

(1) *Mathem. Ann.*, t. II. (Voir *Bulletin*, t. II, p. 239.)

Cremona (L.). — *Sur la représentation des surfaces algébriques.* (18 p.)

Clausius (R.). — *Sur l'application d'une nouvelle équation mécanique, établie par l'auteur, au mouvement d'un point matériel autour d'un centre fixe d'attraction, et de deux points matériels l'un autour de l'autre.* (12 p.)

Weyr (Em.). — *Sur les courbes rationnelles du 4^e ordre.* (2 p.)

Godt (J.-W.-P.). — *Note concernant la distribution de l'électricité sur un corps terminé par deux calottes sphériques.* (4 p.)

Sturm (R.). — *Sur les surfaces avec un nombre fini de droites simples, et principalement sur celles du 4^e et du 5^e ordre.* (35 p.)

Ce Mémoire contient un grand nombre de résultats, les uns connus, les autres nouveaux, que l'auteur a extraits d'un Ouvrage étendu qu'il se dispose à publier. Les surfaces qu'il étudie sont en grande partie les mêmes que M. Clebsch a traitées successivement par la méthode de la représentation. M. Sturm, un des élèves les plus distingués de Steiner, et connu par son Livre sur les surfaces du 3^e ordre, a aussi effectué les recherches actuelles exclusivement à l'aide des considérations synthétiques, de sorte que la publication de son travail complet sera sans aucun doute d'un grand intérêt pour les progrès de la Géométrie synthétique.

Clebsch (A.). — *Sur l'application des substitutions quadratiques aux équations du cinquième degré et à la théorie géométrique du quintilatère plan.* (62 p.)

Tandis que la nouvelle Algèbre a commencé par considérer les formes algébriques au seul point de vue des transformations linéaires de leurs variables, cependant elle peut aborder aussi de la même manière l'étude des transformations uniformes d'ordre supérieur. Que ces dernières, dans la théorie des formes binaires, ne conduisent pas à d'autres principes que ceux que l'on a employés dans les transformations linéaires, c'est ce qui résulte déjà des travaux de MM. Hermite et Gordan. Dans les recherches actuelles, il s'agit de l'interprétation d'une transformation d'ordre supérieur des formes binaires, qui rattache celles-ci aux transformations linéaires d'un espace à plusieurs dimensions. Pour les équations du 5^e degré, le plan est suffisant. Toutes les équations dans lesquelles peut se transformer une équation donnée du 5ᵉ degré sont représentées par les systèmes des points d'intersection des droites du plan avec cinq droites fixes, choisies arbitrairement. Pour que l'équation résultante possède une propriété d'invariant déterminée, la droite variable, sur laquelle se trouve le système des points d'intersection, doit être tangente à une courbe plane correspondante. Les courbes ainsi définies, qui sont subordonnées au quintilatère fixe et déterminées par lui, sont remarquables par leurs propriétés et par les relations qu'elles ont entre elles. Par exemple, l'auteur traite en particulier une courbe de 12ᵉ classe, possédant une double série de tangentes doubles singulières, et au moyen de cette courbe il donne une interprétation géométrique exacte des propriétés de la résolvante du 6ᵉ degré, à laquelle conduit la théorie des équations du 5ᵉ degré.

La résolution géométrique des équations du 5ᵉ degré, équivalente à celles qui ont été données par MM. Hermite et Kronecker, repose sur la dépendance que l'auteur établit entre la recherche de ces tangentes doubles et les équations modulaires connues avec leur interprétation géométrique. On y est conduit par cette circonstance, que ces douze tangentes doubles correspondent uniformément aux droites d'une double série qui appartient à une certaine surface remarquable du 3ᵉ ordre. Cette surface, appelée par l'auteur *surface diagonale,* est définie comme une surface passant par les diagonales de tous les quadrilatères, suivant lesquels chaque face d'un certain pentaèdre est coupée par les autres. Parmi les trente-six doubles-six que forment les vingt-sept droites de cette surface, il y en a une qui se trouve linéairement, c'est-à-dire sans résoudre une équation de degré supérieur; les deux sixaines dans lesquelles il se décompose donnent deux représentations particulières de la surface sur le plan, lesquelles se trouvent au moyen d'une équation quadratique, et, par suite, se construisent avec la règle et le compas. Les six points fondamentaux d'une telle représentation forment un système de points très-remarquable, qui représente géométriquement l'équation modulaire. Ces six points ont, en effet, la propriété de pouvoir, de dix manières différentes, être assemblés en un hexagone de Brianchon; le système des six points est par là complétement défini aux transformations projectives près. Mais si l'on joint à ces six points un autre point quelconque du plan, on obtient six rayons, dont les rapports anharmoniques, formés avec deux droites quelconques menées du même point, sont les racines de l'équation modulaire, ou plutôt les racines d'une équation qui ne peut différer de celle-là que par une transformation linéaire. Tandis donc que la représentation de la surface diagonale se trouve au moyen d'une équation quadratique, on obtient ses points fondamentaux au moyen d'une équation modulaire. Si l'on connaît celle-ci, on pourra déterminer toutes les vingt-sept droites de la surface diagonale, et, par suite aussi, les faces du pentaèdre, c'est-à-dire les racines de l'équation du 5e degré qu'il s'agit de résoudre.

