BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

G. DARBOUX

Sur une méthode nouvelle pour l'étude des courbes tracées sur les surfaces algébriques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 3 (1872), p. 251-256

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1872__3__251_1>

MÉLANGES.

SUR UNE MÉTHODE NOUVELLE POUR L'ÉTUDE DES COURBES TRACÉES SUR LES SURFACES ALGÉBRIQUES [1];

PAR M. G. DARBOUX.

Le premier travail de M. Cremona est intitulé : *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane* (tomo II, serie 2ª, delle *Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna*), et porte la date de 1863. L'auteur fait remarquer d'abord l'erreur

[1] Voir *Bulletin*, t. III, p. 221.

de Magnus, qui considérait sa transformation comme la plus générale de celles qui font correspondre un point à un point. Le raisonnement de l'auteur est bien simple : on sait que la transformation de Magnus fait correspondre à une droite du plan une conique passant par trois points fixes. D'après cela, si l'on applique plusieurs fois la transformation de Magnus, en changeant à chaque fois les trois points fixes ou pôles, on aura une suite de transformations qu'on pourra composer en une seule, dans laquelle à une droite correspondra une courbe d'ordre aussi élevé qu'on le voudra. Comme ce point est très-important, nous allons y insister et donner un exemple simple.

Étant donnée une figure A, soumettons-la à une transformation par rayons vecteurs réciproques qui donne une figure B; transformons celle-ci par l'homographie en C, et enfin soumettons C à une nouvelle transformation par rayons vecteurs réciproques, qui donne D. On voit qu'à un point de A ne correspond qu'un seul point de D, et réciproquement. D'ailleurs, à une droite quelconque de A correspond dans B un cercle, qui se transforme en conique dans la figure C, et cette conique, soumise à la seconde transformation par rayons vecteurs réciproques devient, dans la figure D, une courbe du 4^e ordre à trois points doubles. Ainsi, aux droites de A, correspondent, dans la figure D, des courbes du 4^e ordre à trois points doubles.

Supprimons maintenant tout l'appareil intermédiaire, et nous pourrons arriver d'une manière directe à la notion de notre transformation. Considérons trois courbes du 4^e ordre ayant trois points doubles fixes a_1, a_2, a_3, et passant en outre par trois points simples b, b_1, b_2. Ces courbes, on s'en assure aisément, peuvent encore être assujetties à deux conditions, comme celles de passer par deux points, et leur équation est de la forme

$$\lambda . U + \mu . V + \nu . W = 0,$$

U, V, W étant trois polynômes convenablement choisis et n'ayant entre eux aucune relation linéaire identique. Alors les formules

$$\rho X = U(x, y, z),$$
$$\rho Y = V(x, y, z),$$
$$\rho Z = W(x, y, z),$$

où X, Y, Z, x, y, z sont les coordonnées homogènes de deux points correspondants, définissent une transformation. Cette transformation est rationnelle, car : 1° à un point xyz ne correspond, en général, qu'un point XYZ; 2° réciproquement, à un point XYZ ne correspond qu'un point xyz.

A une droite de la figure (X),

$$aX + bY + cZ = 0,$$

correspondent les courbes du 4^e ordre

$$aU + bV + cW = 0$$

de la figure (x).

A une deuxième droite correspondra une deuxième courbe du 4^e ordre. Au point d'intersection des deux droites de (X) correspondront les points d'intersection des deux courbes du 4^e ordre. Or ces courbes ont trois points doubles communs qui valent douze points simples, et trois points simples; elles ont donc en tout quinze points communs qui sont fixes, et un point variable, qui est l'homologue du point de rencontre des deux droites de X. Donc à un point de chaque figure ne correspond qu'un point de l'autre, et à des droites correspondent des courbes du 4^e ordre.

L'auteur, après avoir ainsi établi l'existence d'un nombre illimité de transformations rationnelles réciproques, se propose de les étudier et de les déterminer toutes.

Quels sont les caractères d'une transformation rationnelle, et comment les détermine-t-on? Toute la question se ramène évidemment à trouver un *réseau* géométrique formé de courbes d'ordre n,

$$aU + bV + cW = 0,$$

et tel que deux courbes quelconques du réseau se coupent en des points fixes et en un seul point variable; car, si l'on fait correspondre à chaque courbe de ce réseau la droite

$$aX + bY + cZ = 0,$$

il est clair qu'à toutes les droites passant par un point et formant un faisceau correspondront, dans l'autre figure, les courbes d'un faisceau, déterminant par leur intersection le point qui correspond à l'intersection de toutes les droites du faisceau.

