Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

H. Resal

Du mouvement relatif d'un point pesant sur une courbe comprise dans un plan vertical tournant d'un mouvement uniforme autour d'un point de ce plan

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 3 (1872), p. 29-32

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1872__3__29_1>

MÉLANGES.

DU MOUVEMENT RELATIF D'UN POINT PESANT SUR UNE COURBE COMPRISE DANS UN PLAN VERTICAL TOURNANT D'UN MOUVEMENT UNIFORME AUTOUR D'UN POINT DE CE PLAN;

Par H. RESAL.

On est conduit à ce problème de Mécanique rationnelle en étudiant le mouvement relatif de l'eau dans les roues à aubes courbes de Poncelet, qui, dans ses leçons lithographiées à l'École d'Application du Génie et de l'Artillerie, en a donné une solution approximative qui suffit pour le but pratique qu'il avait en vue. Il m'a dit autrefois qu'il avait établi l'équation du mouvement relatif et qu'il l'avait intégrée dans le cas des aubes planes; mais, dans les Notes qu'il a laissées, on n'a rien trouvé sur ce sujet, que je me propose de reprendre dans ce qui suit.

(1) *Monatsberichte der Berliner Akademie*, 1862.

Cas de la ligne droite. — Soient :

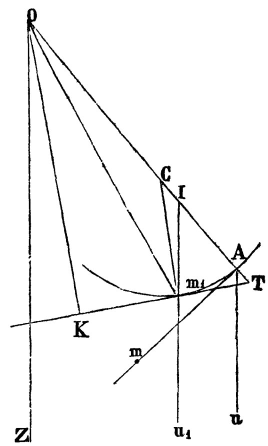
O le centre de rotation et OZ sa verticale ;

n la vitesse angulaire constante autour de O et qui est censée avoir lieu de la droite vers la gauche ;

$OA = R$ la perpendiculaire abaissée de O sur la droite donnée mA, m étant la position du mobile au bout du temps t ;

Au la verticale du point A ;

s la distance mA.



Supposant que le mouvement relatif du point ait lieu de m vers A, l'accélération relative sera $-\frac{d^2s}{dt^2}$; on a d'ailleurs

$$\widehat{ZOA} = nt + \varepsilon,$$

ε étant la valeur initiale de l'angle que forme OA avec OZ ; puis

$$\widehat{mAu} = \widehat{OAu} - \widehat{OAm} = \frac{\pi}{2} - nt - \varepsilon,$$

d'où, pour la composante de l'accélération de la pesanteur dans le sens du mouvement,

$$-g\sin(nt + \varepsilon).$$

L'accélération centrifuge estimée de la même manière est

$$-n^2\,\overline{Am} = -n^2 s.$$

Il n'y a pas lieu de tenir compte de l'accélération centrifuge composée qui, étant perpendiculaire à mA, ne donne lieu qu'à une pression. On a donc en définitive

$$\frac{d^2s}{dt^2} + g\sin(nt + (\varepsilon + n^2 s = 0,$$

d'où

$$s = -\frac{g}{n^2}\sin(nt+\varepsilon) + \mathrm{M}\cos nt + \mathrm{N}\sin nt,$$

M et N étant des constantes que l'on déterminera lorsque l'on connaîtra les valeurs de s et de la vitesse $-\frac{ds}{dt}$ à une époque déterminée.

Le temps au bout duquel, la vitesse étant nulle, le mobile sera sur le point de revenir sur ses pas, est donné par l'équation

$$-\frac{g}{n^2}\cos(nt+\varepsilon) - \mathrm{M}\sin nt + \mathrm{N}\cos nt = 0.$$

Cas où la courbe décrite est un cercle. — Ici OZ et n auront les mêmes significations que ci-dessus; A sera l'une des extrémités du diamètre du cercle de centre C passant par le point O, m_1 la position du mobile au bout du temps t, ρ le rayon Cm_1, ε la valeur initiale de l'angle $\widehat{\mathrm{ZOA}} = nt + \varepsilon$; soit de plus a la distance OC.

Prolongeons la verticale $m_1 u_1$ du point m_1 jusqu'à sa rencontre I avec OA, et désignons par φ l'angle m_1CA, considéré comme positif ou négatif, selon qu'il sera situé à gauche ou à droite de OA. Le mouvement relatif étant censé avoir lieu de m_1 vers A, l'accélération relative du mobile sera

$$-\rho\frac{d^2\varphi}{dt^2};$$

or on a

$$\widehat{\mathrm{I}m_1\mathrm{C}} = \widehat{m_1\mathrm{IA}} - \widehat{m_1\mathrm{CA}} = nt + \varepsilon - \varphi,$$

d'où, pour la composante tangentielle de g,

$$-g\sin(\varphi - nt - \varepsilon).$$

La composante semblable de l'accélération centrifuge est $-n^2.\overline{m_1\mathrm{K}}$, K étant la projection de O sur la tangente en m_1, ou $-n^2 a\sin\varphi$. Il vient donc

$$\rho\frac{d^2\varphi}{dt^2} + g\sin(\varphi - nt - \varepsilon) + n^2 a\sin\varphi = 0,$$

équation que l'on ne paraît pas pouvoir intégrer.

Si le mouvement est assez lent ou si le centre C est suffisamment voisin du point O pour que l'on puisse négliger le terme dû à l'accélération centrifuge, on a tout simplement

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\frac{g}{\rho}\sin\psi,$$

en posant

$$\psi = \varphi - nt - \varepsilon.$$

Cas général. — Dans ce qui suit, Am_1 est une courbe de forme quelconque; A un point déterminé de cette courbe; O, OZ, m_1 ont les mêmes significations que ci-dessus.

Soient de plus

T l'intersection de la tangente en m_1 avec la direction de OA;

$r = Om_1$, $\theta = \widehat{Om_1A}$ les coordonnées polaires de m_1;

V l'angle $\widehat{Om_1T}$ formé par la tangente avec le rayon vecteur Om_1.

Le mouvement relatif de m_1 étant censé avoir lieu de m_1 vers A, l'accélération relative est $-\dfrac{d^2s}{dt^2}$; mais on a

$$\widehat{Im_1T} = V - \widehat{Om_1I} = V - \widehat{ZOm_1} = V - nt - \varepsilon + \theta,$$

d'où, pour la composante tangentielle de g,

$$-g\cos(V - nt - \varepsilon + \theta).$$

La composante semblable de l'accélération centrifuge étant $-n^2r\cos V$, il vient

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^2s}{dt^2} + g\cos(V - nt - \varepsilon + \theta) + n^2r\cos V = 0,$$

avec les relations connues

$$\operatorname{tang} V = \frac{r}{\dfrac{dr}{d\theta}}, \qquad ds = -\sqrt{dr^2 + r^2d\theta^2}.$$

L'équation (A) sera intégrable, lorsque l'on aura $V + \theta = \mu$, μ étant une constante; ce qui donne

$$r\frac{d\theta}{dr} = -\operatorname{tang}(\theta - \mu),$$

d'où

$$r\sin(\theta - \mu) = \text{const.},$$

équation polaire d'une droite, ce qui correspond au premier cas que nous avons étudié et qui paraît être le seul pour lequel l'équation (A) puisse s'intégrer.