BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

G. DARBOUX

Sur un théorème relatif à la continuité des fonctions

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 3 (1872), p. 307-313

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1872__3__307_0>

MÉLANGES.

SUR UN THÉORÈME RELATIF A LA CONTINUITÉ DES FONCTIONS;

PAR M. G. DARBOUX.

Parmi toutes les démonstrations connues du théorème fondamental de la théorie des équations, une des plus simples et des plus fréquemment reproduites est certainement celle que Cauchy a donnée dans le *Cours d'Analyse algébrique* (¹). L'illustre géomètre, voulant démontrer que toute équation algébrique $f(z) = 0$ a une racine réelle ou imaginaire, établit d'une manière irréprochable que le module R de la fonction $f(z)$ ne peut avoir d'autre minimum que zéro. Sa démonstration a été beaucoup simplifiée et reproduite avec d'heureux éclaircissements, que nous recommandons à l'attention des professeurs, dans la nouvelle édition, déjà presque épuisée, du *Cours d'Algèbre supérieure* de M. Serret (²). Cependant la démonstration de Cauchy et toutes celles qu'on peut lui substituer, et qui sont fondées sur la théorie des contours, pèchent en un point essentiel, que M. O. Bonnet a signalé le premier. Elles admettent toutes, en effet, que si une fonction continue reste comprise entre deux limites fixes, et ne décroît pas, par conséquent, au-dessous d'une certaine quantité, *elle atteint nécessairement la valeur qui marque la limite inférieure de toutes celles qu'elle peut avoir.*

Ainsi la démonstration de Cauchy prouve bien que, si le module a un minimum, ce minimum ne peut être que zéro; mais l'existence même de valeurs faisant acquérir au module cette valeur minimum n'est pas démontrée et demeure sujette à contestation. On peut d'ailleurs former des fonctions prenant, par exemple, toutes les valeurs supérieures à un nombre a, sans acquérir jamais une valeur égale à ce nombre. Il est vrai que ces fonctions ne sont pas continues; mais, du moment qu'un principe n'est pas vrai pour toutes les fonctions, et que, d'ailleurs, il n'est pas contenu clairement dans

(¹) *Cours d'Analyse de l'École royale Polytechnique,* par M. Augustin-Louis CAUCHY, Ingenieur des Ponts et Chaussees, Professeur d'Analyse a l'Ecole Polytechnique, etc. 1ʳᵉ Partie : *Analyse algébrique.* Imprimerie Royale, 1821.

(²) *Cours d'Algèbre supérieure,* par J.-A. SERRET, Membre de l'Institut, 3ᵉ edition. Paris, Gauthier-Villars, 1866.

la définition des fonctions continues, il devient indispensable d'en donner la démonstration.

Je me suis donc proposé d'établir rigoureusement la proposition qui suit :

Si une fonction continue de deux variables prend, pour tous les points situés à l'intérieur d'un contour fermé, des valeurs qui demeurent comprises entre deux nombres H *et* K, *elle obtient nécessairement, pour un système au moins de valeurs des deux variables indépendantes, la valeur qui marque la limite minimum ou maximum de toutes les valeurs qu'elle peut prendre.*

J'ai vu, dans le *Journal de Borchardt,* que M. Weierstrass avait démontré ce théorème pour une fonction d'une seule variable. J'ignore si cet éminent géomètre expose aussi dans ses leçons le théorème relatif aux fonctions d'un nombre quelconque de variables. En tous cas, la démonstration suivante, que j'ai communiquée à quelques personnes, a déjà été introduite par M. O. Bonnet dans son enseignement si rigoureux et si apprécié (1).

Étant donnée une fonction

$$z = f(x, y),$$

on peut représenter de la manière suivante la variation de cette fonction. Les variables x, y étant les coordonnées rectangulaires d'un point du plan, nous supposerons que la fonction z soit nettement déterminée pour tout point M situé à l'intérieur d'un certain contour (C), c'est-à-dire, qu'à tout système (x_0, y_0) de valeurs des variables indépendantes x, y, représenté par le point M, corresponde une valeur, et une seule, de la fonction $z = f(x, y)$. Nous supposerons, d'ailleurs, que la fonction ne devient infinie pour aucun des points situés à l'intérieur du contour (C).

