Revue bibliographique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 3 (1872), p. 225-237
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1872__3__225_0>

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

CLEBSCH (A.). — THEORIE DER BINÄREN ALGEBRAISCHEN FORMEN. — Leipzig, Teubner, 1872.

Bien que l'on puisse faire remonter jusqu'à Gauss l'origine de la théorie des formes algébriques, on doit cependant attribuer à sa conception générale et à sa formation en corps de doctrine indépendante une date beaucoup plus récente, et considérer cette théorie comme une des branches les plus modernes des sciences mathématiques.

Pourtant, quoiqu'elle ne compte guère que dix ou vingt années d'existence, elle a déjà passé par bien des états divers et subi de nombreuses transformations; elle a été envisagée sous des points de vue différents, et aujourd'hui même il est à peine possible de reconnaître, dans chaque partie de cette science nouvelle, les tendances propres qui la caractérisent. Le présent Livre a pour but de rendre accessibles au public des recherches jusqu'ici peu connues, d'élucider certains principes, et de faire ressortir de leur étude quelques-uns des objets que doit naturellement poursuivre cette théorie. Ces circonstances serviront de motif et d'excuse à l'auteur du Livre, pour avoir lui-même, à l'occasion de cette publication, présenté quelques explications dans ce Recueil.

Les commencements de l'Algèbre se ramifient en deux branches, qui se montrent tout d'abord aussi hétérogènes que possible : ce sont, d'une part, la Théorie des équations algébriques; d'autre part, la Géométrie analytique. De ces deux branches, la première a pour objet un élément discret; elle en étudie les combinaisons, elle établit les propriétés des équations qui déterminent les inconnues, des résolvantes. Cette Algèbre a acquis un but important et déterminé dans la recherche des équations réductibles les unes aux autres, et en particulier des équations résolubles algébriquement.

Mais tandis que la théorie des équations conduisait à l'étude des équations dont les racines sont des combinaisons algébriques de celles d'une équation donnée, les questions correspondantes se posaient aussi en Géométrie. Depuis longtemps déjà une courbe algébrique, considérée même au point de vue synthétique, malgré sa définition analytique, avait cessé d'être envisagée comme une figure individuelle. On projetait au moins cette courbe, et, parmi ses propriétés, celles-là étaient regardées comme essentielles qui n'étaient pas altérées par la projection. La théorie des fonctions abéliennes fit voir plus généralement que certains éléments se conservaient d'une façon remarquable, de quelque manière que l'on transformât la figure donnée à l'aide des transformations algébriques, pourvu qu'à chaque point de l'une des figures correspondît, en général, un seul point de l'autre; et bientôt on reconnut qu'il en était de même pour les surfaces et pour les figures d'ordre supérieur. L'étude de ce qui reste permanent au milieu des transformations les plus diverses apparut bientôt ici, de même que dans la théorie des équations, comme la plus importante et la plus profitable.

L'introduction de la conception d'une fonction homogène permit d'embrasser toutes ces recherches sous un point de vue commun et sous une forme élégante. On reconnut que la théorie des fonctions homogènes conduisait aux équations, aux courbes et aux surfaces, toutes les fois que le nombre des variables homogènes était 2, 3 ou 4; et l'on peut dès maintenant faire remarquer tous les avantages divers qui résultèrent de cette unité du point de vue, tels, par exemple, que l'unité de certains procédés de formation, qui se manifesta de la manière la plus claire, et qui sans cela fût restée inaperçue.

On peut regarder comme formant l'objet de l'Algèbre, dans sa conception la plus générale, le problème de la recherche de celles des propriétés des fonctions homogènes qui continuent à subsister, quelles que soient les transformations algébriques uniformes que l'on fasse subir à ces fonctions; mais si l'on a toujours ce but général devant les yeux, si on le réalise même dans certains cas particuliers, on commence ainsi par viser trop haut. Lorsque se forma la nouvelle Algèbre, cette immortelle création de Sylvester et de Cayley, le point de vue unificateur des fonctions homogènes vint à prévaloir; mais le cercle des transformations, par rapport auxquelles on avait à rechercher les propriétés qui demeuraient inaltérables, se borna aux transformations linéaires. On appliquait celles-ci aux variables; les expressions qui ne subissaient par là aucune altération, ou qui se trouvaient seulement multipliées par un facteur caractéristique, facile à indiquer, devinrent, sous les noms d'*invariants* et de *covariants*, l'objet de la nouvelle théorie.

