BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

BOUQUET

Sur l'intégration d'un système d'équations différentielles totales simultanées du premier ordre

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 3 (1872), p. 265-274

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1872__3__265_1>

MÉLANGES.

SUR L'INTÉGRATION D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES TOTALES SIMULTANÉES DU PREMIER ORDRE;

Par M. BOUQUET.

J'ai reconnu depuis longtemps que la méthode dont nous nous sommes servis, M. Briot et moi, pour démontrer l'existence des intégrales synectiques d'un système d'équations différentielles simultanées ordinaires du premier ordre, est encore applicable, avec quelques modifications, dans le cas d'un système d'équations aux différentielles totales. L'énoncé de cette proposition a été communiqué à diverses personnes, et en particulier à M. Méray; la publication du *Précis d'Analyse* me montre que l'auteur n'a pas conservé le souvenir de notre entretien sur ce sujet. Voici la démonstration que j'extrais d'un travail sur les fonctions abéliennes.

§ I.

Considérons d'abord le cas le plus simple, celui d'une seule équation à deux variables indépendantes. Si u_1 désigne la fonction inconnue, z_1 et z_2 les deux variables dont elle dépend, l'équation aura la forme

$$(1) \qquad du_1 = f_1(z_1, z_2, u_1)dz_1 + f_2(z_1, z_2, u_1)dz_2,$$

ou, pour abréger,

$$du_1 = P_1\,dz_1 + P_2\,dz_2,$$

et elle équivaut aux deux équations simultanées

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{du_1}{dz_1} = f_1(z_1, z_2, u_1) = P_1, \\[2mm] \dfrac{du_1}{dz_2} = f_2(z_1, z_2, u_1) = P_2. \end{cases}$$

Pour que les équations (2) aient une solution commune, il faut que les fonctions P_1 et P_2 vérifient la condition

$$(3) \qquad \frac{dP_1}{dz_2} + \frac{dP_1}{du_1}P_2 = \frac{dP_2}{dz_1} + \frac{dP_2}{du_1}P_1,$$

que l'on obtient en exprimant que l'on doit avoir

$$\frac{d^2u_1}{dz_1dz_2} = \frac{d^2u_1}{dz_2dz_1}.$$

Deux cas se présentent. Si la condition (3) n'est pas vérifiée identiquement, c'est-à-dire quelles que soient les valeurs attribuées à z_1, z_2, u_1, les solutions de l'équation (1) seront comprises parmi les fonctions que détermine cette condition; la recherche des solutions dépend alors uniquement de la résolution de l'équation (3). Nous allons examiner le cas le plus important, celui où la condition (3) est une identité.

Si l'on suppose les fonctions f_1 et f_2 synectiques dans le voisinage du système de valeurs b_1, b_2, a_1, attribuées aux variables z_1, z_2, u_1, l'équation (1) admet pour solution une fonction u_1 des variables z_1, z_2, synectique par rapport à ces variables dans le voisinage des valeurs b_1, b_2, et se réduisant à a_1 lorsque les variables z_1, z_2 prennent les valeurs a_1, a_2. Dans ces mêmes limites, cette fonction est la seule satisfaisant à la double condition de vérifier l'équation (1), et de se réduire à a_1 pour $z_1 = b_1$ et $z_2 = b_2$.

Afin de simplifier les notations, nous supposerons, ce qui est toujours permis, en faisant un changement de variables, que l'on a $b_1 = b_2 = a_1 = 0$.