Ces conventions étant établies, et suivant l'exemple donné par M. Bonnet pour les fonctions d'une seule variable, nous définirons la continuité *point par point,* pour ainsi dire, de la manière suivante :

Une fonction $z = f(x, y)$ *est dite continue pour un système* (x_0, y_0) *de valeurs des variables, représenté par un point* M,

(1) M. O. Bonnet veut bien m'indiquer qu'il a aussi considéré et traite depuis longtemps le cas des fonctions d'une seule variable.

quand on peut assigner autour du point M *une courbe, quelque petite qu'elle soit, telle que, pour tous les points* $M'(x, y)$ *compris à l'intérieur de cette courbe, on ait la différence*

$$f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

plus petite en valeur absolue que δ, δ *étant pris aussi petit qu'on le veut* (1).

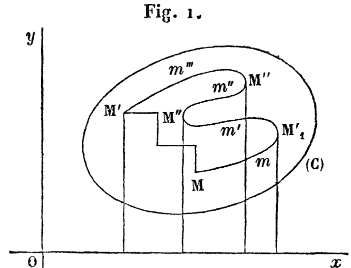
Une fonction est continue à l'intérieur d'un contour C *quand elle demeure finie et continue pour chacun des points situés à l'intérieur de ce contour.*

Il résulte de ces définitions que l'on peut étendre aux fonctions continues de deux variables quelques propositions fondamentales déjà connues, et démontrées pour les fonctions à une seule variable indépendante.

Par exemple, Cauchy, dans une Note de l'*Analyse algébrique*, p. 460, extrêmement remarquable, surtout si l'on se reporte a l'époque où elle a été écrite, a prouvé en toute rigueur qu'une fonction continue d'une seule variable ne peut varier de A à B quand x varie de a à b, sans passer au moins une fois par toutes les valeurs intermédiaires.

De même, *si une fonction de deux variables, continue dans le*

Fig. 1.



contour (C) (*fig.* 1), *prend pour deux points* M, M' *des valeurs*

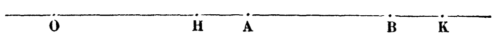
(1) Nous ferons remarquer que cette definition n'est pas la seule qu'on puisse prendre. On pourrait dire, par exemple, que la fonction est continue pour (x_0, y_0), quand $f(x_0 + h, y_0 + k)$ a pour limite $f(x_0, y_0)$, h et k tendant vers zero d'une manière quelconque. Cette definition est comprise dans celle que nous avons choisie, mais elle ne lui est pas absolument equivalente. Il y aurait aussi peut-etre avantage a indiquer dans la definition du texte la nature de la petite courbe tracee autour de M, à prendre un cercle ou un rectangle.

α, β, *elle prendra à l'intérieur du même contour toutes les valeurs intermédiaires entre* α *et* β.

J'ajoute même qu'elle prendra ces valeurs intermédiaires entre α et β sur toute courbe joignant les points M, M′. On peut, en effet, sur toute courbe, considérer la fonction comme une fonction continue d'une seule variable, soit l'abscisse, soit l'ordonnée, soit l'arc : c'est ce qu'on nous accordera sans peine. Remarquons, d'ailleurs, que, pour la démonstration qui suit, il nous suffit de savoir qu'il y a un chemin, quel qu'il soit, allant de M en M′, et tel que, sur ce chemin, la fonction prenne toutes les valeurs intermédiaires entre α et β. Or ce chemin, nous pouvons toujours le composer avec une ligne brisée formée de droites parallèles aux axes, et sur chacune desquelles la fonction ne dépend que d'une seule variable. La proposition énoncée plus haut est donc un simple corollaire du théorème de Cauchy (¹).