Il ne faudrait pas se faire une idée trop désavantageuse de la branche de science qui est résultée de cette restriction. Elle renferme déjà tout entière la Géométrie projective dans le plan et dans l'espace, et elle est parvenue également à s'assujettir la Géométrie métrique, comme la Géométrie projective l'avait su faire; elle a même aussi trouvé son application dans certaines parties de la théorie des fonctions. On peut dire, de plus, que la considération des transformations *linéaires* forme le premier pas inévitable. Les transformations d'ordre supérieur ont été jusqu'ici peu développées au point de vue purement algébrique; mais, à en juger par ce que l'on a déjà obtenu relativement aux formes binaires, il semble que la théorie des transformations *linéaires* fournisse aussi les principes des transformations d'ordres supérieurs.

Les formes binaires sont les seules dont la considération forme l'objet du présent Ouvrage. Les transformations linéaires jouent, dans la théorie des équations, un rôle subalterne; elles ne se présentent guère que dans l'évanouissement du second terme. Il est vrai qu'au point de vue de la nouvelle Algèbre la résolution des équations quadratiques, cubiques et biquadratiques se transforme aussi d'une manière particulière qui fait, pour la première fois, envisager sous leur vrai jour les méthodes ordinaires de résolution et en donne l'intelligence complète, comme cela a eu lieu pour la Géométrie projective vis-à-vis d'un grand nombre de problèmes métriques connus. Mais, comme généralement toute nouvelle doctrine se développe sous son impulsion propre dans la direction qui lui convient et ne touche qu'en passant, dans ses premiers pas, les doctrines qui n'ont avec elle que des liaisons d'affinité, la théorie des équations devient bientôt pour la nouvelle Algèbre un objet accessoire. A la vérité, il n'en est ainsi que dans les commencements. C'est le caractère de la nouvelle Algèbre de ne considérer comme solutions réelles des problèmes que les représentations complétement élaborées; et, si elle n'est pas encore en état de façonner la théorie des équations suivant sa propre manière de procéder, les formations auxquelles la nouvelle Algèbre est ramenée par le progrès de son développement n'en contiennent pas moins les matériaux nécessaires pour une future constitution plus complète de cette théorie.

Si le livre connu de Salmon traite des principes de la nouvelle

Algèbre pour un nombre quelconque de variables, tandis que l'Ouvrage actuel se restreint aux formes binaires, la raison en est dans cette circonstance, que la théorie des formes binaires a été isolément développée et approfondie, comme n'a pu l'être encore la théorie des formes d'un plus grand nombre de variables. Si donc on voulait ne pas ajourner trop loin ces recherches, les plus importantes de toutes, selon moi, la restriction dont je viens de parler était nécessaire; sinon, il en serait résulté un défaut choquant d'uniformité dans l'étude des formes contenant des nombres différents de variables. Puisse cet Ouvrage contribuer à faire avancer dans la même direction la théorie des formes à plusieurs variables, travail qui pourra offrir parfois des difficultés, mais dont le résultat ne semble pas douteux! Je vais exposer en quelques mots la nature des problèmes et des directions que je viens d'indiquer.

Nous entendons par *invariants, covariants*, etc., des combinaisons des coefficients et des variables d'une forme donnée, qui, lorsqu'on transforme linéairement les variables et que l'on fait subir les changements correspondants aux coefficients de la forme, se reproduisent de nouveau avec leurs valeurs primitives, multipliées par une même puissance du déterminant de la transformation. Ces combinaisons peuvent être supposées rationnelles ou irrationnelles, ou même transcendantes. Il est convenable, pour la nouvelle Algèbre, de les supposer d'abord rationnelles et même entières, et d'en restreindre ainsi la conception. En effet, ce caractère se rencontre dans toutes les formations que l'on a étudiées avant l'établissement d'une théorie spéciale. Il en est ainsi des déterminants qui se présentent comme invariants simultanés des formes linéaires; pareillement, des formations provenant des formes quadratiques, et que Gauss a introduites dans la théorie des nombres. Par la restriction en question, la nouvelle Algèbre se trouve mise avec cette théorie dans une intime relation; mais, à l'exception d'Eisenstein et de Hermite, personne ne paraît avoir su rendre la nouvelle Algèbre fructueuse pour la théorie des nombres au delà de l'étude des formes quadratiques.

