BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Revue des publications périodiques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 3 (1872), p. 200-221

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1872__3__200_1>

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

МАТЕМАТИЧЕСКІЙ СБОРНИКЪ [1].

T. V, 1870-1872.

Première Partie.

Bougaïef (N.-V.). — *Théorie des dérivées numériques.* (63 p.)

Ce Mémoire, qui est la première Partie d'un travail plus étendu,

[1] Voir *Bulletin*, t. III, p. 11.

traite des *séries numériques* et de *la loi des développements réciproques*.

L'Auteur appelle *intégrale numérique* la somme des valeurs d'une fonction $\Theta(u)$, prise par rapport à une suite de grandeurs déterminées d'après une loi quelconque. Ainsi la somme

$$\mathrm{S}_1^n \Theta(u) = \Theta(1) + \Theta(2) + \Theta(3) + \ldots + \Theta(n)$$

est dite *une intégrale numérique prise par rapport aux nombres naturels;* la somme

$$\mathrm{S}_1^{k^2} \Theta(u) = \Theta(1) + \Theta(2^2) + \Theta(3^2) + \ldots + \Theta(k^2)$$

une intégrale numérique prise par rapport aux carrés; la somme

$$\sum_n \Theta(d) = \Theta(1) + \Theta(d) + \Theta(d') + \ldots + \Theta(n),$$

où n est un nombre entier quelconque, et d, d', ... ses divers diviseurs, *une intégrale numérique prise par rapport aux diviseurs,* ou simplement une *intégrale numérique*.

Réciproquement, $\Theta(n)$ sera dite la *dérivée numérique* de l'intégrale

$$\sum_n \Theta(d) = \psi(n).$$

M. Bougaïef étudie le problème de la différentiation et de l'intégration des fonctions définies en dernier lieu, et il en déduit diverses conséquences, entre autres le développement des fonctions numériques en séries. Les diverses séries que l'on obtient ainsi pour exprimer une fonction, soit analytique, soit numérique, ne subsistent, en général, que pour les valeurs entières des variables. Il y a cependant des cas où ces développements peuvent s'appliquer à des valeurs quelconques de ces variables. Le développement en séries numériques consiste dans la détermination des coefficients. Le problème est donc analogue à celui du développement en séries analytiques, telles que les séries de Taylor, de Fourier, etc.

L'Auteur considère en particulier le développement en séries des fonctions suivantes :

1° $\mathrm{E}\sqrt[m]{n}$ et $f(\mathrm{E}\sqrt[m]{n})$, $\mathrm{E}\sqrt[m]{n}$ désignant, comme on sait, le plus grand entier contenu dans $\sqrt[m]{n}$, et f étant le signe d'une fonction quelconque;

2° La fonction $\Theta(n)$, qui exprime combien il y a de nombres premiers non supérieurs au nombre n;

3° La fonction $\mathrm{N}(n)$, qui indique le nombre des résidus quadratiques $\leqq n$ d'un nombre premier p.

Le développement de $\mathrm{E}\sqrt[m]{n}$ est remarquable par la relation qui est établie entre des opérations telles que l'extraction des racines d'un degré quelconque, et la décomposition d'un nombre en facteurs premiers.

De la formule générale de développement en série des fonctions numériques, on déduit une loi très-simple, exprimant la liaison qui existe entre des fonctions numériques quelconques, et que l'Auteur appelle la *loi des développements réciproques :*

« Étant données deux fonctions numériques quelconques, la somme des valeurs de la première, multipliées respectivement par les coefficients du développement de la seconde, est égale à la somme des valeurs de la seconde, multipliées respectivement par les coefficients du développement de la première. »

D'après cette loi, on peut établir des liaisons, non-seulement entre deux fonctions dont les développements sont connus, mais encore entre des fonctions dont le développement en série n'existe pas, dès que l'on sait trouver une fonction développable ayant une relation quelconque avec la fonction donnée.

VON BEYER (E.-I.). — *Sur l'intégration aux différences finies des fractions rationnelles au moyen des fonctions algébriques.* [Suite et fin; 2 articles, 61 et 34 p. (1).]

Le premier des deux articles dont se compose la fin du travail de M. von Beyer est intitulé : *Résolution des équations d'où dépend le calcul final de la valeur algébrique de l'intégrale* $\mathrm{S}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}$, *lorsque cette valeur est possible. Conclusion générale.*

Toutes les formules développées dans le précédent article conduisent, pour l'intégrale $\mathrm{S}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}$, à une valeur de la forme $\frac{\Theta}{\mathrm{F}}+\mathrm{C}$, F

(1) Voir *Bulletin*, t. III, p. 79.

et Θ étant deux fonctions entières, l'une connue, l'autre inconnue. L'Auteur détermine d'abord le degré de Θ en fonction des degrés de N et de M, et il montre quelles doivent être les relations entre les nombres qui expriment ces degrés, pour que l'intégrale cherchée soit algébrique. Connaissant le degré de Θ, on calcule cette fonction elle-même à l'aide soit

1° Des coefficients indéterminés,

2° Des fractions continues,

3° Des différences finies.

Dans le dernier article, M. von Beyer applique ces méthodes à diverses fractions rationnelles. Il démontre, par exemple, que la fraction $\frac{N}{x^n - 1}$, lorsqu'elle est irréductible, et que n est un nombre premier autre que 2, ne peut pas s'intégrer à l'aide des fonctions algébriques.

