BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

G. DARBOUX

Sur une méthode nouvelle pour l'étude des courbes tracées sur les surfaces algébriques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 3 (1872), p. 221-224

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1872__3__221_1>

MÉLANGES.

SUR UNE MÉTHODE NOUVELLE POUR L'ÉTUDE DES COURBES TRACÉES SUR LES SURFACES ALGÉBRIQUES (1);

Par M. G. DARBOUX.

Dans les Articles précédents, nous avons rendu compte des travaux de M. Clebsch sur *la représentation des surfaces algébriques*. Nous devons maintenant parler des recherches géométriques de M. Cremona sur le même sujet. Ces recherches ont été

---

(1) Voir *Bulletin*, t. II, p. 314.

publiées après celles de M. Clebsch, et le premier travail de M. Crémona relatif à notre sujet est, croyons-nous, celui qui a paru en 1868 dans le *Journal de Borchardt* (t. 68, p. 1). Mais ce Mémoire a été présenté, en février 1866, au Concours pour le prix Steiner à l'Académie de Berlin, et nous croyons savoir que les deux premiers auteurs de travaux sur la représentation des surfaces algébriques s'accordent à considérer leurs travaux comme à peu près simultanés et indépendants.

Le *Mémoire de Géométrie pure sur les surfaces du* 3^e *ordre* de M. Cremona est un travail considérable que l'Auteur a développé depuis. Ce Mémoire est devenu un livre consacré à des recherches géométriques sur la théorie des surfaces algébriques et, en particulier, sur celle des surfaces du 3^e ordre, livre dont M. Zeuthen a bien voulu présenter une analyse à nos lecteurs ([1]). Le travail primitif, écrit en français et publié, comme nous l'avons indiqué, dans le *Journal de Borchardt,* contient un Chapitre (le VIII^e) qui est intitulé : *Représentation d'une surface du* 3^e *ordre sur le plan.* L'Auteur y étudie les différentes courbes qui résultent de l'intersection de la surface donnée avec d'autres surfaces du 2^e et du 3^e ordre. Cette intersection peut se composer d'une courbe indécomposable, ou de plusieurs lignes distinctes. M. Cremona examine toutes ces questions importantes et donne un très-grand nombre de propositions simples et nouvelles.

En même temps que M. Clebsch aussi, et d'une manière tout à fait indépendante, M. Cremona a donné la représentation de la surface de Steiner et de la surface gauche du 4^e degré (*Rendiconti dell' Istituto Lombardo,* 24 janvier 1867). Dans les *Annali* (2^e série, janvier 1868), il a aussi indiqué la représentation plane des surfaces gauches rationnelles douées de deux directrices rectilignes.

Enfin nous devons citer deux Notes se rattachant directement à notre sujet et intitulées : *Sulla superficie di quart' ordine dotata di una conica doppia;* 1re et 2^e Notes, 9 et 23 mars 1871, lues à l'Institut Lombard.

Mais le caractère propre des recherches de M. Cremona ne ressort pas suffisamment des citations précédentes. C'est à ce géomètre que

([1]) Voir *Bulletin,* t. I, p. 233. CREMONA (Dott. Luigi), *Preliminari di una Teoria geometrica delle superficie.*

l'on doit attribuer l'idée neuve et féconde de faire servir les transformations rationnelles de l'espace à la représentation sur le plan des surfaces algébriques. Nous allons donc parcourir, en prenant pour guide M. Cremona, un nouvel ensemble d'études dans lequel les géomètres se sont proposé d'examiner et de classer les transformations des figures les unes dans les autres.

Dans la première moitié de ce siècle, les méthodes de transformation, l'homologie, la théorie des polaires réciproques, celles des figures homographiques et corrélatives avaient été beaucoup étudiées et avaient enrichi la Géométrie d'un grand nombre de propositions importantes. De son côté, Magnus, dans le *Journal de Crelle* (¹), proposa une transformation, depuis bien souvent employée, et qui est définie par les équations suivantes, où x, y, z, x', y', z' désignent les coordonnées homogènes de deux points correspondants,

$$(ax + by + cz)x' + (a'x + b'y + c'z)y' + (a''x + b''y + c''z)z' = 0,$$
$$(\alpha x + \beta y + \gamma z)x' + (\alpha' x + \beta' y + \gamma' z)y' + (\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z)z' = 0.$$

Ces équations étant à la fois du 1er degré par rapport aux coordonnées des deux points définissent ce qu'on appelle aujourd'hui une *transformation rationnelle*, c'est-à-dire une transformation dans laquelle à un point de chacune des deux figures ne correspond, en général, qu'un point de l'autre.

Magnus, qui a développé la méthode précédente au tome 8 du *Journal de Crelle*, l'a même présentée comme donnant la transformation rationnelle la plus générale, mais les géomètres n'ont pas tardé à reconnaître qu'il y avait d'autres transformations que celle de Magnus, et que celle-ci devait seulement être considérée comme la plus générale parmi celles qui *aux points d'une droite font correspondre ceux d'une conique*. On a donc classé les transformations de la manière suivante :

Étant données deux figures A et B, si, à un point de *chacune* des deux figures ne correspond qu'un point de l'autre, on dit que la transformation est *rationnelle* ou *birationnelle*. Nous laisserons de côté, pour le moment, les transformations rationnelles, dans les-

(¹) MAGNUS : *D'une nouvelle méthode pour découvrir des théorèmes de Géométrie.* (*Journal de Crelle*, t. 8, p. 51.)

quelles à un point de l'une des figures correspondent plusieurs points de l'autre (¹).

Les transformations rationnelles se classent d'après le degré de la courbe de chaque figure qui correspond à une droite de l'autre. Ainsi, étant donnée une transformation de A en B, cette transformation sera d'ordre n, si à une droite de A correspond une courbe d'ordre n de B; la transformation *réciproque* de B en A sera nécessairement de même ordre que la transformation directe. Une transformation d'ordre n est définie par les formules

$$\begin{aligned} \rho x &= \varphi\,(x', y', z'),\\ \rho y &= \varphi_1(x', y', z'),\\ \rho z &= \varphi_2(x', y', z'), \end{aligned}$$

où φ, φ_1, φ_2 sont des fonctions homogènes d'ordre n de x', y', z'; mais il faut que ces trois fonctions aient été choisies de telle manière qu'on puisse des équations précédentes tirer x', y', z' rationnellement,

$$\begin{aligned} \rho x' &= \psi\,(x, y, z),\\ \rho y' &= \psi_1(x, y, z),\\ \rho z' &= \psi_2(x, y, z); \end{aligned}$$

et alors ces nouvelles équations définiront la transformation réciproque de la première. G. D.

(*A suivre.*)