La restriction de la conception d'invariant aux fonctions entières des coefficients et des variables donne une tournure caractéristique à la question de leur découverte. On reconnaît par là combien il eût été essentiellement stérile de définir les invariants par les équations aux différentielles partielles auxquelles ils satisfont; car ce mode de définition ne contient en aucune manière l'idée de fonction entière; il vaut beaucoup mieux introduire cette idée immédiatement dans la définition. Il y a déjà douze ans que j'ai fait remarquer cette circonstance et que j'ai utilisé, pour une définition plus convenable de ces formations, la méthode des notations symboliques employée pour la première fois par Aronhold, méthode d'où se déduisent très-facilement les propriétés essentielles des invariants. Une forme de degré quelconque est remplacée symboliquement par une puissance d'une fonction linéaire. En introduisant, avec les précautions nécessaires, dans un invariant quelconque, ce symbole à la place des coefficients, l'invariant se décompose en une somme de produits de déterminants; et une telle somme fait connaître, comme je l'ai démontré, le type général des invariants, et peut leur servir de définition. On voit que dans cette définition est déjà contenue, entre autres, l'idée de fonction entière. Dès cette époque, je croyais à la possibilité d'obtenir, en partant de cette définition, la détermination des invariants (ou covariants), au moyen desquels tous les invariants (ou covariants) imaginables s'expriment sous forme de fonctions entières à coefficients numériques. Or cette question capitale de la composition des formes est, à ce qu'il semble, encore trop difficile pour être généralement résolue, d'autant plus que des questions de nature arithmétique peuvent y jouer un rôle essentiel; mais, pour les formes binaires, M. Gordan s'est placé à ce point de vue, et, dans une série de brillants travaux, a démontré que *tous les invariants et covariants d'un système quelconque de formes binaires sont des fonctions entières d'un nombre fini de pareilles expressions.* Ce théorème fondamental constitue l'avantage caractéristique que la théorie des formes binaires conserve encore maintenant sur la théorie des formes à un plus grand nombre de variables. Autour de la démonstration de ce théorème se groupe toute l'exposition de la théorie, et les diverses parties de la démonstration marquent autant de chapitres de la doctrine des formes. C'est l'existence de ce théorème qui m'a principalement déterminé à traiter la théorie des formes binaires, et il permet de donner à cette théorie une sorte d'achèvement complet. Il est vrai qu'en même temps la nature de la démonstration donne lieu, dans l'exposition, à des difficultés qui ne sont pas insurmontables.

J'ajouterai encore ici, comme explication, les remarques suivantes. Dans plusieurs branches des Mathématiques, l'idée d'un système complet de formations et d'opérations se présente comme point de vue caractéristique. Ainsi, dans la théorie des équations, cela constitue une propriété importante d'un groupe de substitutions, lorsqu'elles forment un système complet, c'est-à-dire lorsque, appliquées les unes à la suite des autres, elles donnent des résultats qui peuvent aussi s'obtenir immédiatement par une seule substitution du même groupe. Des points de vue analogues, relatifs à des objets variables d'une manière continue et employant pour ces objets les transformations à la place des substitutions, se sont présentés dans les travaux géométriques récents. La conception d'un système complet se rencontre encore dans la théorie des équations linéaires aux différentielles partielles, comme je l'ai fait voir au tome 65 du *Journal de Borchardt*. D'un système d'équations simultanées de cette espèce, on déduit une suite de nouvelles équations; mais, quand les équations admettent des solutions communes, il y a une limite au delà de laquelle la combinaison des équations obtenues ne peut plus fournir d'équation réellement nouvelle, et le système obtenu jusque-là s'appelle alors un *système complet*. De même, dans la théorie des nombres, une conception semblable a été récemment introduite par les recherches de M. Dedekind sur les *solides numériques*. A ces systèmes complets est analogue le système complet fini des invariants et des covariants des formes binaires, dont M. Gordan a démontré l'existence, et que le présent Ouvrage a pour but essentiel d'établir et de mettre en lumière; car, tandis que, d'un système de formes données et de leurs covariants, on peut toujours, en général, déduire de nouveaux invariants et covariants, il se présente ici une certaine limite que l'on peut atteindre, lorsqu'on exclut toutes les compositions représentables comme fonctions entières des compositions déjà existantes. A la vérité, on n'a encore pu jusqu'à présent que démontrer l'existence d'une telle limite. Le nombre des compositions du système est une fonction arithmétique des indices d'ordre des formes *fondamentales* données, qui mérite à un haut degré l'attention des géomètres. Mais, même dans des cas concrets donnés, comme on en traite dans cet Ouvrage, le calcul exact de ce nombre exige encore une série de considérations assez compliquées.