Alexéief (N.). — *Recherches sur des fonctions semblables aux fonctions de Legendre.* (20 p.)

Dans un Mémoire dont le *Bulletin* a rendu compte [1], M. Tchebychef a fait connaître certaines propriétés des fonctions T_0, T_1, $T_2, \ldots$, qui sont les coefficients du développement de la fonction

$$F(t, x) = \frac{\left(1 + t + \sqrt{1 - 2tx + x^2}\right)^{\lambda}\left(1 - t + \sqrt{1 - 2tx + x^2}\right)^{\mu}}{\sqrt{1 - 2tx + x^2}}$$

suivant les puissances de t. Le présent Mémoire a pour but d'établir de nouvelles propriétés des fonctions T_n, et les propriétés correspondantes des fonctions X_n de Legendre, qui en sont un cas particulier.

1° En développant, à l'aide de la formule de Lagrange, la fonction $F(t, x)$ convenablement transformée, et appliquant à ses coefficients la formule de Leibnitz, on obtient une série donnant l'expression de T_n ordonnée suivant les puissances de $x - 1$ et de $x + 1$. Cette série présente avec la série hypergéométrique de Gauss une analogie qui permet de représenter T_n sous forme d'une série hypergéométrique, multipliée par un facteur numérique.

---

(1) T. III, p. 41.

2° La fonction T_n peut être exprimée par l'intégrale définie

$$T_n = \frac{2^n}{\pi}\frac{\Gamma(n-\lambda+1)\Gamma(n-\mu+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n-\lambda-\mu+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-\lambda-\mu}\varphi\,\big[e^{(\mu-\lambda)\varphi i}P^n + e^{-(\mu-\lambda)\varphi i}Q^n\big]\,d\varphi,$$

où

$$P = x\cos\varphi + i\sin\varphi,\quad Q = x\cos\varphi - i\sin\varphi.$$

En y faisant

$$\lambda = 0,\quad \mu = 0,$$

on obtient une expression de la fonction de Legendre,

$$X_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [(2P\cos\varphi)^n + (2Q\cos\varphi)^n]\,d\varphi,$$

d'où il est facile de déduire le développement de X_n suivant les puissances de x. Cette formule est plus commode que celle que l'on connaissait jusqu'ici; car elle renferme, sous le signe $\int$, une fonction entière et rationnelle de x.

3° La fonction T_n est une intégrale particulière de l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d\left[(1-x^2)\frac{dU_n}{dx}\right]}{dx} + [\mu(x+1)+\lambda(x-1)]\frac{dU_n}{dx} + n(n+1-\mu-\lambda)U_n = 0,$$

qui se transforme dans l'équation de Laplace, en posant

$$\mu = \lambda = 0.$$

Connaissant une intégrale particulière de cette équation, il est facile d'en déduire l'intégrale générale.

4° En développant les expressions

$$\log(1 + t + \sqrt{1-2tx+x^2}) \quad \text{et} \quad \log(1 - t + \sqrt{1-2tx+x^2}),$$

suivant les puissances de t, on obtient

$$\log(1-x) = -X_1 - \frac{X_2}{2} - \frac{X_3}{3} - \dots,$$

$$\log 2 = X_0 + \frac{X_1}{2} + \frac{X_2}{3} + \dots.$$

5° La fonction $F(t, x)$, développée suivant les puissances de t, se présente sous la forme

$$F(t, x) = \sum T_k t^k.$$

En différentiant cette équation par rapport à t, et posant $x = \cos\varphi$, on obtient une relation entre les coefficients T, de la forme

$$k T_k = T_0 U_k + T_1 U_{k-1} + \ldots + T_{k-2} U_2 + T_{k-1} U_1,$$

où l'on a fait

$$U_k = \cos\varphi - \frac{\mu+\lambda}{2} X_k - \frac{\mu-\lambda}{2} X_{k-1}.$$

Pour $\lambda = \mu = 0$, cette relation devient

$$k X_k = X_0 \cos k\varphi + X_1 \cos(k-1)\varphi + \ldots + X_{k-1} \cos\varphi.$$

Sokolof (I.-D.). — *Sur le principe de la moindre action.* (10 p.)

Ce principe a donné lieu à des objections de la part d'éminents géomètres, tels que Ostrogradsky et Jacobi. Ostrogradsky, dans son Mémoire : *Sur les équations différentielles relatives au problème des isopérimètres,* trouve l'analyse de Lagrange inexacte, parce que celui-ci a négligé, en démontrant ce principe, d'introduire dans la variation de l'intégrale un multiplicateur indéterminé, ce qui l'a conduit à un résultat auquel il ne serait pas arrivé en suivant une méthode rigoureuse. Jacobi [1], sans attaquer l'exactitude de la méthode en trouve l'exposition incompréhensible; car, en parlant de la valeur minimum de l'intégrale $\int \sum m_i v_i ds_i$, on oublie généralement de dire qu'il faut, au moyen du principe des forces vives, éliminer le temps de cette intégrale, de manière que, sous le signe $\int$, tout se trouve exprimé au moyen des éléments de l'espace. Le présent article a pour but de répondre à ces deux objections.