Klein (F.). — *Sur une représentation géométrique de la résolvante des équations algébriques.* (13 p.)

Ce travail se rattache à celui de MM. Klein et Lie : « Sur les courbes planes qui se changent en elles-mêmes, etc. (¹) », par cette circonstance que, comme dans ce dernier, on a en vue des systèmes de transformations géométriques; toutefois celles-ci ne se succèdent pas, comme précédemment, les unes aux autres d'une manière continue, mais les systèmes se composent d'individus discrets. L'auteur fait voir que *la théorie des équations générales du n^{ieme} degré de Galois coïncide avec la théorie des covariants et des invariants de n éléments d'une espèce de n — 2 dimensions,* en ce sens qu'aux permutations des n racines d'une équation algébrique entre elles correspondent les transformations linéaires de l'espace de $n - 2$ dimensions, qui permutent entre eux n éléments de cet espace. Ainsi la théorie projectivo-géométrique du quadrilatère dans le plan et du pentaèdre dans l'espace est en même temps la théorie des équations générales du 4e et du 5e degré. Mais les équations particulières peuvent trouver aussi leur interprétation d'une manière analogue. L'auteur rappelle surtout l'équation aux points d'inflexion d'une courbe du 3e ordre, pour laquelle on fait usage de cette proposition : *Toute courbe du 3e ordre se change en elle-même au moyen de dix-huit transformations linéaires.* Puis il explique comment on peut rattacher une interprétation des équations du 6e degré à six complexes linéaires, situés deux à deux en involu-

(¹) *Voir* plus haut, p. 330.

tion, et dont les relations mutuelles ont été déjà étudiées par l'auteur dans une autre occasion ([1]).

Cayley (A.). — *Exemple de transformation d'ordre supérieur d'une fonction binaire.* (3 p.; angl.)

A l'aide d'une méthode très-directe, une forme biquadratique est soumise à une substitution quadratique, problème qui a été traité sous la même forme d'énoncé par Gordan ([2]), et, plus anciennement, sous un autre énoncé, par Hermite ([3]).

Du Bois-Reymond (P.). — *Théorie des intégrales et des séries de Fourier.* (29 p.)

Andréiewsky (M.). — *Propriétés de quelques quadratures, déduites de l'intégration des expressions différentielles à deux variables.* (12 p.; fr.)

Klein (F.). — *Note concernant la dépendance entre la Géométrie linéaire et la Mécanique des corps solides.* (13 p.)

Que la théorie des mouvements infiniment petits des corps solides, ou, ce qui est la même chose, la composition des forces qui agissent sur un corps solide soit étroitement liée avec la doctrine projectivo-géométrique dont il était question quelques lignes plus haut, c'est-à-dire avec la *Géométrie linéaire,* c'est un fait connu et souvent énoncé, nommément par Plücker dans sa *Nouvelle Géométrie* ([4]); mais jusqu'ici il manquait à ces assertions d'être établies avec toute la précision désirable. L'auteur a entrepris de suppléer à ce défaut, et il explique ainsi, en particulier, comment à chaque système de forces ou à chaque mouvement infiniment petit correspond un complexe linéaire comme image géométrique. Puis il établit, entre autres, le théorème suivant : *Lorsqu'un système de forces donné par l'intervention d'un mouvement infiniment petit ne produit aucun travail, les deux complexes correspondants sont en involution.* On peut ramener à cette proposition la dualité qui

---

([1]) *Sur la théorie des complexes de lignes droites du premier et du second degré.* (*Mathem. Ann.;* voir *Bulletin,* t. II, p. 179.)

([2]) *Journal de Borchardt,* t. 71.