Admettant que l'équation (1) a une solution, on peut exprimer les dérivées partielles de la fonction u_1 à l'aide de z_1, z_2, u_1; en partant des relations

$$\frac{du_1}{dz_1} = P_1, \quad \frac{du_1}{dz_2} = P_2,$$

on en déduit

$$\frac{d^2u_1}{dz_1^2} = \frac{dP_1}{dz_1} + \frac{dP_1}{du_1}P_1, \quad \frac{d^2u_1}{dz_2^2} = \frac{dP_2}{dz_2} + \frac{dP_2}{du_1}P_2;$$

$$\frac{d^2u_1}{dz_1 dz_2} = \frac{dP_1}{dz_2} + \frac{dP_1}{du_1}P_2, \quad \text{ou} \quad \frac{d^2u_1}{dz_2 dz_1} = \frac{dP_2}{dz_1} + \frac{dP_2}{du_1}P_1;$$

ces deux valeurs de $\frac{d^2u_1}{dz_1 dz_2}$ sont égales, d'après l'identité (3). Il n'y a qu'une seule manière d'obtenir une des dérivées partielles $\frac{d^p u_1}{dz_1^p}$ ou $\frac{d^p u_1}{dz_2^p}$, dans lesquelles toutes les dérivations sont effectuées par rapport à la même variable; mais on peut calculer de plusieurs manières différentes toute dérivée partielle $\frac{d^{p+q} u_1}{dz_1^p dz_2^q}$ qui dépend de dérivations par rapport à chacune des variables z_1 et z_2. Il est nécessaire de remarquer que le résultat final est toujours le même, quel que soit l'ordre dans lequel on suppose les dérivations effectuées, puisque l'on peut intervertir l'ordre de deux opérations consécutives exécutées successivement par rapport à l'une, puis par rapport à l'autre des variables. Soit, en effet,

$$F(z_1, z_2, u_1) = H,$$

la fonction de z_1, z_2, u_1 sur laquelle on effectue les deux opérations successives; les résultats sont, après la première opération,

$$\frac{dH}{dz_1} + \frac{dH}{du_1}P_1, \quad \frac{dH}{dz_2} + \frac{dH}{du_2}P_2,$$

et, après la seconde,

$$\frac{d^2H}{dz_1 dz_2} + \frac{d^2H}{dz_1 du_1}P_2 + \frac{d^2H}{dz_2 du_1}P_1 + \frac{d^2H}{du_1^2}P_1P_2 + \frac{dH}{du_1}\left(\frac{dP_1}{dz_2} + \frac{dP_1}{du_1}P_2\right),$$

$$\frac{d^2H}{dz_1 dz_2} + \frac{d^2H}{dz_2 du_1}P_1 + \frac{d^2H}{dz_1 du_1}P_2 + \frac{d^2H}{du_1^2}P_1P_2 + \frac{dH}{du_1}\left(\frac{dP_2}{dz_1} + \frac{dP_2}{du_1}P_1\right);$$

ces résultats sont égaux en vertu de l'identité (3).

Lorsque l'on aura exprimé les dérivées partielles en fonction de z_1, z_2, u_1, on calculera leurs valeurs pour le système des valeurs $z_1 = z_2 = u_1 = 0$ attribuées aux variables, et l'on formera ensuite la série

$$(4)\left(\frac{du_1}{dz_1}\right)_0 \frac{z_1}{1} + \left(\frac{du_1}{dz_2}\right)_0 \frac{z_2}{1} + \left(\frac{d^2u_1}{dz_1^2}\right)_0 \frac{z_1^2}{1.2} + \left(\frac{d^2u_1}{dz_1 dz_2}\right)_0 z_1 z_2 + \left(\frac{d^2u_1}{dz_2^2}\right)_0 \frac{z_2^2}{1.2} + \ldots$$

Or nous allons démontrer que cette série est convergente et que a somme est une fonction des variables z_1, z_2 vérifiant l'équation (1). Nous observerons d'abord que, au lieu de déterminer les coefficients de la série (4), à l'aide des valeurs des dérivées partielles exprimées au moyen des variables z_1, z_2, u_1, on peut calculer de proche en proche ces coefficients par les formules suivantes :