D'abord, l'introduction du multiplicateur dont parle Ostrogradsky n'est pas nécessaire; car les variables v_i, x_i, y_i, z_i de l'intégrale sont liées par une équation de condition, celle des forces vives. Or cette équation de condition est de telle nature, que l'on peut, par son

[1] *Vorlesungen uber Dynamik, herausgegeben von* A. Clebsch. Berlin, 1866. 6. Vorlesung, S. 44.

moyen, éliminer les ν_i et leurs variations, de sorte que, sous le signe $\int$, il ne restera qu'une expression, fonction des coordonnées et de leurs variations, lesquelles peuvent être complétement indépendantes les unes des autres, sans que l'on ait besoin d'employer le multiplicateur. L'Auteur reprend ensuite la démonstration du principe de la moindre action en faisant usage de ce multiplicateur, et il montre que l'on est ainsi conduit au même résultat que par la méthode de Lagrange, mais d'une manière beaucoup moins simple.

Quant à l'objection de Jacobi, on peut répondre que le temps se trouve éliminé implicitement par la condition que le principe de la moindre action n'a lieu que pour les valeurs des vitesses qui satisfont à l'équation des forces vives, et non pour des valeurs quelconques. Lagrange a laissé figurer le temps dans ses formules pour la plus grande simplicité des calculs. D'ailleurs, une fois que l'on aura ramené, comme le veut Jacobi, l'intégrale à contenir, comme variable indépendante, une des coordonnées, rien n'empêchera de changer de variable en considérant toutes les coordonnées comme des fonctions du temps, et déterminant convenablement les nouvelles limites de l'intégration, ce qui ramène aux calculs de Lagrange.

Oumof (N.-A.). — *Lois des vibrations dans un milieu illimite d'élasticité constante.* (2 art., 32 et 20 p.)

Les problèmes relatifs aux vibrations transversales et aux vibrations longitudinales peuvent se résoudre indépendamment l'un de l'autre. Le succès de ces recherches tient à la forme des équations différentielles et à la possibilité de les intégrer, ce qui dépend en grande partie du choix des coordonnées. En rapportant les points de l'espace à trois surfaces orthogonales, dont l'une est la surface de l'onde, on peut prévoir la possibilité de simplifier les équations fondamentales et de déterminer les constantes ou les fonctions arbitraires par la connaissance de la position initiale de l'onde.

Ayant fait ce choix de coordonnées, l'Auteur étudie :

1° Les propriétés générales des ondes dans un milieu indéfini d'élasticité constante. Il parvient, entre autres, aux deux théorèmes suivants :

(*a*). *En prenant pour paramètre de l'onde la portion du rayon comprise entre les positions initiale et finale de l'onde, son para-*

mètre différentiel du 1^er^ ordre est constant et égal à l'unité pour tout l'espace.

(*b*). *Les paramètres différentiels du 1^er^ ordre des surfaces orthogonales à la surface de l'onde sont proportionnels à leurs rayons de courbure.*

2° Les vibrations transversales propagées par une surface d'onde de forme donnée. Voici les principaux résultats obtenus par l'Auteur :

Les surfaces d'onde peuvent être divisées en trois groupes. Au premier groupe appartiennent les surfaces isothermes (sphère et cylindre de révolution), sur lesquelles les vibrations transversales peuvent se propager suivant deux lignes de courbure; autrement dit, les surfaces qui admettent la polarisation rectiligne suivant deux directions rectangulaires. Au deuxième groupe appartiennent les surfaces de révolution (sauf la sphère) et les cylindres (excepté celui de révolution), qui n'admettent la polarisation rectiligne que dans un seul plan. Ce plan est celui du méridien pour les surfaces de révolution; pour les surfaces cylindriques, il est perpendiculaire au plan directeur. Le troisième groupe comprend toutes les autres surfaces, lesquelles n'admettent en aucune manière la polarisation rectiligne.

3° Les vibrations longitudinales. Les surfaces isothermes (plan, sphère, cylindre de révolution) sont les seules surfaces qui puissent propager les vibrations longitudinales. Si la surface d'ébranlement, c'est-à-dire l'onde initiale, n'est pas isotherme, les vibrations sont mixtes à une petite distance de l'origine; mais, à de grandes distances, l'onde s'approche de plus en plus de l'une des surfaces isothermes, et le phénomène ne présente plus que des vibrations longitudinales. Ce résultat a été trouvé par Poisson d'une autre manière.

4° Extension des résultats obtenus par l'Auteur à des phénomènes lumineux dans les milieux homogènes.

Boulyghinsky (D.-D.). — *Étude sur la capillarité de quelques dissolutions salines à divers degrés de concentration.* (31 p.)

Ce travail a été fait dans le laboratoire du D^r^ Magnus, à Berlin, et publié dans les *Annales de Poggendorff*, en 1868.

D'après la théorie de l'action capillaire de Poisson, la quantité appelée *constante de la capillarité* ne doit varier qu'en passant d'un liquide à un autre. Les expériences de Gay-Lussac et de Desains ont donné des résultats conformes à cette théorie; mais, d'après celle de plusieurs autres physiciens, Simon, Bède, Wertheim, Wilhelmy, il semblerait que cette constante dépendît non-seulement de la nature du liquide, mais aussi de la courbure de la ligne d'adhérence et de la nature des tubes. Ces résultats sont, du reste, très-peu concordants entre eux. Il est difficile d'admettre que ce désaccord provienne des erreurs des observations, celles-ci ayant été faites avec toutes les précautions possibles. Il faut donc croire que les phénomènes de la capillarité dépendent intimement de plusieurs causes, dont l'influence semble de prime abord insignifiante, de sorte que des expériences, faites dans des conditions en apparence identiques, peuvent conduire à des résultats différents.