([3]) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* t. XLVI.

([4]) Voir *Bulletin,* t. I, p. 73 et suiv.

règne entre les systèmes de forces et les mouvements infiniment petits.

Stolz (O.). — *Signification géométrique des éléments complexes en Géométrie analytique.* (26 p.)

L'imaginaire en Géométrie, qui s'est introduit forcément dans l'application de l'Analyse à cette science, a depuis longtemps, comme on sait, constitué une des principales difficultés que l'on ait rencontrées dans la formation rationnelle d'une doctrine purement géométrique (ou synthétique). Chez Poncelet, Chasles, etc., on trouve les éléments complexes, définis d'une manière plus ou moins vague; ainsi, chez ces auteurs, les éléments complexes conjugués ne sont pas considérés séparément. Von Staudt, le premier, est parvenu à résoudre ce problème fondamental, en définissant les éléments complexes comme les éléments doubles de relations involutives, et caractérisant l'élément double isolé d'une manière plus précise, par le *sens* dans lequel on se meut, en vertu de la relation, en allant d'un élément vers son correspondant. Les recherches de Von Staudt, qu'il a publiées dans ses *Beiträge zur Geometrie der Lage* (1856-1860), n'ont été depuis qu'imparfaitement comprises. On doit attribuer cela tant aux difficultés assez considérables que présente le sujet par lui-même qu'à l'exposition serrée et systématiquement rapide dont Von Staudt a revêtu ses pensées. On a d'autant plus lieu d'être reconnaissant envers l'auteur du présent Mémoire, qui a entrepris de développer les conceptions de Von Staudt par la voie des considérations analytiques. Elles présentent, sur le mode d'exposition de Von Staudt lui-même, cet avantage, que *le principe directeur est donné à l'avance.* En même temps se trouve ainsi remplie une lacune qui existait jusqu'à présent dans le système de la nouvelle conception géométrique, personne n'ayant encore démontré explicitement que les imaginaires de la Géométrie analytique sont identiques avec ceux de Von Staudt.

Diekmann (J.). — *Sur les modifications que subit une représentation plane d'une surface du 3e ordre, lorsqu'il s'y introduit des singularités.* (34 p.)

On possède, comme on sait, une classification, due à M. Schläfli, des surfaces du 3e degré d'après le nombre de leurs points nodaux [1]. Le présent Mémoire a maintenant pour objet de rechercher comment la représentation de la surface générale F_3 sur le plan (représentation dans laquelle se présentent six points fondamentaux situés arbitrairement) se modifie dans les cas singuliers. La recherche est faite pour les huit espèces de M. Schläfli qui ne possèdent qu'un seul point nodal. Son principe est contenu dans les deux théorèmes suivants :

I. *La représentation ordinaire de* F_3 *peut être regardée comme obtenue au moyen d'une courbe gauche du* 3e *ordre, tracée sur la surface.*

On rapporte, en effet, immédiatement F_3 aux systèmes de sécantes de C_3; si l'on représente ces dernières sur le plan, conformément à leur génération, par deux faisceaux de plans projectifs, on a la représentation ordinaire de F_3. On conclut de là qu'il y a autant de représentations d'une surface F_3 essentiellement différentes, qu'il y a sur la surface de groupes de courbes C_3 d'espèce différente. Parmi les soixante-douze groupes de courbes C_3 sur la surface générale F_3, il n'y en a aucun qui soit singulier; il n'y a aussi pour la surface générale F_3, en réalité, qu'une seule espèce de représentation. Pour les espèces particulières de F_3, il en est autrement; ainsi l'espèce 7 de Schläfli admet six modes de représentation différents.

II. *Si l'on a une représentation d'une surface* F_3, *on en obtient une autre, et, en répétant le procédé, on obtient toutes les autres, en appliquant au plan de représentation une transformation quadratique qui se rapporte à un triangle formé avec les points fondamentaux.*

Dans les F_3 avec un point nodal, il y a un mode de représentation donné à l'avance : la représentation au moyen de la projection centrale partant du point nodal. Par cette représentation, on étudie combien il y a sur la surface d'espèces différentes de systèmes de C_3, et l'on obtient ensuite les représentations de la surface correspondant à ces systèmes, au moyen de transformations quadratiques, convenablement choisies, du plan de représentation. Au Mémoire est jointe une planche sur laquelle est indiquée schématiquement

(1) Voir *Philosoph. Transactions ;* 1863.

la position des points fondamentaux pour les différents cas. Dans le dernier cas (Schläfli, n° 20), tous les points fondamentaux se sont rapprochés à des distances infiniment petites les unes des autres, et trois d'entre eux se trouvent en ligne droite.