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{du_1}{dz_1} = f_1, \quad \frac{du_1}{dz_2} = f_2,\\
&\frac{d^2u_1}{dz_1^2} = \frac{df_1}{dz_1} + \frac{df_1}{du_1}\frac{du_1}{dz_1},\\
&\frac{d^2u_1}{dz_1 dz_2} = \frac{df_1}{dz_2} + \frac{df_1}{du_1}\frac{du_1}{dz_2},\\
&\frac{d^2u_1}{dz_2^2} = \frac{df_2}{dz_2} + \frac{df_2}{du_1}\frac{du_1}{dz_2},\\
&\frac{d^3u_1}{dz_1^3} = \frac{d^2f_1}{dz_1^2} + 2\frac{d^2f_1}{dz_1 du_1}\frac{du_1}{dz_1} + \frac{d^2f_1}{du_1^2}\left(\frac{du_1}{dz_1}\right)^2 + \frac{df_1}{du_1}\frac{d^2u_1}{dz_1^2},\\
&\frac{d^3u_1}{dz_1^2 dz_2} = \ldots,
\end{aligned}\right.$$

que l'on obtient par des dérivations répétées, sans remplacer dans les seconds membres, après chaque opération, les quantités $\frac{du_1}{dz_1}$ et $\frac{du_1}{dz_2}$ par P_1 et P_2.

Pour démontrer la convergence de la série (4), on a recours à une équation différentielle auxiliaire, qui admet certainement une solution développable en série convergente, ordonnée suivant les puissances des variables, et l'on déduit la convergence de la série (4) de la comparaison avec cette dernière. Supposons les fonctions f_1 et f_2 synectiques tant que les variables z_1, z_2, u_1 se meuvent dans des cercles de rayons r_1, r_2, ρ_1, dont les centres sont à l'origine; appelons A_1 et A_2 les valeurs maxima des modules des fonctions f_1 et f_2 pour les diverses positions des points z_1, z_2, u_1. On peut prendre l'équation auxiliaire

$$(1)' \qquad dv_1 = \mu_1 \frac{\frac{dz_1}{r_1} + \frac{dz_2}{r_2}}{\left(1 - \frac{v_1}{\rho_1}\right)\left(1 - \frac{z_1}{r_1} - \frac{z_2}{r_2}\right)},$$

qui équivaut aux deux équations

$$(2)' \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dv_1}{dz_1} &= \frac{\mu_1}{r_1} \frac{1}{\left(1 - \frac{v_1}{\rho_1}\right)\left(1 - \frac{z_1}{r_1} - \frac{z_2}{r_2}\right)} = \varphi_1(z_1, z_2, v_1), \\ \frac{dv_1}{dz_2} &= \frac{\mu_1}{r_2} \frac{1}{\left(1 - \frac{v_1}{\rho_1}\right)\left(1 - \frac{z_1}{r_1} - \frac{z_2}{r_2}\right)} = \varphi_2(z_1, z_2, v_1). \end{aligned} \right.$$

Nous supposons que μ_1 désigne une constante positive, qui vérifie les inégalités $\frac{\mu_1}{r_1} > A_1$, $\frac{\mu_1}{r_2} > A_2$.

L'équation $(1)'$ admet une solution s'annulant en même temps que les variables et qui est définie par la relation

$$(6) \qquad v_1 - \frac{v_1^2}{2\rho_1} = -\mu_1 \log\left(1 - \frac{z_1}{r_1} - \frac{z_2}{r_2}\right).$$

Cette fonction v_1 reste synectique par rapport aux variables z_1 et z_2, lorsque celles-ci se meuvent à l'intérieur de deux cercles décrits de l'origine comme centre et dont les rayons t_1 et t_2 vérifient l'inégalité

$$(7) \qquad \frac{t_1}{r_1} + \frac{t_2}{r_2} < 1 - e^{-\frac{\rho_1}{2\mu_1}}.$$