L'Auteur a entrepris une suite d'expériences sur la capillarité des dissolutions salines, en s'efforçant d'éliminer autant que possible toutes les causes de perturbation, et d'obtenir une série de résultats parfaitement concordants et, par suite, concluants. Il a opéré principalement sur les dissolutions titrées de salpêtre et, en appelant

G la constante de la capillarité pour la dissolution donnée,
A la constante pour l'eau,
q la quantité de sel dans 1 gramme de la dissolution,
p la quantité d'eau dans 1 gramme de la dissolution,
k une constante déterminée par l'expérience,

il a trouvé entre G et A une relation exprimée par la formule

$$G = A(p + qk).$$

Sonine (N.). — *Sur le développement des fonctions en séries infinies.* (2 art.; 92 p.)

Les premiers essais de développement des fonctions en séries ont montré déjà la liaison intime qui existe entre cette théorie et celle des intégrales définies. Les recherches ultérieures ont mis en évidence le double caractère de cette liaison. D'une part, l'intégration définie sert à déterminer les coefficients du développement, supposé possible *a priori;* on écrit ce développement avec des coefficients indéterminés, que l'on détermine en intégrant les deux membres de l'équation. C'est à ce point de vue que le problème a été traité par Fourier et par M. Liouville ([1]). D'autre part, les travaux de Dirichlet et de Cauchy sur les séries trigonométriques et exponentielles traitent un autre côté de la question ; ici la considération de la convergence est mise au premier plan. On représente une fonction, satisfaisant à certaines conditions de continuité, par une intégrale définie ayant pour paramètre la variable de la fonction. Le problème du développement d'une fonction *quelconque* est ainsi ramené à la recherche des divers développements d'une même fonction *donnée*.

Il existe un grand nombre de formules relatives au développement des fonctions à l'aide des intégrales définies; mais aucune de ces formules n'a été jusqu'ici étudiée avec assez de soin et d'une manière systématique, sous le rapport des développements qu'elle peut fournir. Le présent travail a pour but d'examiner à ce point de vue l'intégrale de Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha}^{\alpha} \frac{f(\alpha)\,d\alpha}{\alpha - z}.$$

Si l'on représente par cette intégrale une fonction *uniforme* et *continue* quelconque, on sait que la question des divers développements de cette fonction se ramène à la recherche des développements de la fraction $\frac{1}{\alpha - z}$, de la forme

$$\frac{1}{\alpha - z} = A_0 Z_0 + A_1 Z_1 + \ldots + A_n Z_n + \ldots,$$

A_n étant une fonction de α et de n, Z_n une fonction de z et de n. La fonction étant supposée uniforme et continue, les termes de la série qui la représente devront être aussi des fonctions uniformes et continues, c'est-à-dire que les fonctions Z_n peuvent être développées suivant les puissances entières et positives de z. Dans cette hypothese, on obtient facilement une formule générale pour exprimer A_n au moyen des puissances entières et négatives de α.

L'Auteur étudie ensuite les transformations que subit la formule générale, lorsqu'on fait des hypothèses particulières sur la loi des

([1]) Voir *Journal de Mathématiques*, 1re série, t. I et II.

exposants de z dans le développement de Z_n. Il établit les relations linéaires qui existent entre les coefficients A_n et qui peuvent servir à leur détermination; puis il recherche les conditions de convergence des divers développements de $\frac{1}{\alpha - z}$, et expose une seconde méthode particulière pour le développement de cette fonction. Cette seconde méthode, sans être aussi générale que la première, a, sur celle-ci, cet avantage, qu'elle donne les résultats sous une forme, pour ainsi dire, plus condensée, et qu'elle fournit immédiatement les conditions de convergence. Elle est fondée sur la considération des fonctions de deux variables dans les développements desquelles les fonctions Z_n servent de coefficients.

Somof (I.-I.). — *Remarques relatives au principe de la moindre action.* (20 p.)

Ce Mémoire a pour objet la réfutation de l'objection d'Ostrogradsky concernant l'analyse qui a servi à Lagrange pour établir le principe de la moindre action. *Voir* plus haut la Note de M. Sokolof (p. 205). M. Somof étudie d'une manière générale la variation de l'intégrale

$$A = \int_{t_1}^{t_2} 2\,T\,dt,$$

à laquelle on a donné le nom d'*action*, et il démontre que l'on a

$$\delta A = (t_2 - t_1)\,\delta E,$$

c'est-à-dire que la variation de l'action est égale au produit du temps par la variation de la fonction $E = T + U_1 - U$, que Rankine appelle l'*énergie complète*. Le principe de la moindre action est compris comme cas particulier dans ce théorème, lorsqu'on a $\delta E = 0$. L'Auteur fait voir ensuite que le principe de la moindre action renferme toutes les équations de la Dynamique. Enfin il fait remarquer que l'équation $S = \int (T + U)\,dt$, connue sous le nom de *principe d'Hamilton,* a pour base l'équation

$$\delta Z = \frac{d}{dt}\left(dr\frac{\partial Z}{\partial r'} + ds\frac{\partial Z}{\partial s'} + \,..\right),$$

donnée par Lagrange dans son Mémoire : *Sur la théorie générale* *des variations des constantes arbitraires dans tous les problèmes de Mécanique.* (Mémoires de l'Institut national, 1808.)