Une ligne d'ordre n est déterminée par $\frac{n(n+3)}{2}$ conditions; par suite, les courbes de l'une des figures, qui correspondent aux droites de l'autre, seront assujetties à $\frac{n(n+3)}{2} - 2 = \frac{(n-1)(n+4)}{2}$ conditions communes.

Deux droites ont un seul point commun a; les deux courbes correspondantes devront avoir en dehors des points fixes un seul point commun, le point a', correspondant au point d'intersection des droites. Soit x_r le nombre des points multiples d'ordre r communs aux deux courbes; on devra avoir

$$(1) \qquad x_1 + 4x_2 + 9x_3 + \ldots + (n-1)^2 x_{n-1} = n^2 - 1,$$

équation qui exprime que deux courbes se coupent en un seul point, en dehors des points fixes. Ces points fixes doivent valoir le nombre de conditions indiqué plus haut. On a donc

$$(2) \quad x_1 + 3x_2 + 6x_3 + \ldots + \frac{n(n-1)}{2} x_{n-1} = \frac{(n-1)(n+4)}{2}.$$

Telles sont les seules équations de condition du problème.

M. Cremona a complété ses résultats et donné de nombreux exemples dans un second Mémoire publié en 1865 dans le même Recueil.

L'auteur, après avoir signalé l'étude d'une transformation particulière faite par M. de Jonquières (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1864), et rappelé les deux équations données plus haut, se propose d'en déterminer un grand nombre de solutions et d'étudier aussi une question intéressante.

On sait que, à tout réseau formé avec trois courbes

$$aU + bV + cW = 0,$$

correspond une courbe remarquable qu'on appelle la *jacobienne* du réseau, et qu'on obtient en égalant à zéro le déterminant fonctionnel de U, V, W,

$$\sum \pm \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial z} = 0.$$

Dans la question actuelle, à toutes les droites d'une des figures correspondent dans l'autre les courbes d'un réseau, et l'auteur démontre que la jacobienne de ce réseau se décompose en plusieurs courbes simples; mais ici il y a plusieurs propositions importantes à signaler.

D'abord il y a des points dans chaque figure qu'on appelle *points principaux*, et qui ont des propriétés spéciales. A ces points correspondent, non pas un point unique, mais tous les points d'une courbe. Par exemple, si les courbes qui correspondent aux droites de la première figure ont un point simple en commun, à ce point simple correspondront tous les points d'une droite dans la première figure. C'est ainsi que, dans la transformation par rayons vecteurs réciproques, au pôle correspondent tous les points de la droite de l'infini. En général à un point double correspondent tous les points d'une conique; à un point triple, tous ceux d'une cubique, etc. Ces points P, P$'$,..., communs à toutes les courbes du réseau, s'appellent *points principaux*, et les courbes qui leur correspondent *courbes principales*. Il y a des points principaux, des courbes principales dans chaque figure; les courbes principales de l'une des figures sont formées de tous les points correspondant à un même point principal de l'autre.

Ainsi, en résumé, étant données deux figures A, B, dans la première on aura un réseau de courbes (A) passant par x_1 points simples, x_2 points doubles,..., x_r points d'ordre r, qui correspondront aux droites de B. Les $x_1 + x_2 + \ldots + x_r$ points, base commune des courbes (A), sont les points principaux de la première figure. A chacun d'eux correspondent dans la deuxième figure des courbes principales, x_1 droites, x_2 coniques, etc. De même, aux droites de A correspondent dans B des courbes (B) passant par y_1 points simples, y_2 points doubles, etc. Les points y_r principaux dans la figure B ont pour correspondantes les courbes principales de la figure (A), et ils donnent une nouvelle solution $(y_1, y_2, \ldots, y_r)$ du système des équations (1) et (2).

M. Cremona démontre : 1° que les courbes (A), (B) sont rationnelles ou unicursales; 2° que la jacobienne de chacun des deux réseaux se compose des courbes principales de sa figure. Ce dernier théorème avait été déjà énoncé, comme M. Cremona le fait remarquer, par M. Hirst (voir *The Reader*, 1er octobre 1864.) Les deux solutions $(x_1, \ldots, x_r)$, $(y_1, \ldots, y_r)$ sont appelées conjuguées. L'auteur donne toutes les transformations d'un ordre égal ou inférieur à 10. Il étudie plusieurs propriétés très-intéressantes des points principaux et des courbes principales. Ces propriétés ont fait, depuis les travaux de M. Cremona, l'objet de bien des recherches élégantes.

G. D.