Pour toutes les valeurs des variables qui remplissent la condition précédente, la fonction v_1 peut se développer en série convergente, ordonnée suivant les puissances de ces variables. On calculera les coefficients de cette série à l'aide des formules

$$(5)' \quad \begin{cases} \dfrac{dv_1}{dz_1} = \varphi_1, \quad \dfrac{dv_1}{dz_2} = \varphi_2, \\ \dfrac{d^2 v_1}{dz_1^2} = \dfrac{d\varphi_1}{dz_1} + \dfrac{d\varphi_1}{dv_1}\dfrac{dv_1}{dz_1}, \\ \dfrac{d^2 v_1}{dz_1 dz_2} = \dfrac{d\varphi_1}{dz_2} + \dfrac{d\varphi_1}{dv_1}\dfrac{dv_1}{dz_2}, \\ \dfrac{d^2 v_1}{dz_2^2} = \dfrac{d\varphi_2}{dz_2} + \dfrac{d\varphi_2}{dv_1}\dfrac{dv_1}{dz'_2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

analogues aux formules (5). Remarquons que, si dans les dérivées partielles des fonctions φ_1 et φ_2, on remplace toutes les variables par zéro, ces dérivées prennent les valeurs suivantes

$$\left(\frac{d^{p+q+s}\varphi_1}{dz_1^p\, dz_2^q\, dv_1^s}\right)_0 = \frac{\mu_1}{r_1}\,\frac{1.2\ldots p.1.2\ldots q.1.2\ldots s}{r_1^p\, r_2^q\, \rho^s},$$

$$\left(\frac{d^{p+q+s}\varphi^2}{dz_2^p\, dz_1^q\, dv_1^s}\right)_0 = \frac{\mu_1}{r_2}\,\frac{1.2\ldots p.1.2\ldots q.1.2\ldots s}{r_1^p\, r_2^q\, \rho^s};$$

on a d'ailleurs

$$\operatorname{mod}\left(\frac{d^{p+q+s} f_1}{dz_1^p\, dz_2^q\, du_1^s}\right)_0 < A_1\,\frac{1.2\ldots p.1.2\ldots q.1.2\ldots s}{r_1^p\, r_2^q\, \rho_1^s},$$

$$\operatorname{mod}\left(\frac{d^{p+q+s} f_1}{dz_1^p\, dz_2^q\, du_1^s}\right)_0 < A_2\,\frac{1.2\ldots p.1.2\ldots q.1.2\ldots s}{r_1^p\, r_2^q\, \rho_1^s}.$$

Par conséquent, dans le calcul de proche en proche des valeurs de $\left(\dfrac{dv_1}{dz_1}\right)_0$, $\left(\dfrac{dv_1}{dz_2}\right)_0$, $\left(\dfrac{d^2 v_1}{dz_1^2}\right)_0 \cdots$, au moyen des formules (5)′, les seconds membres seront toujours des sommes de termes positifs; on voit en outre, en comparant les valeurs obtenues avec celles de $\left(\dfrac{du_1}{dz_1}\right)_0$, $\left(\dfrac{du_1}{dz_2}\right)_0$, $\left(\dfrac{d^2 u_1}{dz_1^2}\right)_0 \cdots$, déduites du tableau (5), que l'on aura

$$\operatorname{mod}\left(\frac{du_1}{dz_1}\right)_0 < \left(\frac{dv_1}{dz_1}\right)_0, \quad \operatorname{mod}\left(\frac{du_1}{dz_2}\right)_0 < \left(\frac{dv_1}{dz_2}\right)_0, \quad \operatorname{mod}\left(\frac{d^2 u_1}{dz_1^2}\right)_0 < \left(\frac{d^2 v_1}{dz_1^2}\right)_0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Les coefficients des termes de la série (4), ayant leurs modules respectivement moindres que les coefficients positifs des termes du développement de v_1, la série (4) est convergente quand les variables z_1, z_2 restent comprises dans des cercles dont les rayons vérifient l'inégalité (7).

Si, dans la fonction f_1, on remplace u_1 par la série (4), le résultat est une fonction des seules variables z_1 et z_2, synectique dans les cercles de rayons t_1 et t_2, et que l'on peut par conséquent développer en série convergente ordonnée, suivant les puissances de ces variables. On reconnaît sans peine que ce développement est le même que celui de $\frac{du_1}{dz_1}$; c'est-à-dire que la fonction u_1 vérifie l'équation $\frac{du_1}{dz_1} = f_1$. On voit de la même manière que la fonction u_1 vérifie aussi l'équation $\frac{du_1}{dz_2} = f_2$.