IAROCHENKO (S.-P.). — *Sur la recherche des solutions singulières des équations aux dérivées partielles du* 1^er^ *ordre.* (31 p.)

L'Auteur établit les règles d'après lesquelles on peut déduire toutes les solutions singulières d'une équation aux dérivées partielles du 1^er^ ordre, soit de son intégrale complète, soit de l'équation elle-même. Ces règles, qui varient, du reste, avec la forme de l'équation différentielle ou de son intégrale complète, peuvent se résumer comme il suit :

Étant donnée une intégrale complète

$$(1) \qquad z = F(x_1, x_2, \ldots, x_n; \quad C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

de l'équation

$$(2) \qquad z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \quad p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

on obtient toutes les solutions singulières de cette dernière, 1° soit en éliminant les constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ entre l'équation (1) et les n équations

$$\frac{\partial z}{\partial C_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

2° soit en éliminant les dérivées $p_1, p_2, \ldots, p_n$ entre l'équation (2) et les n équations

$$\frac{\partial z}{\partial p_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

ZINGER (V.-I.). — *Mouvement de rotation d'un ellipsoïde liquide de forme variable.* (6 p.)

L'Auteur donne les équations du mouvement de rotation d'un ellipsoïde de révolution aplati dont la forme varie. C'est une suite de la méthode exposée par lui dans un précédent Mémoire inséré au tome II du *Математическій Сборникъ* [1].

ANDRÉIEFSKY (M.-A.). — *A propos du Mémoire de M.* Bougaïef, *intitulé : « Théorie des dérivées numériques. »* (7 p.)

Un des points les plus remarquables du Mémoire de M. Bougaïef (*voir* ci-dessus, p. 201) est la formule qui donne le développement

(1) Voir *Bulletin,* t. III, p. 13.

en série d'une fonction numérique quelconque. M. Andréiefsky fait observer qu'antérieurement aux travaux de M. Bougaïef on a fait des essais de développement en série de certaines fonctions numériques. M. Le Besgue, dans son Ouvrage intitulé : *Exercices d'Analyse numérique* (Paris, 1859), en traitant (p. 125) ce problème : « Combien y a-t-il, dans la série des nombres naturels 1, 2, 3,..., ν, de nombres non divisibles par les nombres premiers différents a, b, c,..., k? » trouve pour solution une certaine fonction $\Psi(\nu)$, donnée par la formule

$$\Psi(\nu) = \nu - \sum \mathrm{E}\left(\frac{\nu}{a}\right) + \sum \mathrm{E}\left(\frac{\nu}{ab}\right) - \sum \mathrm{E}\left(\frac{\nu}{abc}\right) + \ldots.$$

Cette formule peut être facilement obtenue par la méthode générale donnée par M. Bougaïef, et elle renferme comme cas particulier la formule

$$1 = \mathrm{E}\frac{n}{1} - \mathbf{S}\,\mathrm{E}\left(\frac{n}{a}\right) + \mathbf{S}\,\mathrm{E}\left(\frac{n}{ab}\right) - \mathbf{S}\,\mathrm{E}\left(\frac{n}{abc}\right) + \ldots,$$

donnée par cet Auteur dans le § 6 de son Mémoire.

Seconde Partie.

Houël (J.). — *Algèbre des quantités complexes.* (72 p.)

Traduction russe de la première Partie de la *Théorie élémentaire des quantités complexes;* Paris, 1867.

Kinkelin (H.), traduit par Sonine (N.-I.). — *Calcul de la Pâque chrétienne.* (20 p.)

Cet article est extrait du tome XV du *Zeitschrift fur Mathematik und Physik* [1]. Démonstration des formules qui servent à calculer : 1° les dimanches du mois de mars; 2° la pleine lune pascale; 3° le jour de Pâques, formules données sans démonstration par Gauss, en 1800, dans la *Monatliche Correspondenz*. Le traducteur y a joint le calcul du jour de Pâques pour 1871 dans les deux calendriers, et il traite le problème inverse, de déterminer les années pour lesquelles le dimanche de Pâques tombe à une date donnée; il résout ce problème pour le calendrier julien.

---

(1) Voir *Bulletin*, t. II, p. 138.

Schweizer (V.-I.). — *Moyen facile pour trouver la direction du méridien à 1 ou 2 minutes près.* (13 p.)

Ce moyen, dont peut se servir une personne peu versée dans l'Astronomie, mais habituée au maniement des instruments géodésiques, est fondé sur l'emploi du théodolite. Après avoir réglé le cercle horizontal de cet instrument, on vise avec la lunette une étoile quelconque située à l'est et à peu de distance du méridien, et on lit l'angle sur le cercle horizontal au moment où l'étoile passe à la croisée des fils du réticule ; puis on suit l'étoile dans sa marche sans déranger l'inclinaison de la lunette ni la position du limbe horizontal, jusqu'à ce que l'étoile observée se retrouve dans l'arc de la lunette. La bissectrice de l'angle décrit par le cercle est la directrice du méridien.

Au tome V du *Математическій Сборникъ* sont jointes, avec une pagination spéciale, les premières feuilles d'une traduction en langue russe de l'*Aperçu historique* de M. Chasles : « Историческій обзоръ происхожденія и развитія геометрическихъ методовъ. Сочиненіе ШАЛЯ. » La *Société Mathématique de Moscou* rend par cette publication un service éminent aux géomètres russes. Il serait bien à désirer que les lecteurs français ne fussent pas plus longtemps privés de ce rare et précieux livre. A. P.