Dans la première Section, je développe les propositions fondamentales de la théorie et les principes de la représentation symbolique. Je remarque que, jusqu'à présent, on a presque exclusivement considéré les formes *fondamentales* et les covariants à une seule série de variables. Cela suffit pour les formes binaires, comme je l'ai fait voir ici, en même temps que M. Gordan l'établissait de son côté, dans le tome III des *Mathematische Annalen*. Il n'en est plus ainsi pour les formes à plus de deux variables, et l'on peut affirmer que, dans ce cas, le problème de la théorie n'a pas encore été énoncé correctement. Dans un travail qui paraîtra prochainement, je développerai davantage ces considérations, et je poserai, dans les limites qui lui conviennent, le problème de la théorie des invariants, pour les formes à plusieurs variables.

La seconde Section est consacrée à l'interprétation géométrique des formes binaires. A cet objet se rattachent l'étude des figures, que l'on désigne, dans la Géométrie synthétique, sous le nom de *figures du premier ordre,* la théorie des séries de points et des faisceaux de rayons. Car, en réalité, ces figures sont essentiellement binaires, et elles ne jouent qu'un rôle préparatoire dans la Géométrie analytique, qui s'occupe de la théorie des formules ternaires. Je développe, dans cette Section, le caractère des propriétés des groupes de points et de rayons qui sont exprimées par l'évanouissement des invariants. Comme exemples, je considère, dans la troisième Section, les discriminants et les invariants.

La quatrième Section traite de la théorie des formes du 2^e, du 3^e et du 4^e degré. La résolution des équations correspondantes est présentée au point de vue de la théorie des invariants, mais démontre déjà ici que, au moins dans ces formes, le système des invariants et des covariants est un système fini, dans le sens indiqué plus haut.

Les deux Sections suivantes sont consacrées à la démonstration du théorème de Gordan. On démontre d'abord, dans la cinquième Section, que, si chacune des formes d'une série possède un système complet fini d'invariants et de covariants, il en est de même pour le système simultané de toutes ces formes. Par là sont établis les fondements de la démonstration par laquelle on fait voir, dans la sixième Section, que toute forme binaire, ainsi que tout système de formes binaires, conduit à un système complet fini d'invariants et de covariants. Comme exemples, on a développé les systèmes complets des formes du 5^e et du 6^e degré, et les systèmes simultanés d'une forme quadratique et d'une cubique, d'une quadratique et d'une biquadratique, et enfin de deux cubiques.