Remarque. — Les fonctions f_1 et f_2 restant synectiques dans les limites indiquées, si la condition (3) n'est pas vérifiée, les formules (5) donnent pour les symboles représentés par $\left(\frac{du_1}{dz_1}\right)_0$, $\left(\frac{du_1}{dz_2}\right)_0$, $\left(\frac{d^2u_1}{dz_1^2}\right)_0$,... des valeurs qui dépendent de l'ordre suivi pour les obtenir, et, quel que soit l'ordre adopté, la série (4) est toujours convergente.

§ II.

Soit, en second lieu, l'équation à n variables indépendantes

$$du_1 = P_1 dz_1 + P_2 dz_2 \ldots + P_n dz_n, \tag{8}$$

qui équivaut aux n équations simultanées

$$\frac{du_1}{dz_1} = P_1, \quad \frac{du_1}{dz_2} = P_2, \ldots, \quad \frac{du_1}{dz_n} = P_n, \tag{9}$$

dans lesquelles P_1, P_2,..., P_n représentent des fonctions connues de u_1 et des variables indépendantes z_1, z_2,..., z_n. Toute solution u_1 des équations (9) doit vérifier plusieurs conditions de la forme

$$\frac{dP_1}{dz_2} + \frac{dP_1}{du_1} P_2 = \frac{dP_2}{dz_1} + \frac{dP_2}{du_1} P_1. \tag{10}$$

Si l'une de ces conditions n'est pas une identité, les valeurs de u_1 qui la vérifient pourront seules être des solutions de l'équation donnée. Supposons toutes les conditions (10) satisfaites identiquement, les fonctions $P_1, P_2, \ldots, P_n$ synectiques pour les valeurs des variables $z_1, u_2, \ldots, z_n, u_1$, comprises à l'intérieur des cercles de rayons $r_1, r_2, \ldots, r_n, \rho_1$, décrits de l'origine comme centre, et représentons par $A_1, A_2, \ldots, A_n$ les valeurs maxima des modules des fonctions $P_1, P_2, \ldots, P_n$ dans ces limites.

On reconnaît, par un raisonnement semblable à celui du paragraphe précédent, que l'équation (8) est vérifiée par une fonction u_1 des variables $z_1, z_2, \ldots, z_n$, s'annulant avec ces variables, et qui reste synectique tant qu'elles demeurent comprises dans des cercles décrits de l'origine comme centre et dont les rayons $t_1, t_2, \ldots, t_n$ vérifient l'inégalité

$$\frac{t_1}{r_1} + \frac{t_2}{r_2} + \ldots + \frac{t_n}{r_n} < \left(1 - e^{-\frac{\rho_1}{2\mu_1}}\right), \tag{11}$$

pourvu que l'on ait $\frac{\mu_1}{r_1} > A_1$, $\frac{\mu_1}{r_2} > A_2, \ldots, \frac{\mu_1}{r_n} > A_n$.

§ III.

Considérons enfin un système de m équations aux différentielles totales simultanées à n variables indépendantes. Représentons les variables par $z_1, z_2, \ldots, z_n$ et les fonctions inconnues par $u_1, u_2, \ldots, u_m$. Nous supposons que les équations peuvent être résolues par rapport aux différentielles totales $du_1, du_2, \ldots, du_m$ des fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$ et mises sous la forme

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{l} du_1 = P_1 dz_1 + P_2 dz_2 + \ldots + P_n dz_n, \\ du_2 = Q_1 dz_1 + Q_2 dz_2 + \ldots + Q_n dz_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ du_m = S_1 dz_1 + S_2 dz_2 + \ldots + S_n dz_n, \end{array}\right.$$

$P_1, P_2, \ldots, P_n$, $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, $S_1, S_2, \ldots, S_n$ désignant des fonctions des n variables arbitraires et des m fonctions inconnues.