COMPTES RENDUS hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.

T. LXXIV, 1872. (Janvier-Juin.)

N° 10. Séance du 4 mars 1872.

Saint-Venant (de). — *Sur l'hydrodynamique des cours d'eau* (suite).

M. de Saint-Venant conclut en disant qu'on peut regarder comme une chose acquise que, dans tous les cours d'eau qui ne sont pas trop tumultueux, ou dans lesquels les vitesses appelées *moyennes locales*, d'où dépend le transport des éléments, varient avec une certaine régularité, les six relations (1) (équations de Navier et Poisson) existent, à chaque instant et en chaque point, entre les dérivées de ces vitesses et les composantes, aussi moyennes chacune pour un point, des pressions intérieures qui s'y exercent, le coefficient de frottement ε étant aussi *local,* ou pouvant varier d'un point à l'autre, et même, si le mouvement n'est pas permanent, d'un instant à l'autre.

Baumhauer (von). — *Sur l'origine des aurores polaires.*

N° 11. Séance du 11 mars 1872.

Saint-Venant (de). — *Sur l'hydrodynamique des cours d'eau.*

Dans cette Communication, suite de la précédente, l'Auteur fait la critique des travaux qui ont été faits pour tenter de déterminer les valeurs du coefficient ε du frottement liquide, et termine par l'examen des diverses suppositions qu'on peut admettre sur la nature et la grandeur du coefficient ε.

Vaillant (le maréchal). — *Sur les aurores boréales.*

Cayley (A.). — *Sur les courbes aplaties.*

M. Cayley présente quelques réflexions sur la théorie générale des courbes aplaties. Cette théorie fort délicate a un rôle fondamental dans la question de la détermination des caractéristiques des systèmes de courbes.

Vinson (Aug.). — *Note sur l'aurore polaire de la nuit du* 4 *au* 5 *février* 1872.

Parville (H. de). — *Relations entre l'apparition des aurores et le mouvement de la Lune.*

Zeuthen (G.). — *Détermination des caractéristiques des systèmes élémentaires de cubiques.*

M. Zeuthen s'occupe ici des cubiques de sixième classe; en désignant par :

ϖ le nombre des cubiques douées d'un point double,
ν l'ensemble des cubiques à branches doubles (une droite double et une droite simple),
λ l'ensemble des droites triples,

l'Auteur indique les formules suivantes :

$$(1)\qquad 4\mu = \mu' + A\nu + B\lambda,$$
$$(2)\qquad 10\mu' = \mu + \varpi + C\nu + 3c',$$
$$(3)\qquad \mu' + 5\mu = c' + D\nu + 6E\lambda;$$

d'où

$$12\mu = \varpi + F\nu + G\lambda; \tag{4}$$

A, B, C, D, E sont des coefficients entiers positifs, et l'on a

$$F = 7A + C - 3D, \quad G = 7B - 18E.$$

Pour les autres notations, voir les Communications précédentes du même Auteur.

En appliquant les formules (1) et (4) à certains systèmes élémentaires, M. Zeuthen trouve

$$F = 12, \quad A = 2, \quad G = 660, \quad B = 240.$$

Boussinesq (J.). — *Sur un changement de variables qui rend intégrables certaines équations aux dérivées partielles du second ordre.*

Resal (H.). — *Théorie géométrique du mouvement des planètes.*

Cette Note, comme l'a dit M. Resal, a pour objet de faire voir comment la considération de l'accélération conduit simplement aux formules données par Lagrange, dans sa *Théorie géométrique du mouvement des aphélies.* (*OEuvres de Lagrange,* t. V.)

Mayer (A.-M.). — *Expériences acoustiques tendant à démontrer que la translation d'un corps en vibration donne lieu à une onde d'une longueur différente de celle que produit le même corps vibrant dans une position fixe.*

N° 12. Séance du 18 mars 1872.

Serret (J.-A.). — *Remarques au sujet d'une Note de M. Boussinesq, insérée au* Compte rendu *de la dernière séance.*

M. Serret fait remarquer que la transformation que M. Boussinesq regarde comme nouvelle est déjà bien ancienne, et que l'analyse dont ce géomètre a fait usage se trouve développée avec de nombreux détails dans le *Traité* de Lacroix.

Saint-Venant (de). — *Sur l'hydrodynamique des cours d'eau* (suite et fin).

Sainte-Claire Deville (Ch.). — *Remarques sur la Note pré-*

sentée par M. le maréchal VAILLANT *au sujet des aurores boréales.*

COMBESCURE (Éd.). — *Remarques sur un Mémoire de Legendre.*

Legendre termine comme il suit le § III de son important Mémoire *Sur l'intégration de quelques équations aux différences partielles* (Académie des Sciences, 1787) : « La théorie des équa-
» tions linéaires étant la plus importante dans le calcul intégral
» aux différences partielles, je saisirai cette occasion de présenter
» quelques résultats généraux sur ce genre d'équations. Ils sont le
» fruit d'un calcul assez pénible, mais dont je crois devoir suppri-
» mer les détails à cause de leur longueur. »

M. Combescure se propose, dans sa Note, de rétablir d'une manière simple les détails supprimés ; et il y ajoute plusieurs remarques nouvelles.

