BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Revue bibliographique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 3 (1872), p. 161-168

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1872__3__161_0>

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

MAILLARD (S). — Recherche des caractéristiques des systèmes élémentaires de courbes planes du 3e ordre. (Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris pour obtenir le grade de Docteur ès-sciences mathématiques.) (56 p.)

La thèse de M. Maillard a été soumise à la Faculté des Sciences en juillet 1870 et soutenue le 16 décembre 1871 nous citons ces dates, parce que le sujet énoncé a été également abordé par M. Zeuthen, bien connu par ses nombreuses et remarquables recherches sur ces difficiles questions; le travail de M. Zeuthen a été communiqué à l'Académie des Sciences dans la séance du 19 février 1872. Il n'y a d'ailleurs rien de surprenant à ce que plusieurs Mémoires se soient produits simultanément sur cette même question : l'appel fait par M. Chasles avait éveillé depuis plusieurs années l'attention des géomètres, et, après les courbes du 2e ordre, celles du 3e ordre devaient naturellement être l'objet des nouveaux efforts tentés dans cette voie féconde, et ces efforts ont été heureusement couronnés par le succès.

M. Maillard aborde son sujet avec beaucoup d'ordre et de netteté. Les courbes exceptionnelles attirent d'abord son attention; et, par des considérations ingénieuses, il précise le sens et le rôle des points qu'on appelle *sommets* sur ces courbes exceptionnelles; c'est là une question extrêmement délicate, signalée pour la première fois par M. Chasles (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXIV, p. 709, 805, 1079; année 1867), reprise dernièrement par M. Cayley (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXIV, p. 708; année 1872).

Ces préliminaires étant posés, M. Maillard établit quinze formules différentes, dont plusieurs se contrôlent respectivement; ses démonstrations prennent leur point de départ dans le principe de correspondance, et s'appuient sur des considérations géométriques déjà souvent employées dans des circonstances analogues; mais ces expédients géométriques exigent des précautions nombreuses, et l'Auteur n'en épargne aucune.

Ces formules, utiles à connaître, ont été résumées comme il suit par M. Maillard.

Indiquons d'abord les notations adoptées.

1° Si l'on considère un *système* de courbes du 3^e ordre, on représente par

μ le nombre des courbes du système qui passent par un point donné;
ν le nombre des courbes qui touchent une droite donnée;
i le degré du lieu des points d'inflexion;
t la classe de l'enveloppe des tangentes d'inflexion;
α le nombre des courbes à branches doubles (1 droite simple et 1 droite double) qui font partie du système;
β le nombre des courbes à branches triples [1 droite triple (α et β sont les nombres théoriques)];
Δ le nombre des courbes à point double faisant partie d'un système de 6^e classe.

2° S'il s'agit d'un système de courbes de la 4^e classe, on nommera

δ le degré du lieu des points doubles;
θ la classe de l'enveloppe des tangentes aux points doubles;
R le nombre des courbes à rebroussement;
N le nombre des courbes à 2 points doubles (1 conique et 1 droite sécante).

3° S'il s'agit d'un système de courbes de la 3^e classe, on nommera

ρ le degré du lieu des points de rebroussement;
τ la classe de l'enveloppe des tangentes de rebroussement;
n le nombre des courbes composées d'une conique et d'une tangente à cette conique.

On a alors les trois groupes suivants de formules fondamentales :

SYSTÈMES DE 3^e CLASSE.

Courbes du 3^e ordre avec un point de rebroussement.

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} 3\rho = 4\mu - \nu - 2\alpha - 6\beta, \\ 3t = 4\nu - \mu - \alpha, \\ 3i = 4\nu - 3\alpha - 3\beta - n, \\ 3\tau = 4\mu - 2\alpha - 6\beta - n, \\ \mu + \nu = 2n + 2\alpha + 3\beta; \end{cases}$$

on a ainsi *cinq* relations entre les *neuf* quantités μ, ν; i, t; α, β; ρ, τ, n.

Systèmes de 4ᵉ classe.

Courbes du 3ᵉ ordre avec un point double.

$$
\text{(II)} \qquad \left\{
\begin{aligned}
2\delta &= 4\mu - \nu - 2\alpha - 6\beta,\\
3t &= 6\nu - \mu - \alpha - 2\mathrm{N},\\
3i &= 6\nu - 7\alpha - 9\beta - 2\mathrm{N} + 2\mu,\\
2\theta &= 6\mu - \nu - 2\alpha - 8\beta,\\
\mathrm{R} &= 2\mu - 2\alpha - 4\beta,\\
3\nu - 2\mu &= 2\alpha + 4\mathrm{N};
\end{aligned}
\right.
$$

on a *six* relations entre les *dix* quantités μ, ν; i, t; α, β; δ, θ, R, N.