Toute solution du système (1) doit vérifier plusieurs conditions de la forme

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dP_1}{dz_2}+\frac{dP_1}{du_1}P_2+\frac{dP_1}{du_2}Q_2+\ldots+\frac{dP_1}{du_n}S_2,\\ &=\frac{dP_2}{dz_1}+\frac{dP_2}{du_1}P_1+\frac{dP_2}{du_2}Q_1+\ldots+\frac{dP_2}{du_n}S_1;\end{aligned}\right.$$

pour ne pas dépasser le but que nous nous sommes proposé, supposons que toutes ces conditions sont satisfaites identiquement.

Si les fonctions P, Q,..., S restent synectiques pour les valeurs de $z_1, z_2,\ldots, z_n, u_1, u_2,\ldots, u_m$, comprises dans des cercles décrits de l'origine comme centre avec des rayons respectivement égaux à $r_1, r_2,\ldots, r_n, \rho_1, \rho_2,\ldots, \rho_m$, les équations (12) seront vérifiées par un système de fonctions synectiques par rapport aux variables z_1, $z_2,\ldots, z_m$, tant que ces variables restent à l'intérieur de certaines circonférences qui ont pour centre l'origine, ces fonctions s'annulant d'ailleurs en même temps que les variables. On démontre l'existence de cette solution en considérant les équations auxiliaires aux différentielles totales

$$(12)'\quad \left\{\begin{aligned} &dv_1 = \mu_1\frac{\dfrac{dz_1}{r_1}+\dfrac{dz_2}{r_2}+\ldots+\dfrac{dz_n}{r_n}}{\left(1-\dfrac{v_1}{\rho_1}\right)^m\left(1-\dfrac{z_1}{r_1}-\dfrac{z_2}{r_2}-\ldots-\dfrac{z_n}{r_n}\right)},\\ &dv_2 = \mu_2\frac{\dfrac{dz_1}{r_1}+\dfrac{dz_2}{r_2}+\ldots+\dfrac{dz_n}{n}}{\left(1-\dfrac{v_2}{\rho_2}\right)^m\left(1-\dfrac{z_1}{r_1}-\dfrac{z_2}{r_2}-\ldots-\dfrac{z_n}{r_n}\right)},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &dv_m = \mu_m\frac{\dfrac{dz_1}{r_1}+\dfrac{dz_2}{r_2}+\ldots+\dfrac{dz_n}{r_n}}{\left(1-\dfrac{v_m}{\rho_m}\right)^m\left(1-\dfrac{z_1}{r_1}-\dfrac{z_2}{r_2}-\ldots-\dfrac{z_m}{r_m}\right)},\end{aligned}\right.$$

dans lesquelles $\mu_1, \mu_2,\ldots, \mu_m$ désignent des constantes positives; la constante μ_1, par exemple, est telle que l'on a $\frac{\mu_1}{r_1} > A_1$, $\frac{\mu_1}{r_2} > A_2,\ldots,$ $\frac{\mu_1}{r_n} > A_n$; $A_1, A_2,\ldots, A_n$ étant les valeurs maxima des modules des fonctions $P_1, P_2,\ldots, P_n$, quand les variables restent renfermées dans les circonférences de rayons $r_1, r_2,\ldots, r_n, \rho_1, \rho_2,\ldots, \rho_m$. Le équations précédentes s'intègrent isolément, et si l'on représente par $\frac{\rho}{\mu}$ le plus petit des nombres $\frac{\rho_1}{\mu_1}, \frac{\rho_2}{\mu_2}, \ldots, \frac{\rho_m}{\mu_m}$ elles définissent des fonctions $v_1, v_2, \ldots, v_m$ qui s'annulent avec les variables $z_1, z_2, \ldots, z_n$ et restent fonctions synectiques de ces variables dans les cercles décrits de l'origine comme centre et dont les rayons $t_1, t_2, \ldots, t_n$ vérifient la condition

$$\frac{t_1}{r_1} + \frac{t_2}{r_2} + \ldots + \frac{t_n}{r_n} < 1 - e^{-\frac{\rho}{(m+1)\mu}}. \tag{14}$$

Les équations (12) admettent pour solution des fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$, s'annulant avec les variables $z_1, z_2, \ldots, z_n$ et synectiques par rapport à ces variables dans les mêmes limites.