Les trois dernières Sections du Livre traitent de problèmes d'une tout autre nature. On peut les comprendre sous la dénomination de *représentations typiques*. L'idée d'introduire, comme nouvelles variables, des covariants linéaires, tous les coefficients des formes devenant alors des invariants, est due à M. Hermite. Cette idée pouvait être étendue dans deux directions. D'abord on pouvait, lorsqu'il n'existait pas de covariants linéaires, c'est-à-dire dans les formes *fondamentales* d'ordre pair, introduire comme variables trois covariants quadratiques, entre lesquels a lieu alors une équation quadratique; ce point de vue a été développé, il y a quelques années, par M. Gordan et par moi, dans les *Annali di Matematica*. Cette théorie est exposée dans la dernière Section, et l'introduction des covariants linéaires dans l'avant-dernière. Je rattache à cela les recherches sur la possibilité de transformer linéairement, les unes dans les autres, des formes à invariants simultanés égaux, telles que celles que j'ai publiées récemment dans les *Mathematische Annalen;* mais on peut, d'autre part, introduire comme variables des covariants linéaires, dont les coefficients renferment eux-mêmes des variables. On est conduit par là à la théorie des formes associées, traitée par Hermite et par Brioschi. Cette théorie ouvre aussi des points de vue intéressants pour la résolution des équations, comme on le voit, par exemple, dans la résolution des équations biquadratiques qu'en a tirée Aronhold. Mais la question principale est celle du système des invariants et des covariants, au moyen desquels tous les autres sont exprimables en fonctions *rationnelles* (non plus entières). Cette question a une certaine affinité avec celle qu'a résolue M. Gordan; mais elle est beaucoup plus facile à résoudre, et sa solution peut être indiquée d'une manière générale. On reconnaît qu'il existe un système très-simple d'invariants et de covariants, au moyen duquel on est en état d'exprimer rationnellement tous les invariants et covariants d'une forme donnée. Ce système comprend, outre la forme elle-même, ceux de ses covariants et invariants qui ne contiennent que quadratiquement les coefficients de la forme fondamentale, et les déterminants fonctionnels de ces formes avec la forme fondamentale elle-même, système que j'ai établi en 1870 dans les *Nachrichten der Königl. Gesellschaft,* comme le système le plus simple de formes associées.

Parmi les applications, je ne citerai plus que la méthode binaire pour traiter le problème des points de rebroussement d'une courbe du 3^e ordre; la réduction des intégrales elliptiques de première espèce à la forme normale, et la transformation du 3^e ordre des intégrales elliptiques; puis l'étude de certains problèmes de la théorie des formes du 5^e et du 6^e ordre, qui se rattachent à la transformation du 5^e ordre des fonctions elliptiques.

Je m'étais proposé pour but non-seulement de donner des méthodes et des résultats, mais de les développer au point de vue de la liaison de leurs principes et de leur enchaînement systématique. D'après l'aperçu que je viens de donner du contenu de mon Ouvrage, on verra qu'il m'a fallu prendre en considération bien des points appartenant à des régions relativement plus profondes. Ai-je réussi à ordonner aussi d'une manière claire ces parties plus abstruses? C'est ce que l'on pourra constater dans le cas où mon Livre engagerait de plus jeunes activités à poursuivre l'étude des questions que j'ai soulevées.

L'importance générale de la nouvelle Algèbre ne peut plus aujourd'hui échapper qu'à ceux qui n'ont pas pris la peine de consacrer leur attention au développement de la science, dans ses grandes lignes et dans son ensemble. Depuis qu'il est devenu évident que l'idée de fonction ne peut guère se concevoir rigoureusement dans toute sa généralité; que cette idée est condamnée à n'être en quelque sorte qu'une connaissance transitoire, se modifiant à chaque instant et ne répondant qu'à ce que nous apprend une revue générale de la science à chaque époque de son développement; qu'elle ne correspond plus maintenant que pour l'état actuel à l'étendue des connaissances scientifiques, mais que l'expression la plus claire naguère de la conscience mathématique cesse à présent de l'être; depuis, dis-je, que l'idée générale de fonction se présente comme un fondement incertain d'une recherche rigoureuse, on a dû sentir d'autant plus le besoin d'étudier de plus près les fonctions dont les propriétés se révèlent d'une manière claire et précise. Ces fonctions sont d'abord exclusivement les fonctions algébriques. D'autres fonctions peuvent être nettement reconnues et définies, en tant seulement qu'elles participent aux propriétés essentielles des fonctions algébriques, ou qu'elles peuvent être déduites de celles-ci par des opérations simples. A l'aide de l'intégration et par la voie de l'imaginaire, le calcul intégral nous enseigne à développer et à concevoir, en partant de fonctions algébriques simples, les transcendantes les plus simples, comme les fonctions logarithmiques et trigonométriques, et aussi des transcendantes nouvelles, comme les fonctions elliptiques. L'étude des fonctions abéliennes, et enfin celle des équations différentielles à coefficients algébriques font ressortir ce point de vue de la manière la plus générale, puisque dans cette direction on s'est attaqué à des problèmes dont la portée ne peut être, pour le moment, dépassée.