Ces principes étant admis, soit une fonction de deux variables, continue pour tous les points à l'intérieur d'un contour, et supposons qu'on ait démontré que toutes les valeurs possibles de la fonction sont plus grandes que h et plus petites que k.

Fig. 2.



Portons sur une droite des longueurs OH, OK égales à h et à k (*fig.* 2). Les points H, K déterminent les extrémités d'un segment, et si, à partir du point O, on porte une abscisse égale à l'une des valeurs de la fonction, l'extrémité de cette abscisse tombera nécessairement, soit au point H, soit en K, soit entre H et K. D'après cela, il y aura deux points A et B pouvant coïncider avec H ou avec K, et marquant, l'un A, la plus petite valeur au-dessous de laquelle ne se trouve jamais la fonction dans le contour, l'autre B, la plus grande valeur au-dessus de laquelle elle ne se trouve jamais. D'ailleurs, toutes les valeurs de la fonction, intermédiaires entre OA et OB,

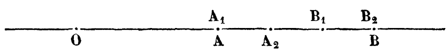
(¹) On peut d'ailleurs le démontrer pour toute courbe $MmM'_1\, m'M''m''M'''m'''M$, en décomposant cette courbe en parties, telles que MmM'_1, $M'_1\, m'M'$, pour lesquelles la fonction est déterminée sans ambiguïté pour chaque valeur de x.

seront atteintes au moins une fois [1]. *Il n'y a de doute que pour les valeurs extrêmes* OA, OB.

Cela posé, si la fonction pour un système (x_1, y_1) de valeurs de x et de y prend la valeur OA, elle atteint la plus petite des valeurs qu'elle puisse prendre, et la proposition est démontrée. Il faut donc admettre qu'on ignore si la fonction prend les valeurs OA, OB; mais on peut affirmer, dès à présent, qu'elle atteint toutes les valeurs intermédiaires. Il reste à démontrer que les valeurs extrêmes, OA par exemple, sont effectivement atteintes par la fonction pour un système, au moins, de valeurs de x et de y.

A cet effet, nous ferons remarquer que, si l'on divise d'une manière quelconque l'aire contenue dans le contour (C) en deux portions (C_1), (C_2) par un trait de séparation, à chacune des deux nouvelles aires (C_1), (C_2) correspondra sur l'axe OAB (*fig.* 4) une

Fig. 4.

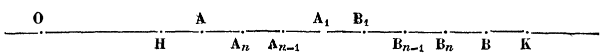


droite analogue à AB, et marquant les limites des valeurs de la fonction pour chacune des aires (C_1), (C_2). Soient A_1B_1, A_2B_2 ces deux droites; elles peuvent empiéter l'une sur l'autre, mais il est clair qu'à elles deux elles occupent nécessairement tout l'intervalle primitif AB. Il y aura donc au moins une des deux droites ayant son extrémité en A.

---

[1] Si ce point n'était pas accordé, voici comment on pourrait en établir la démonstration :

Fig. 3.



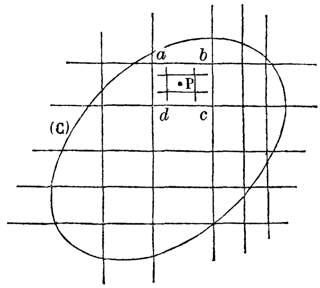
Qu'on divise l'intervalle HK en un certain nombre m de parties égales : il y a ainsi, avec H et K, $m+1$ points de division correspondant aux valeurs possibles de la fonction. Supposons que, parmi ces $m+1$ valeurs, la plus petite atteinte soit OA_1, la plus grande OB_1. En vertu de la continuité, la fonction prendra toutes les valeurs intermédiaires entre OA_1 et OB_1. Divisons de même chacun des intervalles en m parties, on en formera ainsi de plus petites donnant de nouvelles valeurs possibles de la fonction. La plus petite atteinte ne pourra être qu'inférieure ou égale à OA_1, la plus grande supérieure ou égale à OB_1. On voit donc que l'intervalle des valeurs atteintes s'étend progressivement des deux côtés, et qu'il tend vers un intervalle-limite AB; alors toutes les valeurs intermédiaires entre OA, OB sont atteintes : il y a doute seulement pour OA et OB.