Clebsch (A.). — *Sur le pentagone plan.* (14 p.)

Si dans un pentagone sans angles rentrants on construit le pentagone des diagonales, celui-ci sera de même nature que le premier, et seulement plus petit. Si pour le nouveau pentagone on construit encore le pentagone des diagonales, et ainsi de suite, on s'approchera ainsi indéfiniment d'un point déterminé. L'auteur fait voir que deux pentagones consécutifs quelconques se correspondent suivant une certaine collinéation. Le point-limite est un sommet du triangle fondamental de la collinéation, et il correspond à une racine, que l'on peut indiquer d'une manière précise, de l'équation cubique corrélative, racine qui se trouve en même temps construite *géométriquement.*

Clebsch (A.). — *Sur la théorie des transformations de Cremona.* (7 p.)

M. Cremona a trouvé par induction ce théorème, que, dans une représentation uniforme d'un plan sur un plan, les nombres qui indiquent combien il y a, dans l'un et dans l'autre plan, de points fondamentaux équivalents, sont les mêmes, à l'ordre de succession près. Ce théorème est démontré dans le présent travail.

Minnigerode (B.). — *Remarque sur les nombres irrationnels.* (2 p.)

L'auteur démontre qu'il n'est pas possible d'exprimer toutes les grandeurs numériques sous forme de fonctions rationnelles d'un degré fini donné, au moyen d'une suite finie donnée d'irrationnalités, mais avec des coefficients du reste rationnels.

Most (R.). — *Sur les dérivées d'ordre supérieur.* (6 p.)

Somoff (J.). — *Sur la rectification approximative des courbes quelconques.* (5 p.)

Brill (A.). — *Sur la théorie de l'élimination et des courbes algébriques.* (17 p.)

Lorsque les équations de trois courbes algébriques sont identiquement satisfaites par les coordonnées d'un ou de plusieurs points, on sait que la résultante s'annule. On peut se proposer de rechercher la condition pour que les courbes aient un nouveau point commun. L'auteur indique une méthode pour former les fonctions des coefficients des équations qui se présentent dans ce cas à la place de la résultante, et il en détermine le degré. Passant au cas où l'équation de l'une des courbes n'est pas identiquement satisfaite, il résout pour une courbe de genre quelconque le problème connu : « Si à chaque point d'une courbe correspond un certain nombre de points x et de points y, trouver le nombre de ces points pour lesquels un point x coïncide avec un point y correspondant. » (Dans les *Gott. Nachr.*, 4 octobre 1871, l'auteur a donné au résultat une autre forme élégante.) Viennent ensuite des applications à la théorie des courbes dans l'espace.

Brill (A.). — *Sur deux problèmes de contact.* (23 p.)

L'auteur traite par des moyens algébriques ces problèmes, déjà résolus par la voie synthétique : « Trouver les courbes d'un faisceau qui ont avec une courbe donnée, 1° en un point, 2° en deux points différents, un contact multiponctuel. » Chaque théorème sur les points d'intersection d'un faisceau plan de courbes à r paramètres arbitraires avec une courbe donnée peut être interprété relativement à une figure dans un espace à r dimensions, qui corresponde uniformément à chaque courbe. La relation réciproque des plans osculateurs et des points d'une courbe dans l'espace donne lieu ainsi à un théorème sur la relation réciproque entre deux certains faisceaux de courbes. L'auteur généralise ce théorème sous la forme d'un théorème de déterminants, qui est le fondement de la solution du premier problème. Le second problème est résolu par l'emploi de la proposition du précédent Mémoire sur la correspondance des couples de points. L'auteur fait ensuite des applications aux courbes dans l'espace et aux surfaces gauches.

Andréiewsky (M.). — *Formules relatives à la théorie des intégrales définies.* (8 p.; fr.)

Cayley (A.). — *Sur une surface du* 8^e^ *ordre.* (3 p.; angl.)

Nouvelle étude analytique de la surface traitée par M. Hierholzer, en tenant compte du travail de cet auteur [1].

---

[1] *Voir* plus haut, p. 335.

Gundelfinger (S.). — *Sur les singularités d'une courbe du 3e ordre.* (11 p.)