Si l'on veut soutenir que c'est autour de l'idée de fonction que se concentre généralement toute l'activité des mathématiciens, on peut alors partager, d'après leur tendance, les géomètres contemporains en deux classes : les uns cherchent à étendre l'idée de fonction en recherchant, en élucidant et délimitant de nouveaux cas ; les autres s'efforcent d'approfondir cette idée, en étudiant et présentant sous toutes ses faces la classe des seules fonctions fondamentales, des fonctions algébriques, en recherchant leurs singularités. Puissé-je avoir réussi à contribuer un peu à cette étude approfondie, et aplanir, pour ceux qui enseignent, la voie par laquelle on peut s'attendre à faire faire tant de progrès à l'Algèbre (1). A. CLEBSCH.

GAUSS (F.-G.). — FÜNFSTELLIGE VOLLSTÄNDIGE LOGARITHMISCHE UND TRIGONOMETRISCHE TAFELN. Zum Gebrauche für Schule und Praxis bearbeitet. — Berlin, Verlag von L. Rauh, 1870 (2).

L'usage des Tables logarithmiques à cinq décimales, suffisant la plupart du temps dans la pratique, *toujours dans l'enseignement*, commence à se répandre un peu à la fois en Allemagne, où la routine, déjà si puissante par elle-même, n'a pas pour auxiliaire les prescriptions impératives des programmes officiels. On est en droit

(1) Extrait des *Göttingische gelehrte Anzeigen*, 29 février 1872.

(2) GAUSS (F.-G.), *Tables complètes de logarithmes et de fonctions trigonométriques à cinq décimales, à l'usage des écoles et des praticiens*. Berlin, L. Rauh; 1870. 1 vol. in-8° (46-143 p.). Prix : 20 Sgr.

cependant de s'étonner qu'une simplification, si évidemment commandée par le plus vulgaire bon sens, mette tant de temps à faire son chemin. Ce ne sont pourtant pas les Tables, ni même les bonnes Tables qui manquent dans les pays germaniques. Celles que nous avons en ce moment sous les yeux nous semblent toutefois mériter la préférence sur les nombreux Recueils de ce genre que nous avons eu l'occasion d'examiner. Nous allons essayer de donner un aperçu du riche contenu de ce mince Volume, et des dispositions que l'auteur a cru devoir choisir pour chacune des parties dont son Livre se compose.

Les principales Tables sont :

1° La Table des logarithmes de 1 à 11000. Cette Table est disposée à double entrée, par pages de 51 lignes, et accompagnée de Tables des parties proportionnelles des différences, avec une décimale, et de Tables des logarithmes du rapport du sinus et de la tangente des arcs, exprimés en secondes, depuis 0 jusqu'à $3^\circ 4' = 11040''$. L'auteur a adopté, à l'exemple de Bremiker, le partage de chaque dizaine de lignes en 1, 3, 3, 3, par des filets et des blancs; nous aurions préféré de beaucoup le partage par tranches de 5 lignes, séparées toujours par des blancs. Cette Table est accompagnée d'une Table auxiliaire d'une page, donnant diverses constantes, avec leurs logarithmes. L'auteur, au lieu de

$$57^\circ,29577951,$$

écrit

$$57,29577951^\circ;$$

nous ne voyons pas trop ce que l'on gagne en clarté par cette manière d'écrire.

2° La Table des logarithmes trigonométriques se divise en deux Parties, dont la première donne les logarithmes des sinus et des tangentes de seconde en seconde jusqu'à 3 degrés, et de 10 en 10 secondes de 3 à 6 degrés; la seconde les logarithmes des sinus, tangentes, cotangentes et cosinus, de minute en minute pour tous les arcs du quadrant. Jusqu'à 3 degrés, au lieu des parties proportionnelles des différences, la Table contient les logarithmes des rapports $\frac{\text{arc}}{\text{sinus}}$, $\frac{\text{arc}}{\text{tangente}}$. Au delà, les parties proportionnelles sont données avec une décimale pour 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50 secondes.