Systèmes de 6ᵉ classe.

Courbes du 3ᵉ ordre sans point double.

$$
\text{(III)} \qquad \left\{
\begin{aligned}
t &= \nu + 5\mu - \alpha - 6\beta,\\
i &= 4\mu + 2\nu - 5\alpha - 9\beta,\\
\Delta &= 7\nu - 16\mu + 2\alpha + 18\beta,\\
4\mu &= \nu + 2\alpha + 6\beta;
\end{aligned}
\right.
$$

on a donc *quatre* relations entre les *sept* quantités μ, ν; i, t; α, β; Δ.

Telles sont les formules établies par M. Maillard. Nous ferons remarquer que leur combinaison donne lieu à plusieurs résultats intéressants; ainsi l'on trouve

Dans le système de 3ᵉ classe.. $3(t - i) = \nu - n$;

Dans le système de 4ᵉ classe.. $2t = 3\nu$;

Dans le système de 6ᵉ classe.. $t = 3\nu - \frac{1}{4}\Delta$, $2i = 3\nu + \Delta$,

. . . .

M. Maillard applique ensuite ses formules générales à la détermination des caractéristiques des systèmes élémentaires; nous pensons faire une chose utile en donnant ici les résultats numériques qu'il a obtenus.

Courbes à rebroussement donné.

	Systèmes :	μ	ν	n	α	β	t	τ	i	ρ
	(R $4p$)	2	8	5	0	0	10	1	9	0
	(R $3p\,1d$)	8	20	8	6	0	22	4	18	0
(1)	(R $2p\,2d$)	20	38	8	21	0	37	10	27	0
	(R $1p\,3d$)	38	44	5	18	12	40	13	27	0
	(R $4d$)	44	32	2	0	24	28	10	18	0

Courbes à rebroussement sur une droite donnée.

	Systèmes :	μ	ν	n	α	β	i	t	τ	ρ
	(RA, $5p$)	12	42	27	0	0	47	52	7	2
	(RA, $4p\,1d$)	42	96	45	24	0	89	106	25	8
(2)	(RA, $3p\,2d$)	96	168	54	78	0	128	166	58	20
	(RA, $2p\,3d$)	168	186	45	78	36	119	166	85	38
	(RA, $1p\,4d$)	186	132	27	24	72	71	106	79	44
	(RA, $5d$)	132	72	12	0	60	32	52	32	32

Courbes devant avoir un rebroussement.

	Systèmes :	μ	ν	n	ρ	τ	t	i	α	β
	R ($6p$)	24	60	42	12	18	72	66	0	0
	R ($5p\,1d$)	60	114	87	42	51	132	123	0	0
	R ($4p\,2d$)	114	168	141	96	105	186	177	0	0
(3)	R ($3p\,3d$)	168	168	168	168	168	168	168	0	0
	R ($2p\,4d$)	168	114	141	186	177	96	105	0	0
	R ($1p\,5d$)	114	60	87	132	123	42	51	0	0
	R ($6d$)	60	24	42	72	66	12	18	0	0

Courbes à point double donné.

	Systèmes :	μ	ν	N	α	β	θ	R	t	i	δ
	(D $5p$)	1	4	5	0	0	1	2	6	7	0
	(D $4p\,1d$)	4	16	20	0	0	4	8	24	28	0
	(D $3p\,2d$)	16	52	56	6	0	16	20	78	82	0
(4)	(D $2p\,3d$)	52	142	128	33	0	52	38	213	199	0
	(D $1p\,4d$)	142	256	194	48	36	106	44	384	322	0
	(D $5d$)	256	304	200	0	120	136	32	456	352	0

Courbes dont le point double est sur une droite donnée.