Observations de l'aurore boréale du 4 février : Notes de MM. *Denza* (Italie), *Mohn* (Christiania), *Coumbary* (Constantinople).

N° 13. Séance du 25 mars 1872.

MORIN (le Général). — *Note sur l'emploi simultané des appareils électriques à induction et des appareils de déformation des solides pour l'étude des lois du mouvement des projectiles et de la variation des pressions dans l'âme des bouches à feu.*

ALBENQUE (V.). — *Considérations théoriques ayant trait à l'artillerie rayée. Effets de la résistance de l'air sur un solide de révolution animé d'un mouvement de rotation.*

BRESSE. — *Sur la détermination des brachistochrones.*

L'Auteur considère, au lieu d'un point pesant, un point soumis à des forces quelconques, avec cette seule condition qu'il existe des surfaces de niveau et une fonction des forces. Plusieurs propriétés de la courbe cherchée, établies directement, le conduisent aux équations différentielles de cette courbe, équations qu'il intègre dans le cas d'une force centrale quelconque, fonction de la distance des points à un centre fixe.

MANNHEIM (A.). — *Recherches géométriques sur le contact du 3ᵉ ordre de deux surfaces* (voir à la séance suivante).

N° 14. Séance du 1er avril 1872.

La Rive (de). — *Théorie des aurores polaires.*

Faye. — *Note sur l'Association nouvellement fondée en Italie sous le titre de* Società dei spettroscopisti italiani.

Faye. — *De l'hypothèse des vents alizés sur le Soleil.*

Mannheim. — *Recherches géométriques sur le contact du 3e ordre de deux surfaces* (suite).

Si l'on choisit une courbe d'une espèce déterminée, dont l'équation renferme $n+1$ paramètres arbitraires, on peut l'assujettir à rencontrer une autre courbe donnée en $n+1$ points coïncidant en un quelconque des points de cette dernière courbe; la première courbe, qui a alors avec celle-ci un contact du $n^{\text{ième}}$ ordre est dite *osculatrice;* c'est ainsi que, pour établir un contact du 2e, 3e ou 4e ordre, on prendra pour courbe osculatrice un cercle, une parabole ou une ellipse, etc.

Ceci rappelé, lorsqu'on veut étudier la nature du contact de deux courbes données qui se touchent, on peut suivre deux voies différentes. Un premier procédé consiste à chercher une courbe osculatrice commune, servant de terme de comparaison, et ayant avec chacune d'elles le contact le plus intime qu'elle puisse avoir. Cette méthode, qui introduit des éléments de comparaison, n'ayant pas un rapport essentiel avec les courbes données, aura, en outre, l'inconvénient de laisser place à l'arbitraire et de forcer souvent à prendre comme terme de comparaison des courbes qui ne sont pas mieux connues que celles qu'on étudie. Un second procédé, plus rationnel et plus intimement lié à la nature de la question, consiste à étudier et à comparer, en leurs points correspondants, les développées successives des deux courbes.

Lorsqu'on veut se rendre compte de la nature du contact de deux surfaces qui se touchent, on se trouve également en présence de deux procédés. Le premier consiste à prendre pour terme de comparaison une surface osculatrice commune, et à comparer, soit les surfaces, soit les indicatrices; on retrouve là, et à un degré au moins aussi grand, les inconvénients signalés pour le cas des courbes planes. Un second procédé consiste à étudier et à comparer, en leurs points correspondants, les surfaces successives, lieux des centres principaux de courbure, pour les deux surfaces étudiées.

Mais ce second procédé, extension de celui des courbes planes, n'avait pas encore été appliqué; l'analogie était insuffisante, il fallait préciser cette extension; c'est ce que vient de faire M. Mannheim.

D'abord, et c'est là un point de vue géométrique essentiel, il assimile aux normales d'une courbe les surfaces, lieux des normales à une surface, qu'il a appelées *normalies*. Si l'on considère un point a d'une surface (S), les *normalies* relatives aux courbes qui passent par le point a se touchent toutes en deux points b et c situées sur la normale A en a à la surface (S); b et c sont les centres de courbures principaux de (S); et les normales B et C, en ces points, aux nappes de la surface, lieu des centres de courbure principaux, constituent pour M. Mannheim un élément analogue au centre de courbure d'une courbe plane; les plans (A, B) et (A, C) sont, pour la surface (S), les plans des sections principales en a.

Voici maintenant les principaux théorèmes énoncés et démontrés géométriquement par M. Mannheim.

Dès que deux surfaces (S) *et* (S′), *passant par un même point a, admettent trois normalies respectivement osculatrices entre elles, ces deux surfaces ont en a un contact du* 3^e^ *ordre, c'est-à-dire qu'elles ont un contact du* 3^e^ *ordre dans toutes les sections possibles faites à partir du point a par une surface coupante quelconque.*

Si deux surfaces osculatrices en a sont telles que les nappes de leurs développées sont osculatrices entre elles aux centres de courbures situés sur la normale commune A *à* (S) *et* (S′), *ces surfaces jouissent de la propriété d'avoir des normalies osculatrices entre elles le long de* A.

Si deux surfaces (S) *et* (S′) *ont en un point a un contact du* 3^e^ *ordre, les normalies à ces surfaces, dont les directrices sont tracées à partir du point a, sont osculatrices entre elles.*

Pour faciliter le langage, M. Mannheim appelle *développée* d'une surface la surface lieu des centres de courbures principaux de cette surface.