3° Vient ensuite la Table des logarithmes d'addition et de soustraction. M. Gauss a choisi, parmi les diverses dispositions proposées jusqu'à ce jour, celle qui nous semble présenter le plus d'inconvénients au point de vue de l'exactitude des calculs, malgré la simplification apparente qu'elle apporte à la construction de la Table. Si a et b désignent deux nombres, dont a est le plus grand, et que A et B soient deux nombres tels que, pour $A = \log x$, on ait $B = \log(1 + x)$, on aura, en prenant $A = \log \frac{a}{b}$,

$$\log(a + b) = \log a + B,$$

et en prenant $B = \log \frac{a}{b}$,

$$\log(a - b) = \log b + A.$$

Or, dans la plupart des cas où l'emploi de ces Tables est avantageux, b est un nombre très-petit par rapport à a, et dont le logarithme est, par suite, connu avec moins de précision que $\log a$. La formule précédente donnera donc, à l'inverse de ce qui devrait avoir lieu, une précision d'autant moindre que le terme b sera plus petit. On peut, il est vrai, corriger cet inconvénient en prenant

$$\log(a - b) = \log a - (B - A);$$

mais l'usage de cette dernière formule est beaucoup plus incommode dans la pratique, et il est infiniment préférable de se servir d'une Table séparée par les logarithmes de soustraction.

Cette Table est suivie de deux Tables auxiliaires, donnant les logarithmes naturels ou népériens des 1100 premiers nombres et les multiples du module M et de son inverse $\frac{1}{M}$.

4° La quatrième Partie du Recueil contient les valeurs naturelles des lignes trigonométriques, de 10 en 10 minutes; les cordes et les flèches des arcs jusqu'à 180 degrés; les valeurs des arcs en partie du rayon; les circonférences et les surfaces des cercles de rayons donnés, etc.

5° L'Ouvrage se termine par une Table des carrés, à 4 décimales, des nombres de 0,000 à 10,000, avec les parties proportionnelles nécessaires pour l'interpolation. On connaît l'utilité d'une pareille

Table, principalement dans la pratique de la méthode des moindres carrés. A la suite de cette Table sont des tableaux des cubes, des racines cubiques, etc., des dimensions de la Terre, des mesures de longueur, des équivalents chimiques, des poids spécifiques et d'autres données physiques.

L'Introduction qui précède les Tables en explique l'usage, un peu longuement peut-être, mais avec clarté; on y trouve des développements utiles sur l'approximation que l'on peut obtenir à l'aide des logarithmes.

L'exécution typographique de l'Ouvrage est remarquable. On a choisi les chiffres de l'ancien type, auquel, après des essais de formes diverses, les imprimeurs les mieux inspirés se décident à revenir purement et simplement. Nous espérons qu'en France ces caractères si nets et si faciles à lire ne seront pas longtemps à l'usage exclusif des bibliophiles, et qu'ils reprendront dans l'emploi ordinaire la place qu'ils n'auraient jamais dû perdre.

L'auteur a eu la précaution utile de marquer d'un trait le dernier chiffre significatif des nombres, lorsque ce chiffre est un 5 *forcé*.

Les diverses Parties du Volume sont séparées par des feuilles de papier de couleur, ce qui facilite beaucoup les recherches.

M. Gauss a publié également une Table de logarithmes à quatre décimales [1], contenant dans une feuille *in-plano* les logarithmes des nombres jusqu'à 1000 et des lignes trigonométriques de 10 en 10 minutes, avec une Introduction et des Tables auxiliaires de constantes et des parties proportionnelles.

Il se propose de joindre à ces deux Ouvrages, composés d'après la division sexagésimale du cercle, deux séries de Tables trigonométriques à cinq et à quatre figures, construites d'après la division décimale du quadrant.

Nous regrettons seulement qu'il dénature la simplicité de cette division *naturelle* par l'adoption des dénominations de grades, de minutes et de secondes centésimales, qui introduisent dans l'écriture une complication bien inutile, et qui sont une source perpétuelle de confusion entre les deux systèmes de division. J. H.

---

(1) *Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Handtafel.* Berlin, L. Rauh. Prix : 5 Sgr.