	Systèmes :	μ	ν	R	δ	α	β	θ	t	i	N
	(DA, $6p$)	6	22	12	1	0	0	7	33	39	0
	(DA, $5p1d$)	22	80	44	4	0	0	26	120	142	0
	(DA, $4p2d$)	80	240	112	16	24	0	96	360	392	0
(5)	(DA, $3p3d$)	240	604	228	52	126	0	292	706	894	0
	(DA, $2p4d$)	604	1046	338	142	219	108	638	1569	1411	0
	(DA, $1p5d$)	1046	1212	352	256	150	360	942	1818	1484	0
	(DA, $6d$)	1212	1000	264	304	0	540	976	1500	1092	0

Courbes de la 4*e* *classe.*

	Systèmes :	μ	ν	N	δ	θ	R	t	i	α	β
	D($7p$)	12	36	21	6	18	24	54	66	0	0
	D($6p$, $1d$)	36	100	57	22	58	72	150	186	0	0
	D($5p$, $2d$)	100	240	130	80	180	200	360	460	0	0
	D($4p$, $3d$)	240	480	240	240	480	480	720	960	0	0
(6)	D($3p$, $4d$)	480	712	294	604	1084	960	1068	1548	0	0
	D($2p$, $5d$)	712	756	211	1046	1758	1424	1134	1846	0	0
	D($1p$, $6d$)	756	600	72	1212	1968	1512	900	1656	0	0
	D($7d$)	600	400	0	1000	1600	1200	600	1200	0	0

Courbes de 3*e* *ordre et de* 6*e* *classe.*

	Systèmes :	μ	ν	Δ	α	β	t	i
	($8p$)	1	4	12	0	0	9	12
	($7p$, $1d$)	4	16	48	0	0	36	12
	($6p$, $2d$)	16	64	192	0	0	144	192
	($5p$, $3d$)	64	256	768	0	0	576	768
(7)	($4p$, $4d$)	256	976	2784	24	0	2232	2856
	($3p$, $5d$)	976	3424	8832	240	0	8064	9552
	($2p$, $6d$)	3424	9766	21828	885	360	23841	25563
	($1p$, $7d$)	9766	21004	39072	1470	2520	53244	51042
	($8d$)	21004	33616	50448	0	8400	88236	75648

Il est indispensable maintenant de rapprocher ces résultats de ceux qui ont été obtenus par M. Zeuthen, et dont il a été parlé au *Bulletin*, t. III, p. 151.

Pour les systèmes de 3ᵉ classe, les formules données par M. Zeuthen se déduisent de celles du groupe (I) en y supposant α et β nuls; il en est de même pour les systèmes de 4ᵉ classe, à l'exception de la relation qui renferme le nombre i, qui n'a pas été considéré par M. Zeuthen pour ces derniers systèmes; c'est qu'en effet M. Zeuthen, comme il en avertit lui-même (p. 521 et 564 des *Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXIV), ne considère, pour la 3ᵉ et la 4ᵉ classe, que les systèmes qui ne renferment pas les singularités α et β, parce qu'on n'en trouve pas ordinairement dans un système déterminé par sept conditions de contact. Après l'introduction des hypothèses $\alpha = 0$, $\beta = 0$, les formules de M. Maillard donnent exactement les formules de M. Zeuthen.

Pour les systèmes de 6ᵉ classe, M. Zeuthen donne seulement trois relations où entrent cinq coefficients positifs indéterminés, dont quatre sont déterminés plus loin; ces relations se ramènent exactement à celles du groupe (III), en attribuant au coefficient D la valeur 1, à l'exception de la relation qui renferme le nombre i, laquelle n'a pas été donnée par M. Zeuthen.

De l'étude comparative de ces deux Mémoires, il résulte que les groupes (I), (II), (III) des formules de M. Maillard renferment exactement les formules de M. Zeuthen, et nous semblent plus complètes que celles qui ont été données par ce dernier géomètre, qui n'a fait connaître, il est vrai, dans les *Comptes rendus*, qu'un fragment de son travail. D'ailleurs, toutes les déterminations numériques qui leur sont communes sont parfaitement concordantes.

L. P.

JOACHIMSTHAL (F.).—Elemente der analytischen Geometrie der Ebene. Zweite Auflage. — In-8°, 1871, 205 p. Berlin, G. Reimer [1].

Le petit Traité de Géométrie analytique plane dont nous devons rendre compte est une œuvre posthume de Joachimsthal.