L'auteur étudie les invariants, covariants, etc., qui s'évanouissent lorsqu'une courbe du 3e ordre acquiert un point double ou un point de rebroussement, ou se décompose; il établit, en outre, les formes dont les coefficients servent à trouver les coordonnées des éléments singuliers correspondants, ou les parties isolées de la courbe qui se décompose.

Klein (F.). — *Sur la Géometrie dite non euclidienne.* (54 p.)

Ce Mémoire est le développement d'une Note publiée sous le même titre dans les *Nachrichten* de Göttingue, et dont la traduction a paru dans le *Bulletin* (1). Nous nous bornerons, en conséquence, à remarquer que l'exposition développée traite principalement de la détermination métrique projective, pour obtenir ainsi une image aussi concrète que possible de la nature des déterminations métriques dans les *multiplicités* de courbure constante, et en particulier de la détermination métrique de la Géométrie non euclidienne.

Heine (E.). — *Sur quelques hypothèses dans la démonstration du principe de Dirichlet.* (5 p.)

PROCEEDINGS of the London Mathematical Society (2).

T. I. Janvier 1865 à novembre 1866.

Morgan (A. de). — *Discours à la séance d'inauguration* (16 janvier 1865). (10 p.)

Sylvester (J.-J.). — *Preuve élémentaire et généralisation de*

---

(1) T. II, p. 341-351.

(2) Nous analyserons régulièrement cet important Recueil, dont le 4e volume est en cours de publication. Nous donnons les titres des Memoires déja anciens contenus dans les deux premiers volumes. Nous développerons les comptes rendus des Mémoires à partir du t. III. Les volumes complets des *Proceedings* se trouvent chez MM. C.-P. Hodgson et fils, 1 Gough Square, Fleet Street, aux prix suivants : Vol. I, 10 sh.; vol. II, 16 sh. Les communications aux secrétaires doivent être adressees : London Mathematical Society, 22, Albemarle Street, W.; ou University College School, Gover Street, W.-C.

la règle donnée sans démonstration, par Isaac Newton, relative aux racines imaginaires des équations. (16 p.)

Cayley (A.). — *Sur la transformation des courbes planes.* (11 p.)

Harley (R.). — *Sur les résolvantes différentielles.* (10 p.)

Tucker (M.-A.). — *Sur les courbes radiales.* (7 p.)

Cotterill (T.). — *Sur certaines propriétés des polygones plans d'un nombre pair de côtés.* (4 p.)

Morgan (A. de). — *Preuve que toute équation a une racine.* (1 p.)

Sylvester (J.-J.). — *Sur une addition au procédé de Poinsot pour représenter le mouvement d'un corps solide tournant librement autour d'un point, addition dans laquelle le temps est compté mécaniquement.* (2 p.)

Crofton (W.). — *Sur certaines propriétés des ovales de Descartes, traitées par la méthode des coordonnées bipolaires.* (14 p.)

Cayley (A.). — *Sur la correspondance entre deux points d'une courbe.* (4 p.)

Smith (S.). — *Sur une formule relative à la multiplication de 4 fonctions* ϑ. (12 p.)

Cotterill (T.). — *Sur un système de cubiques circulaires en involution et sur la description de la courbe par points, quand le double foyer est sur la courbe.* (2 p.)

T. II. Novembre 1866 à Novembre 1869.

Clifford (W.-K.). — *Sur la théorie générale du rapport anharmonique.* (4 p.)

Roberts (S.). — *Sur l'ordre de certains systèmes d'équations algébriques.* (13 p.)

Townsend (R.). — *Solution, par la méthode ordinaire homographique, du problème suivant : Inscrire dans une quadrique donnée un polygone d'un nombre de côtés donné, dont les côtés* *passent par des points fixes disposés d'une manière quelconque dans l'espace.* (4 p.)

Morgan (A. de). — *Sur l'octagramme conique.* (3 p.)

Morgan Jenkins. — *Preuve d'un théorème important d'Arithmétique, par le moyen duquel on peut déduire de la 4e démonstration, donnée par Gauss, de la loi de réciprocité de Legendre l'extension de cette loi.* (4 p.)

Crofton (W.). — *Sur différentes propriétés des quartiques bicirculaires.* (12 p.)

Hirst. — *De la représentation des points de l'espace par des groupes de trois points portés sur une ligne.*

Cayley (A.) — *Sur les logarithmes des quantités imaginaires.* (4 p.)

Crofton (W.). — *Sur la théorie de la probabilité locale.* (2 p.)

Clerk Maxwell (J.). — *Sur les diagrammes réciproques dans l'espace et leur relation avec la fonction des forces de Airy.* (4 p.)