En d'autres termes, il y aura une des deux aires partielles pour laquelle la limite inférieure sera la même que pour la première.

La même conclusion subsiste évidemment, si l'on divise l'aire primitive en un nombre quelconque d'aires partielles.

Par exemple, pour fixer les idées, divisons l'aire primitive (C) (*fig.* 5) par des droites parallèles aux deux axes. On formera ainsi

Fig. 5.



soit des rectangles, soit des triangles ou des quadrilatères ayant un côté curviligne. Dans l'un au moins de ces contours, la limite inférieure OA sera la même que dans le contour total. Supposons, par exemple, que ce fait se présente pour le rectangle *abcd* ([1]).

En décomposant ce rectangle en d'autres plus petits, et en raisonnant comme précédemment, on formera un nouveau rectangle compris à l'intérieur du premier, et ainsi de suite : *on formera ainsi une suite de contours tous compris les uns dans les autres, devenant aussi petits qu'on le voudra, et pour lesquels la limite inférieure est toujours la même.*

Ainsi, quelque petits que soient ces contours, la série des valeurs de la fonction à l'intérieur de chacun d'eux a pour limite inférieure toujours la même limite inférieure primitive OA.

Cela posé, comme les rectangles intérieurs les uns aux autres décroissent dans leurs deux dimensions, ils tendent vers un point unique P, qu'ils comprennent dans leur intérieur, et dont les coordonnées peuvent être définies séparément comme limites définies

([1]) Le cas où l'on serait obligé de choisir indefiniment un triangle ou quadrilatère curviligne ne fait pas difficulte; d'ailleurs, dans la plupart des cas, on est maître de la forme à donner au contour (C), et on peut lui donner celle d'un rectangle.

de grandeurs croissantes ou décroissantes. Admettons donc ce fait d'un point-limite P à l'intérieur de tous les contours successifs de plus en plus petits, intérieurs chacun à tous ceux qui le précèdent. Nous allons démontrer que la valeur de la fonction, pour ce point P, est précisément la limite inférieure OA.

En effet, soit $f(\mathrm{P})$ la valeur de la fonction au point P. On peut tracer, puisque la fonction est continue, autour du point P une aire telle, que les valeurs de la fonction $f(x, y)$ pour les points à l'intérieur de l'aire diffèrent de $f(\mathrm{P})$ aussi peu qu'on le veut. On aura, par exemple,

$$f(x, y) - f(\mathrm{P}) < \delta \quad \text{en valeur absolue,}$$

pour tous les points à l'intérieur de cette aire. Mais cette aire fixe comprend un nombre illimité des contours intérieurs rectangles considérés plus haut, dont la limite est le point P. Elle comprend donc des points pour lesquels $f(x, y) - \mathrm{OA}$ sera plus petit que toute quantité donnée ε. On aura donc

$$\mathrm{OA} - f(\mathrm{P}) < \delta + \varepsilon \quad \text{en valeur absolue,}$$

c'est-à-dire

$$f(\mathrm{P}) = \mathrm{OA}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Le théorème que nous avions en vue est donc démontré.

D'après cela, si l'on considère le module d'une fonction algébrique imaginaire entière, puisque c'est une fonction continue de deux variables et que, d'après Cauchy, il prend des valeurs aussi petites qu'on le veut, il atteint nécessairement la valeur zéro, au moins, pour un système de valeurs de x et de y. Je dois ajouter que, pour ce cas spécial, M. O. Bonnet avait déjà trouvé une démonstration directe, mais dont je n'avais pas connaissance.

Enfin il est important d'ajouter que le principe précédent permet de lever les objections toutes semblables qu'on pourrait adresser aux démonstrations fondées sur la théorie des contours élémentaires, et par lesquelles on établit directement que toute équation de degré m a m racines.