Depuis longtemps déjà ce géomètre, enlevé le 5 avril 1861, par

---

[1] Joachimsthal (F.) : *Éléments de Géométrie analytique plane*, 2ᵉ édition. Berlin, Georges Reimer. In-8°, 205 p. Prix : 4fr,75.

une mort prématurée, à ses travaux de professeur et à ses recherches si élégantes de savant, songeait à publier ses *Leçons de Géométrie analytique élémentaire;* Jacobi, de son côté, avait l'intention de publier en même temps le Cours sur la Géométrie analytique de l'espace qu'il avait l'habitude de faire à Königsberg. Aussi a-t-on trouvé dans les papiers de Joachimsthal un manuscrit désigné comme prêt pour l'impression et un grand nombre de Notes et d'indications qui ont permis à M. O. Hermes, élève de Joachimsthal, et auquel la Géométrie analytique doit plusieurs travaux importants, d'entreprendre la publication des Leçons élémentaires de son regretté professeur.

Cette publication a eu d'ailleurs un grand succès, puisque, en quelques années, le livre est arrivé à sa deuxième édition.

C'est que l'ouvrage de Joachimsthal est écrit avec une simplicité remarquable et qu'il est un des meilleurs guides qu'on puisse proposer aux commençants et à toutes les personnes qui désirent prendre par elles-mêmes une idée exacte de la Géométrie analytique. L'auteur a eu soin de suivre l'ordre des anciens Traités, ordre que les exigences des examens nous ont malheureusement fait perdre, et de graduer soigneusement les difficultés. On commence par étudier avec beaucoup de détails la ligne droite, le cercle, les trois sections coniques : c'est là la marche naturelle; la transformation des coordonnées, la discussion de l'équation générale du 2^e degré, la théorie des transversales, les questions relatives à deux ou plusieurs coniques viennent ensuite. Quant à la discussion des courbes de degré supérieur, on sait que les Allemands la réservent pour le Calcul différentiel et intégral. Nos professeurs de Géométrie analytique font des cours plus complets et plus étendus; les nécessités des examens ont introduit beaucoup de rigueur et de clarté dans toutes les parties de cet enseignement en France; nous avons d'excellents Traités sur le même sujet; toutefois, nous avons cru pouvoir signaler cet Ouvrage élémentaire parce que, dans notre conviction, il ne peut être inutile de comparer le mode d'enseignement que l'on a adopté à celui d'un professeur aussi éminent que l'était Joachimsthal.

LEJEUNE-DIRICHLET (P.-G.). — Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgegeben und mit Zusätzen versehen von R. Dedekind. Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage. Braunschweig, F. Vieweg und Sohn. In-8°, 498 p.; 1871 (¹).

Les Leçons de Dirichlet, publiées pour la première fois en 1863, avaient été accueillies avec la plus grande faveur; rédigées avec une grande clarté, elles permettront à tout lecteur attentif de s'introduire rapidement au cœur de la théorie des nombres; les méthodes créées par Gauss et perfectionnées par ses illustres successeurs y étaient présentées avec une élégance et une simplicité qui leur donnait un nouvel intérêt. L'ordre suivi est celui qu'adoptent tous les professeurs, et en particulier M. Liouville, dans le Cours élégant qu'il a fait plusieurs fois au Collége de France, et où il a développé une partie seulement de ses importantes études sur les fonctions numériques. Les premiers Chapitres se rapportent aux nombres premiers, aux diviseurs des nombres, à la théorie des résidus quadratiques. Le reste de l'Ouvrage est consacré à une exposition très-élémentaire et remarquablement simplifiée des formes quadratiques. L'ancienne édition se terminait par neuf suppléments; la nouvelle en contient, de plus, un très-important (d'une centaine de pages), relatif à la composition des formes quadratiques. Voici les titres des dix suppléments actuels :

1. Sur quelques théorèmes de Gauss et sur la théorie de la division du cercle.
2. Sur la valeur-limite d'une série.
3. Sur un théorème de Géométrie.
4. Sur les genres dans lesquels se décomposent les classes de formes quadratiques de déterminant défini.
5. Théorie des résidus de puissances pour des modules composés.
6. Démonstration du théorème que toute progression arithmétique illimitée, dont le premier terme et la raison sont des nombres entiers sans diviseur commun, contient un nombre illimité de nombres premiers.
7. Sur quelques théorèmes relatifs à la division du cercle.
8. Sur l'équation de Pell.
9. Sur la convergence et la continuité de quelques séries infinies.
10. Sur la composition des formes quadratiques binaires.

G. D.

(¹) Lejeune-Dirichlet (P.-G.) : *Leçons sur la théorie des nombres*, publiées par R. Dedekind. 2ᵉ édition, revue et augmentée. Brunswick, Vieweg et fils, 1871. In-8°, 498 pages.