Cayley (A.). — *Sur les surfaces réciproques.* (3 p.)

Martin Gardiner (C.-E.) — *Sur l'inscription dans un quadrèque d'un polygone de n côtés, dont les côtés doivent passer, dans un ordre déterminé, par n points fixes. Simplification du mode de réduction de sir W.-R. Hamilton.* (5 p.)

Polignac (C. de). — *Sur un problème de combinaisons.* (6 p.)

Wolhouse (W.-S.-B.). — *Sur les solutions numériques des problèmes.* (10 p.)

Morgan (A. de). — *Remarques sur le travail précédent.* (1 p.)

Smith (S.-T.-J.-H.). — *Sur différentes constructions géométriques.* (16 p.)

Henrici (O.). — *Sur une certaine formule concernant la théorie des discriminants, avec applications aux discriminants de discriminants et à la théorie des courbes polaires.* (12 p.)

Clifford (W.-K.). — *Sur une généralisation de la théorie des polaires.* (3 p.)

COTTERILL (Th.). — *Sur une correspondance entre les points de deux figures, dans laquelle à une courbe du $n^{ième}$ ordre dans une figure correspond dans l'autre une courbe d'ordre $4n$ avec trois points multiples d'ordre n et d'autres points multiples d'ordre* $2n$. (7 p.)

ROBERTS (S.). — *Sur la description mécanique de différentes espèces de courbes circulaires du 3ᵉ et du 4ᵉ degré.* (10 p.)

SYLVESTER (J.-J.). — *Aperçu de la théorie des cyclodes réductibles, c'est-à-dire sur une famille particulière d'enveloppées successives du cercle, dont la détermination dépend de la solution d'une équation indéterminée algébrique.* (24 p.)

WALKER (J.-J.). — *Sur les tangentes à la cissoïde.* (6 p.)

HIRST (A.). — *Sur les formes limites* (degenerate) *des coniques.*

MERRIFIELD (C.-W.). — *Sur une proposition géométrique, indiquant que les propriétés de l'axe radical ont été probablement connues des Arabes.* (3 p.)

HENRICI (O.). — *Sur les séries de courbes, en particulier sur les singularités de leur enveloppe avec application aux courbes polaires.* (18 p.)

SMITH (J.-St.). — *Sur les propriétés focales des figures homographiques.* (54 p.)

ARCHIVES NÉERLANDAISES DES SCIENCES EXACTES ET NATURELLES, publiées par la Société Hollandaise des Sciences à Harlem, et rédigées par T.-H. VON BAUMHAUER, secrétaire de la Société, avec la collaboration de MM. R. van Rees, I. van der Hoeven, D. Bierens de Haan, C.-A.-J.-A. Oudemans et W. Koster. — La Haye, Martinus Nijhoff; in-8° [1].

T. I; 1866.

LOBATTO (R.). — *Remarques sur une formule de M. T. Reboul pour évaluer le prix d'une assurance de survie.* (17 p.)

---

(1) Paraît annuellement par volume de 6 fascicules.

Lobatto (R.). — *Note sur la formation des équations qui font connaître le côté et les diagonales des polygones réguliers.* (18 p.)

T. II; 1867.

Bierens de Haan (D.). — *Note sur la théorie des intégrales définies.* (23 p.)

T. III; 1868.

Kaiser (P.). — *Étude de la marche de la pendule astronomique Hohwü, n° 20, et du chronomètre Knoblich, n° 1700.* (16 p.)

Hoek. — *Sur les prismes achromatiques construits avec une seule substance.* (21 p.)

Hoek. — *Détermination de la vitesse avec laquelle est entraînée une onde lumineuse traversant un milieu en mouvement.* (6 p.)

T. IV; 1869.

Kaiser (F.). — *Quelques observations sur les erreurs périodiques des vis micrométriques faites à l'occasion des derniers travaux de l'Observatoire de Leyde.*

Cohen Stuart (L.). — *Note sur les formules connues de l'équilibre intérieur d'un cylindre creux et d'une sphère creuse.* (2 p.)

Cohen Stuart (L.). — *Note sur la pression exercée sur les points d'appui.* (2 p.)

T. V; 1870.

Baehr (C.-F.-W.). — *Note sur les résultats d'une étude mathématique des mouvements de l'œil.* (5 p.)

Bierens de Haan. — *Sur quelques nouvelles formules de réduction dans la théorie des intégrales définies.* (24 p.)