Si, aux centres de courbures principaux communs à deux surfaces (S) *et* (S′) *qui passent par le même point a, les nappes des développées de ces surfaces sont osculatrices entre elles, les surfaces* (S) *et* (S′) *ont, au point a, un contact du* 3ᵉ *ordre.*

Lorsqu'en un point a deux surfaces (S) *et* (S′) *ont des lignes de courbure ayant entre elles un contact du* 3ᵉ *ordre, les surfaces* (S) *et* (S′) *ont entre elles en ce point a un contact du même ordre.*

Nous pensons, avec M. Mannheim, qu'il y a à recueillir, dans cette voie nouvelle, des résultats intéressants, soit par la Géométrie pure, soit par la Géométrie analytique.

M. Chasles, en présentant, de la part de M. le prince Boncompagni, les livraisons de juillet et août 1871 du *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche,* fait remarquer que ces deux livraisons renferment des recherches fort étendues sur divers Ouvrages du moyen âge relatifs à l'aimant, recherches faites par M. *Steinschneider,* puis par M. *Bertelli,* et enfin par M. le prince *Boncompagni.* L. P.

TIDSKRIFT FÖR MATEMATIK OCH FYSIK (¹).

IVᵉ année, 1871.

Hultman (F.-W.). — *De l'élimination des radicaux dans les équations.* (4 p.)

Hultman (F.-W.). — *Histoire de l'Arithmétique en Suède.* Suite. (3 art.; 29 p.)

D(au)g. — *Remarques sur les dénominations de logarithmes* naturels, hyperboliques *et* népériens. (4 p.)

Dillner (G.). — *Intégrales définies des fonctions synectiques.* (3 art.; 56 p.)

Nous consacrerons un article spécial à cette seconde Partie de l'important travail de M. Dillner.

(¹) Voir *Bulletin,* t. I, p. 177.

Broman (K.-E.). — *Sur la transformation d'une série en fraction continue.* (2 p.)

Falk (M.). — *Sur les directrices et les diamètres conjugués de l'ellipse et de l'hyperbole.*

Hultman (F.-W.). — *Sur le rapport harmonique.* (7 p.)

Lindquist (G.). — *Sur l'application de l'analyse spectrale à la détermination du mouvement de la source lumineuse.* (12 p.)

Nordlund (K.-P.). — *Sur la fonction du 3ᵉ degré à une seule variable.* 1ʳᵉ Partie. (15 p.)

Étude élémentaire, préparatoire à l'enseignement de la Géométrie analytique.

D... (G.). — *Sur la trisection de l'angle.* (2 p.)

Construction simple par approximations successives, au moyen d'une série de cercles.

D(au)g. — *Extraction approchée des racines.* (8 p.)

A étant une valeur approchée de $\sqrt[n]{N}$, on a

$$N^{\frac{m}{n}} = A^m \frac{(n+m)N + (n-m)A^n}{(n-m)N + (n+m)A^n},$$

avec une erreur moindre que

$$\frac{m}{n}\,\frac{A^m}{N}\,\frac{(m+n)(N-A^n)^2}{(m+n)A^n - mN}.$$

Malmsten (C.-J.). — *Sur la propriété caractéristique connue des fonctions homogènes.* (6 p.)

L'Auteur donne deux démonstrations différentes de la formule connue

$$(x_1 D_{x_1} + \ldots + x_m D_{x_m})^k f = n(n-1)\ldots(n-k+1)f,$$

f étant une fonction homogène de degré n des variables $x_1, \ldots, x_m$.

Falk (M.). — *Sur l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles du 2ᵉ ordre, à r variables indépendantes.* (10 p.)

L'Auteur suit une marche analogue à l'exposition donnée par Boole (¹) de la méthode de Monge pour l'intégration d'une équation

(¹) *A Treatise on Differential Equations*, chap. XV.

linéaire aux dérivées partielles du 2^e ordre à deux variables indépendantes. Mais il s'écarte de la marche de Boole en ce qu'il a cherché à distinguer entre le cas où l'équation différentielle est satisfaite par une intégrale première contenant une fonction arbitraire de fonctions déterminées et celui où elle est satisfaite par un système qui exprime que ces fonctions déterminées sont constantes. Si Boole a confondu ces deux cas distincts, cela tient à l'idée inexacte qu'*une seule* relation $u = f(v)$, en vertu de ce que f est une fonction arbitraire, soit équivalente à *deux* relations, d'après lesquelles u et v seraient constants. Il conclut, en effet, de l'équation

$$du = f'(v)\,dv$$

que l'on a

$$du = 0 \quad \text{et} \quad dv = 0.$$

LUNDBERG (E.). — *Sur les sections coniques osculatrices.* (8 p.)

Trouver une conique de foyer donné, osculatrice à une courbe donnée en un point donné.

FALK (M.). — *Sur la convergence du développement de $\sqrt{a^2 - b}$ en fraction continue.* (2 p.)

Observations sur un article du *Zeitschrift für Math. u. Phys.*, 1872, p. 70; l'Auteur remarque que le caractère de convergence indiqué comme nouveau est contenu comme cas particulier dans un caractère indiqué en 1848 par M. Malmsten (*Vetenskaps-Akademiens Handlingar,* Stockholm).