BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

G. DARBOUX

Sur une méthode nouvelle pour l'étude des courbes tracées sur les surfaces algébriques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 3 (1872), p. 281-285
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1872__3__281_1>

SUR UNE MÉTHODE NOUVELLE POUR L'ÉTUDE DES COURBES TRACÉES SUR LES SURFACES ALGÉBRIQUES (1);

PAR M. G. DARBOUX.

Les deux Mémoires de M. Cremona constituaient un grand progrès dans l'étude des transformations rationnelles réciproques, et ils ont révélé, par rapport à ces transformations, une foule de propositions dont la notion n'était pas acquise à la science, avec la généralité qu'elles comportent. C'est dans les travaux de M. Cremona qu'on voit apparaître d'abord, et d'une manière générale, des courbes de tous les degrés dont les points répondent à un point unique de l'autre figure. La jacobienne du réseau des courbes d'ordre n, correspondant aux droites de l'autre figure, se décompose en courbes plus simples, comme l'avait remarqué M. Hirst, etc.

Une proposition nouvelle et capitale a été établie, dans ces der-

(1) Voir *Bulletin*, t. III, p. 251.

niers temps, sur les transformations de M. Cremona. *On a reconnu qu'elles peuvent toutes se ramener à une suite de transformations quadratiques.* En d'autres termes, on peut toutes les réaliser en employant successivement et d'une manière convenable l'homographie et la transformation par rayons vecteurs réciproques. C'est là assurément un fait important ; mais nous ne savons à qui en attribuer la découverte. M. Nöther l'a publié le 5 janvier 1870, dans une Note des *Göttinger Nachrichten,* et il a plus tard donné sa démonstration dans un Mémoire important inséré au tome III des *Mathematische Annalen.* D'autre part, M. Cayley, dans un Mémoire sur lequel nous aurons à revenir, et qui a été publié, en mai, dans les *Proceedings* de la Société Mathématique de Londres, annonce que ce théorème a été rencontré par M. Clifford. Du reste, le Mémoire de M. Cayley avait été présenté à la Société dans la séance du 11 mars 1869, et nous voyons que, dans cette séance, M. Clifford a fait une Communication sur les transformations quadratiques. Enfin M. Rosanes, dans un Mémoire publié dans le tome LXXIII du *Journal de Borchardt,* indique la même proposition comme nouvelle, et il est clair que les trois géomètres dont nous venons de citer les noms ont fait et publié leurs recherches d'une manière absolument indépendante. Nous ne devons pas d'ailleurs regretter cette coïncidence, car elle nous a valu deux démonstrations élégantes, celle de M. Nöther et celle de M. Rosanes. Nous ne connaissons pas celle du géomètre anglais, M. Clifford, et même, si nous en croyons des renseignements qui nous ont été donnés, M. Clifford n'avait été conduit que par l'induction à la proposition que nous venons de signaler.

Un fait des plus intéressants avait été laissé de côté dans les articles précédents. Pour le faire mieux comprendre, et pour compléter ces articles, nous allons faire connaître les tables de MM. Cremona et Cayley, donnant les transformations jusqu'au 10^e ordre [1].

> n désigne l'ordre de la transformation, qui est aussi *celui de la transformation réciproque ;*
> α_i est le nombre de points multiples d'ordre i.

Les nombres mis au bas du tableau indiquent les numéros d'ordre servant à désigner les transformations.

---

[1] Nous extrayons ces tables du Mémoire déjà cité de M. Cayley.

n	2	3	4		5			6				7					8								
α_1	3	4	6	3	8	3	0	10	1	4	3	12	2	0	5	3	14	3	1	0	3	6	0	2	3
α_2		1	0	3	0	3	6	0	4	1	4	0	3	3	0	5	0	2	3	0	6	0	5	0	3
α_3			1	0	0	1	0	0	2	3	0	0	2	4	3	0	0	3	2	7	0	1	2	5	0
α_4					1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	2	0	0	3	0	1	3
α_5								1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0
α_6												1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
α_7																	1	0	0	0	0	0	0	0	0
α_8																									
α_9																									
	1	1	1	2	1	2	3	1	2	3	4	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9

n	9									
α_1	15	4	2	0	3	7	1	3	0	1
α_2	0	1	3	4	7	0	4	0	3	1
α_3	0	4	1	0	0	0	3	4	3	3
α_4	0	0	2	4	0	3	0	1	1	3
α_5	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0
α_6	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
α_7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
α_8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
α_9										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

n	10																
α_1	18	5	1	0	0	3	8	2	4	1	2	3	3	3	0	0	1
α_2	0	0	4	2	0	8	0	3	0	3	1	3	3	0	6	1	0
α_3	0	5	0	2	7	0	0	4	3	2	3	0	1	0	0	5	2
α_4	0	0	2	3	0	0	1	0	2	2	1	3	0	6	0	0	5
α_5	0	0	2	1	0	0	3	0	0	0	2	0	3	0	3	2	0
α_6	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0
α_7	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
α_8	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
α_9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

Il y a dans ce tableau des transformations réunies par couples, au moyen d'accolades : ce sont les transformations conjuguées ou réciproques. Dans les autres, le nombre de points multiples de même espèce est le même pour la transformation directe et la transformation réciproque.

Mais on remarque que, quand les transformations directes et inverses ne présentent pas les mêmes nombres de points multiples de chaque espèce, cependant les deux séries de nombres sont les mêmes, quoique leur ordre ne soit pas le même.

Ainsi, pour les deux transformations conjuguées du 6^e ordre, on a 4, 13 pour les deux transformations. Mais, pour l'une, 4 est le nombre des points simples fondamentaux; pour l'autre, c'est le nombre des points doubles.

Ce fait curieux avait été signalé par M. Cremona; M. Clebsch en a donné une belle transformation dans un court article inséré au tome IV des *Mathematische Annalen* (*Zur Theorie der Cremona'schen Transformationen*, p. 490).

(*A suivre.*)